MAE 0219 Introdução à Probabilidade e Estatística I

1a. Prova de Exercícios - 21 de maio de 2020

Questão	Nota
1	
2	
3	
Total	

Nome ______________________________

Assinat. ______________________________

No.USP ______________________________

Prof. Vanderlei C. Bueno

==

Curso: Bacharelado em Economia - FEA

==

1. (4 pontos) A distribuição conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y é dada pela seguinte tabela:

X,Y	-1	0	2
-1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{12}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

A) Achar a distribuição de $Z = 2X + Y$;

B) Achar as distribuições marginais de X e Y;

C) Construa a distribuição condicional da variável $(X|Y = 2)$;

D) Ache a distribuição da variável aleatória $E[X|Y]$ que assume valores $E[X|Y = y]$ com probabilidades $P(Y = y)$. Calcule sua média e compare-a com a média de X.

Resposta:

A) Z assume valores $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 4$, com as respectivas probabilidades:

$$P(Z = -3) = 0; P(Z = -2) = \frac{2}{12}; P(Z = -1) = \frac{2}{12};$$
$$P(Z = 0) = \frac{1}{12}; P(Z = 1) = \frac{3}{12}; P(Z = 2) = \frac{2}{12}; P(Z = 4) = \frac{2}{12}.$$

B) X assume os valores $-1, 0, 1$, com respectivas probabilidades

$$P(X = -1) = \frac{3}{12}; P(X = 0) = \frac{3}{12}; P(X = 1) = \frac{6}{12}.$$

Y assume os valorees $-1, 0, 2$, com as respectivas probabilidades

$$P(Y = -1) = \frac{5}{12}; P(Y = 0) = \frac{3}{12}; P(Y = 2) = \frac{4}{12}.$$

C) A variável aleatória condicional $(X|Y=2)$ assume valores $-1,0,1$ com respectivas probabilidades

$$P(X=-1|Y=2)=\frac{1}{4}; P(X=0|Y=2)=\frac{1}{4}; P(X=1|Y=2)=\frac{2}{4}.$$

e portanto

$$E[X|Y=2]=-1.\frac{1}{4}+0+1.\frac{2}{4}=\frac{1}{4}.$$

AS esperanças condicionais $E[X|Y=-1]$ e $E[X|Y=0]$ são calculadas utilizando os mesmos argumentos.

D) A variável aleatória $E[X|Y]$ assume valores

$$E[X|Y=-1]=\frac{3}{5}; E[X|Y=0]=\frac{-1}{3}; E[X|Y=2]=\frac{1}{4}.$$

com respectivas probabilidades

$$\frac{5}{12}; \frac{3}{12}; \frac{4}{12}$$

Portanto a sua esperanẹ

$$E\{E[X|Y]\}=\frac{3}{5}.\frac{5}{12}+\frac{-1}{3}.\frac{3}{12}+\frac{1}{4}.\frac{4}{12}=\frac{3}{12}.$$

Observe que $E[X]=\frac{-3}{12}+\frac{6}{12}=\frac{3}{12}$ e que $E\{E[X|Y]\}=E[X]$.

2. (3 pontos) Uma urna contém três bolas numeradas 1, 2 e 3. Duas bolas são

retiradas ao acaso e sucessivamente. Sejam as variáveis aleatórias X : número da primeira bola retirada;

Y : número da segunda bola retirada. Calcule $\rho(X,Y)$ e $Var(X+Y)$ nos casos em que

A) as bolas são retiradas com reposição;

B) as bolas são retiradas sem reposição. Resposta

A) retiradas com reposição

O vetor aleatório (X,Y) assume os valores

$$(1,1);(1,2);(1,3);(2,1);(2,2);(2,3);(3,1);(3,2);(3;3).$$

com as respectivas probabilidades

$P((X,Y)=(1,1))=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$;

$P((X,Y)=(1,2))=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$;

$P((X,Y)=(1,3))=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$;

$P((X,Y)=(2,1))=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$;

$P((X,Y)=(2,2))=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$;

$P((X,Y)=(2,3))=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$;

$P((X,Y)=(3,1))=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$;

$P((X,Y)=(3,2))=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$;

$P((X,Y)=(3,3))=\frac{1}{3}.\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$.

As distribuições marginais de X e de Y são idênticas e iguais, assumem valores em $1,2,3$ com probabilidades

Em adição observamos que

$$P(X - x, Y = y) = \frac{1}{9} = \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = P(X = x).P(y = y),$$

isto é, as variáveis X e Y são independentes e portanto $Cov(X, Y) = 0$ e $\rho(X, Y) = 0$.

A variância de X, que é igual à variânci de Y é igual a

$$Var(X) = E[X^2 - \mu^2 = \frac{1}{3}.(1 + 4 + 9) - [\frac{1}{3}.(1 + 2 + 3)]^2 = \frac{14}{3} - \frac{12}{3} = \frac{2}{3}$$

Como X e Y são independentes

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) = 2.\frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

B) Retiradas sem reposição

O vetor aleatório (X, Y) assume os valores

$$(1, 2); (1, 3); (2, 1); (2, 3); (3, 1); (3, 2).$$

com as respectivas probabilidades

$P((X, Y) = (1, 2)) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;

$P((X, Y) = (1, 3)) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;

$P((X, Y) = (2, 1)) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;

$P((X, Y) = (2, 3)) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;

$P((X, Y) = (3, 1)) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$;

$P((X, Y) = (3, 2)) = \frac{1}{3}.\frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

X e Y são identcamente distribuidas, assumem os valores $1, 2, 3$ com probabilidades

$$P(X = 1) = P(Y = 1) = P(X = 2) = P(Y = 2) = P(X = 3) = P(Y = 3) = \frac{1}{3}.$$

Contudo $P(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = P(X = 1).P(Y = 3)$ e as variáveis são dependentes

$E[X] = \frac{1}{3}.(1 + 2 + 3) = 2$, $E[X^2] = \frac{1}{3}.(1 + 4 + 9) = 4,67$ e $Var(X) = 4,67 - 4 = 0,67$.

A variável aleatória XY assume valores $2, 3, 6$ com probabilidades

$$P(XY = 2) = P(XY = 3) = P(XY = 6) = \frac{1}{3}.$$

e tem média igual a

$$E[XY] = \frac{1}{3}(2 + 3 + 6) = \frac{11}{3} = 3,67.$$

Portanto $Cov(X, Y) = E[XY] - E[X].E[Y] = 3,67 - 4 = -0,33$ e $\rho(X, Y) = \frac{-0,33}{0,67} = -0,5$.

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2.Cov(X, Y) = 2.0,67 - 2.0,33 = 0,67.$$

3. (3 pontos) Sejam X e Y variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuidas com distribuição geométrica

$$P(X = k) = p(1-p)^k; k = 0, 1, 2, 3, ...$$

A) Achar $P(X = k|X + Y = n)$.

B) Qual a distribuição de $(X|X + Y = n)$? Qual sua média e variância?

OBS: Observe que $P(X + Y = n) = \sum_{j=0}^{n} P(X = j, Y = n - j)$.

Resposta

$$P(X = k|X + Y = n) = \frac{P(X = k, X + Y = n)}{P(X + Y = n)} =$$

$$\frac{P(X = k, Y = n - k)}{\sum_{j=0}^{n} P(X = j, Y = n - j)} =$$

$$\frac{p.(1-p)^k.p.(1-p)^{n-k}}{\sum_{j=0}^{n} p.(1-p)^j.p.(1-p)^{n-j}} =$$

$$\frac{p^2.(1-p)^n}{p^2.\sum_{j=0}^{n}(1-p)^n} = \frac{p^2.(1-p)^n}{p^2.(1-p)^n \sum_{j=0}^{n} 1} = \frac{1}{n+1}.$$

A distribuição de $(X|X + Y = n)$ é uniforme em $\{0, 1, 2, ..., n\}$.

A sua média é

$$\mu = \frac{1}{n+1}.(1 + 2 + ... + n) = \frac{n}{2}.$$

A sua variância é

$$\sigma^2 = \frac{1}{n+1}.\frac{n.(n+1).(2n+1)}{6} - \frac{n^2}{4} = \frac{n^2 + 2n}{12}.$$