Exercício :

29/05/2020

Uma onda eletromagnética satisfaz, num dado referencial inercial S, as relações

$$\vec{E}\cdot\vec{B} = 0 \quad e \quad E^2 = c^2 B^2$$

a) Mostre que essas relações são válidas em qquer referencial inercial.

b) Se $\hat{k}$ é um versor na direção de propagação da onda, então de acordo com as eqs de Maxwell

$$\hat{k}\cdot\vec{E} = \hat{k}\cdot\vec{B} = 0$$

Mostre que essa propriedade também é válida em qquer referencial inercial.

—— // ——

a) Decompondo os campos numa componente longitudinal (// ao boost) e transversal ($\perp$ ao boost)

$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} \quad , \quad \vec{B} = \vec{B}_{\parallel} + \vec{B}_{\perp} \quad \text{em } S$$

Num referencial S' se movendo com velocidade $\vec{v}$ ②
ao longo de x com respeito a S

$$E'_x = E_x \qquad B'_x = B_x$$

$$E'_y = \gamma(E_y - vB_z) \qquad B'_y = \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2}E_z\right)$$

$$E'_z = \gamma(E_z + vB_y) \qquad B'_z = \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2}E_y\right)$$

Portanto

$$\vec{E}'_{\parallel} = \vec{E}_{\parallel} \quad e \quad \vec{B}'_{\parallel} = \vec{B}_{\parallel}$$

$$\vec{E}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{E}_{\perp} + \vec{v}\times\vec{B}_{\perp}\right) \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma\left(\vec{B}_{\perp} - \frac{\vec{v}\times\vec{E}_{\perp}}{c^2}\right)$$

com $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$

Então

$$\vec{E}'\cdot\vec{B}' = \left(\vec{E}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp}\right)\cdot\left(\vec{B}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp}\right)$$

$$= \vec{E}'_{\parallel}\cdot\vec{B}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp}\cdot\vec{B}'_{\perp}$$

$$= \vec{E}_{\parallel}\cdot\vec{B}_{\parallel} + \gamma^2\left[\vec{E}_{\perp}\cdot\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}(\vec{v}\times\vec{B}_{\perp})\cdot(\vec{v}\times\vec{E}_{\perp})\right]$$

Como $\vec{v} \perp \vec{E}_\perp$ e $\vec{v} \perp \vec{B}_\perp$ ③

$$(\vec{v} \times \vec{B}_\perp) \cdot (\vec{v} \times \vec{E}_\perp) = v^2 \, \vec{E}_\perp \cdot \vec{B}_\perp \quad \text{(Provar)}$$

Logo

$$\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E}_\parallel \cdot \vec{B}_\parallel + \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{E}_\perp \cdot \vec{B}_\perp$$

$$= \vec{E}_\parallel \cdot \vec{B}_\parallel + \vec{E}_\perp \cdot \vec{B}_\perp = \vec{E} \cdot \vec{B}$$

$$\Downarrow$$

$\vec{E} \cdot \vec{B}$ é invariante de Lorentz

A partir da expressão para $\vec{E}'_\perp$, temos

$$\vec{E}'_\perp \cdot \vec{E}'_\perp = \gamma^2 (\vec{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B}_\perp) \cdot (\vec{E}_\perp + \vec{v} \times \vec{B}_\perp)$$

$$= \gamma^2 \left[\vec{E}_\perp^2 + (\vec{v} \times \vec{B}_\perp)^2 + 2 \vec{E}_\perp \cdot (\vec{v} \times \vec{B}_\perp) \right]$$

$$= \gamma^2 \left[\vec{E}_\perp^2 + v^2 \vec{B}_\perp^2 + 2 \vec{E}_\perp \cdot (\vec{v} \times \vec{B}_\perp) \right]$$

De forma análoga

$$\vec{B}'_\perp \cdot \vec{B}'_\perp = \gamma^2 \left[\vec{B}_\perp^2 + \frac{v^2}{c^4} \vec{E}_\perp^2 - \frac{2}{c^2} \vec{B}_\perp \cdot (\vec{v} \times \vec{E}_\perp) \right]$$

Então

$$\vec{E}'^2 + c^2\vec{B}'^2 = (\vec{E}'_{\parallel} + \vec{E}'_{\perp})^2 - c^2(\vec{B}'_{\parallel} + \vec{B}'_{\perp})^2$$

$$= \vec{E}'^2_{\parallel} - c^2\vec{B}'^2_{\parallel} + \vec{E}'^2_{\perp} - c^2\vec{B}'^2_{\perp}$$

$$= \vec{E}^2_{\parallel} - c^2\vec{B}^2_{\parallel} + \gamma^2\Big[\vec{E}^2_{\perp} + v^2\vec{B}^2_{\perp} + 2\,\vec{E}_{\perp}\cdot(\vec{v}\times\vec{B}_{\perp})$$

$$- c^2\vec{B}^2_{\perp} - \frac{v^2}{c^2}\vec{E}^2_{\perp} + 2\,\vec{B}_{\perp}\cdot(\vec{v}\times\vec{E}_{\perp})\Big]$$

$$= \vec{E}^2_{\parallel} - c^2\vec{B}^2_{\parallel} + \vec{E}^2_{\perp} - c^2\vec{B}^2_{\perp} + 2\gamma^2\underbrace{\Big[\vec{E}_{\perp}\cdot(\vec{v}\times\vec{B}_{\perp}) + \vec{B}_{\perp}\cdot(\vec{v}\times\vec{E}_{\perp})\Big]}_{=0}$$

$$= (\vec{E}^2_{\parallel} + \vec{E}^2_{\perp}) - c^2(\vec{B}^2_{\parallel} + \vec{B}^2_{\perp})$$

$$= \vec{E}^2 - c^2 B^2$$

$$\Downarrow$$

$\vec{E}'^2 - c^2\vec{B}'^2$ é invariante de Lorentz

Escreva $\vec{E}\cdot\vec{B}$ e $\vec{E}^2 - c^2\vec{B}^2$ em termos de uma contração completa de tensores.

b) Tome o tensor de campo $F_{\mu\nu}$

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$|\vec{K}| = \frac{\omega}{c}$

e um 4-vetor $K^\mu = (K^0, \vec{K}) = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{K}\right)$, onde ω é a frequência angular da onda

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0\, e^{i(\vec{K}\cdot\vec{r}-\omega t)} = \vec{E}_0\, e^{iK^\mu x_\mu}.$$

Calculemos $K^\mu F_{\mu\nu}$ em S:

Para $\nu = 0$:

$$K^0 \cancel{F_{00}}^{0} + K^1 F_{10} + K^2 F_{20} + K^3 F_{30} = \vec{K}\cdot\vec{E} = 0$$

$\nu = i$:

$$K^0 F_{0i} + K^1 F_{1i} + K^2 F_{2i} + K^3 F_{3i}$$

$$\frac{\omega}{c}\frac{E_i}{c} + (\vec{K}\times\vec{B})_i \Rightarrow \vec{E} = \frac{c^2}{\omega}(\vec{B}\times\vec{K})$$

Então

$$\vec{E}^2 = \frac{c^4}{\omega^2} (\vec{B} \times \vec{k}) \cdot (\vec{B} \times \vec{k}) \underset{\uparrow}{=} c^2 (\vec{B} \times \hat{k}) \cdot (\vec{B} \times \hat{k})$$

$$|\vec{k}| = \frac{\omega}{c}$$

$$= c^2 \vec{B}^2 - c^2 (\vec{B} \cdot \hat{k})^2$$

$$\Downarrow$$

$$c^2 (\vec{B} \cdot \hat{k})^2 = - (\vec{E}^2 - c^2 \vec{B}) = 0$$

Num referencial S'

$$k^\mu \longrightarrow k'^\mu$$

$$F_{\mu\nu} \longrightarrow F'_{\mu\nu}$$

e as eqs acima continuam válidas para os novos campos $\vec{E}'$, $\vec{B}$ e p/ a nova onda com ω' e $\vec{k}'$

Na aula passada, vimos que as eqs de Maxwell podem ser escritas em formato covariante

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu \quad e \quad \partial_\nu G^{\mu\nu} = 0 \qquad (\nu = 0,1,2,3)$$

onde $G^{\mu\nu}$ é o Hodge-dual do tensor de campo eletromagnético $F^{\mu\nu}$.

A eq. da direita também pode ser escrita em termos do tensor com índices covariantes $F_{\mu\nu}$

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0 \qquad (\lambda,\mu,\nu = 0,1,2,3)$$

Vimos que um quadrivetor contravariante a^μ difere do seu dual covariante a_μ pelo sinal da componente temporal. O mesmo vale para os índices de um tensor.

Um índice contravariante pode ser obtido a partir de um covariante e vice-versa por meio do chamado tensor métrico

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$g^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

Por exemplo

$$a^{\mu} = g^{\mu\nu} a_{\nu}$$

$$a_{\mu} = g_{\mu\nu} a^{\nu}$$

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} F^{\alpha\beta}$$

Mostre que $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = 4$

Por vezes na literatura o tensor métrico do espaço de Minkowski é representado por $\eta^{\mu\nu}$ para distingui-lo da métrica $g^{\mu\nu}$ de espaços com curvatura.

O nome métrico se deve ao fato de que o tensor pode ser usado para calcular o "tamanho" de 4-vetores

$$a^2 = a^{\mu} a_{\mu} = a^{\mu} g_{\mu\nu} a^{\nu}$$

Outra convensão possível (sempre verifique isso no livro que você está usando) é adotar uma assinatura distinta para a métrica

$$g^{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$$

$$\Downarrow$$

$$a^{\mu} a_{\mu} = a^0 a^0 - a^1 a^1 - a^2 a^2 - a^3 a^3$$

Formulação lagrangeana do Eletromagnetismo Clássico

É possível escrever o Eletromagnetismo na linguagem de Mecânica Clássica, obtendo uma ação S cujos extremos levem às eqs de Maxwell.

Mais precisamente, que as eqs. de Euler-Lagrange associadas à lagrangeana a partir da qual a ação é obtida, sejam as eqs de Maxwell.

Se denominarmos de L essa lagrangeana, então

$$S = \int L\, dt$$

Na verdade, se multiplicarmos L por uma constante, nada muda do ponto de vista dos extremos de S. Então, escreveremos

$$S = \int L\, dx^0$$

Além disso, podemos definir $\mathcal{L}$ como a densidade volumétrica de lagrangeana, ou seja

$$L = \int \mathcal{L}\, d^3x = \int \mathcal{L}\, dx^1 dx^2 dx^3$$

Portanto

$$S = \int \mathcal{L}\, d^4x$$

onde $d^4x = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ é um elemento infinitesimal de volume no espaço de Minkowski.

A próxima pergunta é: quais são os graus de liberdade a serem levados em conta nesse problema? Ou de forma equivalente: quem são as coordenadas generalizadas do Eletromagnetismo Clássico?

Se num primeiro momento desconsideramos a origem física da corrente J^μ (que são as cargas elétricas) e assumirmos que essa corrente é dada, então as coordenadas generalizadas devem ser o campo eletromagnético

Ou, de maneira equivalente, o 4-potencial e suas derivadas

$$q \longrightarrow A^\mu$$

$$p \longrightarrow \partial^\mu A^\nu \quad \Rightarrow$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x^\mu, A^\mu, \partial^\mu A^\nu)$$

Na presença de uma corrente externa J^μ, a lagrangeana é dada por

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J^\mu A_\mu$$

Por abuso de linguagem, eu continuarei a chamar $\mathcal{L}$ de lagrangeana quando para ser rigoroso trata-se de uma densidade volumétrica de lagrangeana.

As equações de Euler-Lagrange para $\mathcal{L}$ acima são então

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0 \qquad (\mu, \nu = 0, 1, 2, 3)$$

De volta à densidade $\mathcal{L}$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) + J^\mu A_\mu$$

$$= -\frac{1}{4\mu_0} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu - \partial_\nu A_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial_\nu A_\mu \partial^\nu A^\mu)$$

$$+ J^\mu A_\mu$$

$$= -\frac{1}{2\mu_0} (\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu) + J^\mu A_\mu$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2\mu_0}\left(\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu A_\nu \partial^\nu A^\mu\right) + J^\mu A_\mu$$

Portanto

$$\partial_\mu\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{1}{\mu_0}\partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) - J^\nu = 0$$

$$\partial_\mu\left(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu\right) = -\mu_0 J^\nu$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu$$

$$\Downarrow$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\mu$$

Como vimos na aula passada, essas são as únicas eqs relevantes para o 4-potencial A^μ e no gauge de Lorentz ela equivale a eqs de onda não homogêneas

$$\Box^2 A^\mu = -\mu_0 J^\mu$$

Além disso, vimos que J^μ satisfaz uma eq. de continuidade

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Na dedução anterior assumimos que a corrente J^μ era conhecida, de forma que $F^{\mu\nu}$ continha todos os graus de liberdade de interesse.

Obviamente, uma teoria completa do Eletromagnetismo, em especial no nível quântico, deve incluir também como graus de liberdade as próprias fontes dos campos.

Por exemplo, uma teoria quântica e relativística descrevendo a interação entre elétrons e fótons é obtida a partir da seguinte lagrangeana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\hbar c\, \gamma^\mu D_\mu - mc^2\right)\psi - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

onde

ψ é chamado de espinor e representa a função de onda do elétron

$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ são 4 matrizes de Dirac (4×4)

$\bar{\psi}$ é chamado de espinor adjunto

$$\bar{\psi} = \underbrace{\psi^\dagger}_{\text{hermitiano conjugado de } \psi}\gamma^0$$

$D_\mu \equiv \partial_\mu + i\frac{e}{\hbar}A_\mu$ é a chamada derivada covariante

Perceba que como γ^μ são matrizes 4x4

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

então ψ e $\bar{\psi}$ são objetos de 4 componentes.

Paul Dirac foi o primeiro a estudar esses objetos em 1928, partindo da eq. para elétrons livres (não interagentes)

$$i\hbar\gamma^\mu\partial_\mu\psi - mc\psi = 0$$

Essa é a eq. de Euler-Lagrange para a lagrangeana de elétrons livres

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\hbar c\gamma^\mu\partial_\mu - mc^2)\psi$$

com coordenadas generalizadas $\begin{array}{l} q \longrightarrow \psi \\ p \longrightarrow \partial_\mu\psi \end{array}$

Dirac mostrou que a equação

$$(i\hbar \gamma^{\mu} \partial_{\mu} - mc)\,\psi = 0$$

admite soluções tipo onda plana

$$\psi(x^{\mu}) = \psi(\vec{r},t) = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = C\, e^{-\frac{i}{\hbar} p^{\mu} x_{\mu}}\, u(p^{\mu})$$

$$u^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{c p_z}{E + mc^2} \\ \dfrac{c(p_x + i p_y)}{E + mc^2} \end{pmatrix} \qquad u^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{c(p_x - i p_y)}{E + mc^2} \\ \dfrac{-c p_z}{E + mc^2} \end{pmatrix} \quad \rightarrow E > 0 \text{ (elétron)}$$

$$u^{(3)} = \begin{pmatrix} \dfrac{c p_z}{E - mc^2} \\ \dfrac{c(p_x + i p_y)}{E - mc^2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u^{(4)} = \begin{pmatrix} \dfrac{c(p_x - i p_y)}{E - mc^2} \\ \dfrac{-c p_z}{E - mc^2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow E < 0 \text{ (pósitron)}$$

$u^{(1)}, u^{(3)}$ → spin 1/2 $(s_z = 1/2)$

$u^{(2)}, u^{(4)}$ → spin 1/2 $(s_z = -1/2)$

O pósitron (a anti-partícula do elétron) foi descoberta quatro anos depois (1932) por Carl Anderson.

De volta à lagrangeana da teoria de elétrons e fótons

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\hbar c\, \gamma^\mu D_\mu - mc^2\right)\psi - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

As eqs de Euler-Lagrange associadas são

$$(i\hbar\, \gamma^\mu \partial_\mu - mc)\psi = \frac{e}{\hbar}\gamma^\mu A_\mu \psi \qquad (*)$$

$$\partial_\nu F^{\mu\nu} = -\mu_0 c\, e\, \bar{\psi}\gamma^\mu \psi \qquad (**)$$

Portanto, a corrente elétrica nesse caso é dada por

$$J^\mu = -c e \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Muito importante:

Como agora, não estamos mais tratando J^μ como uma corrente externa dada, ela é obtida a partir das soluções do conjunto de eqs diferenciais acopladas (*)-(**), não necessariamente J^μ satisfaz uma eq. de continuidade.

Entretanto, a lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\left(i\hbar c\, \gamma^\mu D_\mu - mc^2\right)\psi - \frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$$

tem propriedades especiais que garantem que

$$J^\mu = -ce\,\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

ainda satisfaz a equação de continuidade

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

Essa propriedade é chamada de invariância de calibre (ou de gauge) local, algo que já havíamos discutido antes no contexto de eqs de Maxwell.

Como agora não só os potenciais A^μ são graus de liberdade, os próprios "campos" do elétron precisam ser incluídos nas transformações.

Uma transformação de gauge local na Eletrodinâmica é dada por

$$\psi \longrightarrow \psi' = e^{-i\frac{q}{\hbar c}\lambda(x^\mu)}\psi$$

$$A^\mu \longrightarrow A'^\mu = A^\mu + \partial^\mu \lambda$$

a eq. de baixo vocês reconhecerão como aquelas já vistas anteriormente no curso para o 4-potencial $A^\mu = \left(\frac{V}{c}, \vec{A}\right)$.

Perceba que a função escalar $\lambda(\vec{r},t) = \lambda(x^\mu)$ agora representa uma mudança de fase local, ou seja, que pode ser feita para qquer ponto do espaço-tempo de Minkowski, na função de onda ψ do elétron.

a lagrangiana $\mathcal{L}$ da Eletrodinâmica é invariante por transformações de gauge locais. Essa invariância pode ser vista como uma propriedade de simetria da teoria, assim como a invariância por translações espaciais, temporais e rotacionais

De acordo com o teorema de Noether, a toda simetria da lagrangeana, há uma correspondente "carga" conservada e, portanto, uma corrente que satisfaz uma eq. de continuidade.

No caso da simetria de gauge local da Eletrodinâmica, essa corrente é exatamente

$$J^\mu = -ce\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Logo, pode-se afirmar que a conservação local de carga elétrica no Eletromagnetismo é uma consequência direta da liberdade de redefinição das fases dos campos dos elétrons num dado ponto x^μ do espaço-tempo e dos campos A^μ de acordo com as eqs anteriores.

Redefinições de fase, em linguagem de teoria de grupos, são operação de um grupo unitário chamado $U(1)$, formado pelas matrizes unitárias $(U^\dagger U = 1)$ 1×1 (ou seja, números). Ou seja, os elementos de $U(1)$ são números complexos de magnitude 1

$$e^{i\theta}$$

$U(1)$ é um grupo abeliano.

A idéia de invariância de gauge local foi estendida para grupos não abelianos e é a base de teorias para descrever a chamada teoria eletrofraca (unificação do eletromagnetismo com a força nuclear fraca) e a cromodinâmica quantica para descrever a interação nuclear forte.