Regras de Derivação

Vimos na aula passada a definição de "função derivada" e que a vantagem em calcular a função derivada é que com ela podemos calcular a derivada de $f(x)$ em qualquer ponto x_0, bastando para isso substituir, na função derivada $f'(x)$, a variável x pelo valor numérico x_0.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

REGRAS PARA OBTENÇÃO $f'(x)$

1) Derivada de funções constantes, $f(x) = c$

Se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$

Ex: • $f(x) = 2 \Rightarrow f'(x) = 0$

• $f(x) = -\frac{3}{4} \Rightarrow f'(x) = 0$

• $f(x) = \sqrt{9} \Rightarrow f'(x) = 0$

2) Derivadas de funções $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{R}$

Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = n x^{n-1}$

Ex: • $f(x) = x^1 \Rightarrow f'(x) = 1 . x^{1-1} = 1 . x^0 = \underline{1}$

• $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x^{2-1} = \underline{2x}$

• $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^{3-1} = \underline{3x^2}$

• $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ (n) $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{1/2}} =$

potência negativa! vai para denominador.

$$= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

• $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$

$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

cuidado! $\boxed{\frac{1}{x^n} \neq x^n}$

• $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $n=-2$ $\Rightarrow f'(x) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$

• $f(x) = \frac{1}{x^5} = x^{-5} \Rightarrow f'(x) = -5x^{-5-1} = -5x^{-6} = -\frac{5}{x^6}$

n

• $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}} = x^{-3/2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}\cdot x^{-3/2-1} = -\frac{3}{2}x^{-5/2}$

$= -\frac{3}{2x^{5/2}} = -\frac{3}{2\sqrt{x^5}}$

3) Derivadas de funções $f(x) = cx^n$, c uma constante e $n \in \mathbb{R}$.

Se $f(x) = cx^n$, então $f'(x) = c.n.x^{n-1}$

Ex: • $f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 2.2.x^{2-1} = 4x$

• $f(x) = 5x^3 \Rightarrow f'(x) = 5.3.x^{3-1} = 15x^2$

• $f(x) = 2\sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \cancel{2}.\frac{1}{\cancel{2}}x^{\frac{1}{2}-1} = x^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{x}}$

• $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^3}} = 3x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = 3.\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{9}{2}x^{1/2} = \frac{9\sqrt{x}}{2}$

• $f(x) = \frac{x^5}{2} = \frac{1}{2}.x^5 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}.5x^4 = \frac{5x^4}{2}$

4) Derivadas da SOMA, PRODUTO, QUOCIENTE de funções

Sejam $g(x)$ e $w(x)$ funções deriváveis, então

1) Regra da soma (ou subtração):

Considere $f(x) = g(x) \pm w(x)$, então $f'(x) = g'(x) \pm w'(x)$

Ex: • $f(x) = \underbrace{x^2}_{g(x)=x^2} + \underbrace{3}_{w(x)=3} \Rightarrow f'(x) = 2x + 0 = 2x$

• $f(x) = \underbrace{2\sqrt{x^5}}_{g(x)} + \underbrace{5x^2}_{w(x)} \Rightarrow f'(x) = \cancel{2}.\frac{5}{\cancel{2}}x^{\frac{5}{2}-1} + 5.2x$

$= 5x^{3/2} + 10x$

$= 5\sqrt{x^3} + 10x$

• $f(x) = \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{g(x)} - \underbrace{5x^3}_{w(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{2} - 5.3.x^2$

$= x - 15x^2$

2) Regra do produto

Considere $f(x) = g(x).w(x)$, então

$$f'(x) = g'(x).w(x) + g(x)\,w'(x)$$

Ex: $f(x) = \underbrace{(x^3 - 4x)}_{g(x)}\underbrace{(3x^4 + 8x^3)}_{w(x)}$

$g'(x) = 3x^2 - 4$ $\qquad w'(x) = 12x^3 + 24x^2$

$$f'(x) = \underbrace{(3x^2-4)}_{g'(x)}\underbrace{(3x^4+8x^3)}_{w(x)} + \underbrace{(x^3-4x)}_{g(x)}\underbrace{(12x^3+24x^2)}_{w'(x)}$$

Fazendo a distributiva nas funções, chegamos em:

$f'(x) = 9x^6 + 24x^5 - 12x^4 - 32x^3 + 12x^6 + 24x^5 - 48x^4 - 96x^3$

$= 21x^6 + 48x^5 - 60x^4 - 128x^3$ //

OBS: Para esta mesma função $f(x) = (x^3 - 4x)(3x^4 + 8x^3)$ (4)
eu posso primeiro fazer a distributiva para depois derivar? Sim! É mais fácil.

$$f(x) = (x^3 - 4x)(3x^4 + 8x^3)$$

$$f(x) = 3x^7 + 8x^6 - 12x^5 - 32x^4 \Rightarrow \text{derivada da soma}$$

$$f'(x) = 3.7.x^6 + 8.6.x^5 - 12.5x^4 - 32.4x^3$$

$$= 21x^6 + 48x^5 - 60x^4 - 128x^3$$

OBS2: Sempre posso fazer isso? Depende! As vezes fica bem mais difícil.

Ex: $f(x) = (x^3 - 4x)^5 (3x^4 + 8x^3)$

~~Neste~~ Neste caso, não posso fazer a distributiva antes de desenvolver $(x^3 - 4x)^5 = \underbrace{(x^3 - 4x)(x^3 - 4x) \cdots (x^3 - 4x)}_{5 \text{ vezes}}$.

Também não posso usar a regra do produto diretamente → saída é usar Regra da Cadeia (próxima aula).

3) Regra do quociente

Considere a função $f(x) = \dfrac{g(x)}{w(x)}$, então:

OBS: $w(x) \neq 0$

$$f'(x) = \frac{g'(x)w(x) - g(x)\,w'(x)}{[w(x)]^2}$$

EX:

- $f(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ $\to g(x) = 1+x \Rightarrow g'(x) = 1$
  $\to w(x) = 1-x \Rightarrow w'(x) = -1$

$$f'(x) = \frac{1(1-x) - [(1+x).(-1)]}{(1-x)^2} = \frac{1-\cancel{x}+1+\cancel{x}}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$$

- $f(x) = \dfrac{2x^3+4}{x^2-4x+1}$ $\to g(x) = 2x^3+4 \Rightarrow g'(x) = 6x^2$
  $\to w(x) = x^2-4x+1 \Rightarrow w'(x) = 2x-4$

$$f'(x) = \frac{6x^2(x^2-4x+1) - [(2x^3+4)(2x-4)]}{(x^2-4x+1)^2} = \frac{6x^4-24x^3+6x^2-4x^4+8x^3-8x+16}{(x^2-4x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^4-16x^3+6x^2-8x+16}{(x^2-4x+1)^2}$$

5) Derivadas das funções exponenciais e logarítmicas

Se $f(x) = \log_a(x)$, então: $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \dfrac{1}{\ln(a)} = \dfrac{1}{x\ln(a)}$

$\to x > 0,\ 0 < a \neq 1$

Consequentemente,

$f(x) = \log_e(x) = \ln(x)$ então: $f'(x) = \dfrac{1}{x\underbrace{\ln(e)}_{1}} = \dfrac{1}{x}$

EX:

- $f(x) = \log_2(x)$ (só x) $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(2)}$
- $f(x) = \log_{10}(x)$ (só x) $\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(10)}$

E se? $f(x) = \log_2(x^2)$ $\Rightarrow$ não vale! $\Rightarrow$ Regra da cadeia

Se $f(x) = a^x$, então: $f'(x) = a^x\ln(a)$ condições: ~~xxxx~~ $0 < a \neq 1$

$f(x) = e^x$, então: $f'(x) = e^x \underbrace{\ln(e)}_{1} = e^x$

$\to$

- $f(x) = 2^x$ (só x) $\Rightarrow f'(x) = 2^x\ln(2)$
- $f(x) = \frac{1}{2}^x$ (só x) $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}^x\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

PROBLEMÁTICA

Se ontem você tinha R$ 80,00 e hoje você tem R$ 100,00. Quanto, em termos percentuais, seu dinheiro aumentou?

ONTEM		HOJE		AMANHÃ		DEPOIS DE AMANHÃ
80,00	$\xrightarrow{}$	100,00	$\xrightarrow{}$	120,00	$\xrightarrow{}$	140,00
	20,00	↑ 25%	20,00	↑ 20%	20,00	↑ 16,7%
		$\left(\frac{20}{80} = 0,25\right)$		$\left(\frac{20}{100} = 0,2\right)$		$\left(\frac{20}{120} = 0,1667\right)$

Isso é a variação percentual de uma função, $pv(x)$.

$$pv(x) = \frac{100\, f'(x)}{f(x)}$$

EXEMPLO: O salário de uma empresa é inicialmente de R$ 24.000,00 ao ano. Sabendo que anualmente terá um aumento de R$ 200,00, determine o percentual de variação da função.

Note que: a função que descreve o salário é:

$$S(t) = 24.000 + 200t$$

$$pv(t) = \frac{100 \cdot S'(t)}{S(t)} = \frac{100 \cdot 200}{24.000 + 200t} = \frac{20000}{24.000 + 200t}$$

$$pv(t) = \frac{100}{120 + t}$$

Após 5 anos qual será o percentual de variação do salário?

$$pv(5) = \frac{100}{120 + 5} = 0,8\%$$