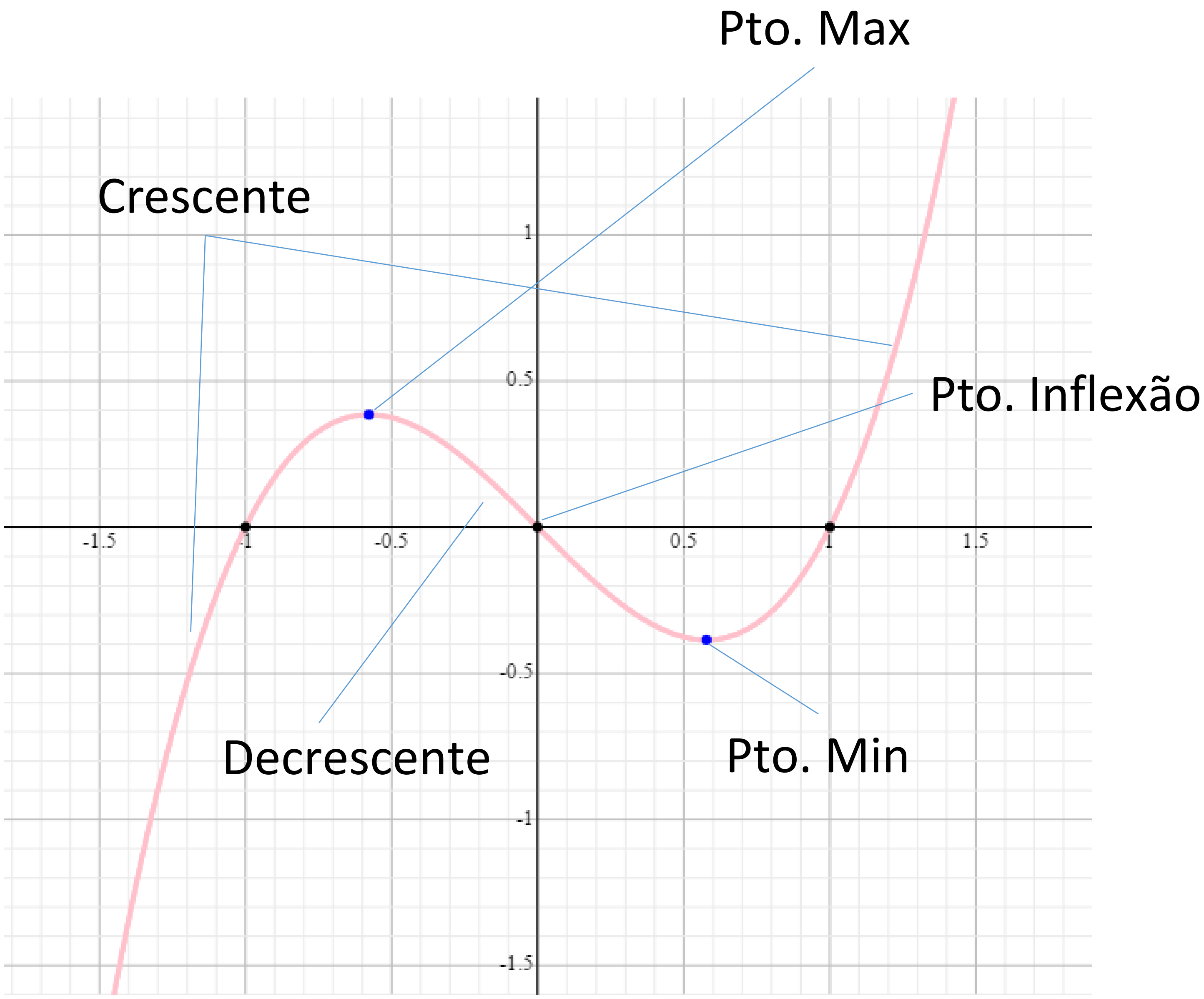
Aplicações de Derivadas

Introdução

- Existe uma relação entre a(s) derivada(s) de uma função e seu comportamento
  - Crescente/decrescente
  - PMAX/PMIN (local ou global?)
  - Inflexões (concavidades para cima/baixo)
  - Etc...
- A(s) derivada(s) descrevem precisamente o comportamento de qualquer função
- Será que isso tem importância na prática?
  - Pergunte a um analista (sério) de mercado...

Introdução

$$f(x) = x^3 - x$$



Derivadas de Ordem Superior (3.5)

- A derivada f' de uma função também é uma função e pode ou não ser diferenciável em um ponto
- A derivada de uma derivada é chamada de **derivada segunda**. Notação
  - $f''(x)$
  - y''
  - $\frac{d^2y}{dx^2}$
- Evidentemente, também é possível existir a terceira, quarta, ..., e-nézima
- Por exemplo, determine as derivadas de todas as ordens para
  - $f(x) = x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x - 8$

Derivadas de Ordem Superior (3.5)

- Encontre a primeira e segunda derivadas das seguintes funções
  - $f(x) = (x^2 + 2)^5$
  - $f(x) = \frac{x}{2x+1}$
  - $f(x) = \sqrt{2x - 1}$
- Tá... Mas para o que serve isso?!?!?!?!?!

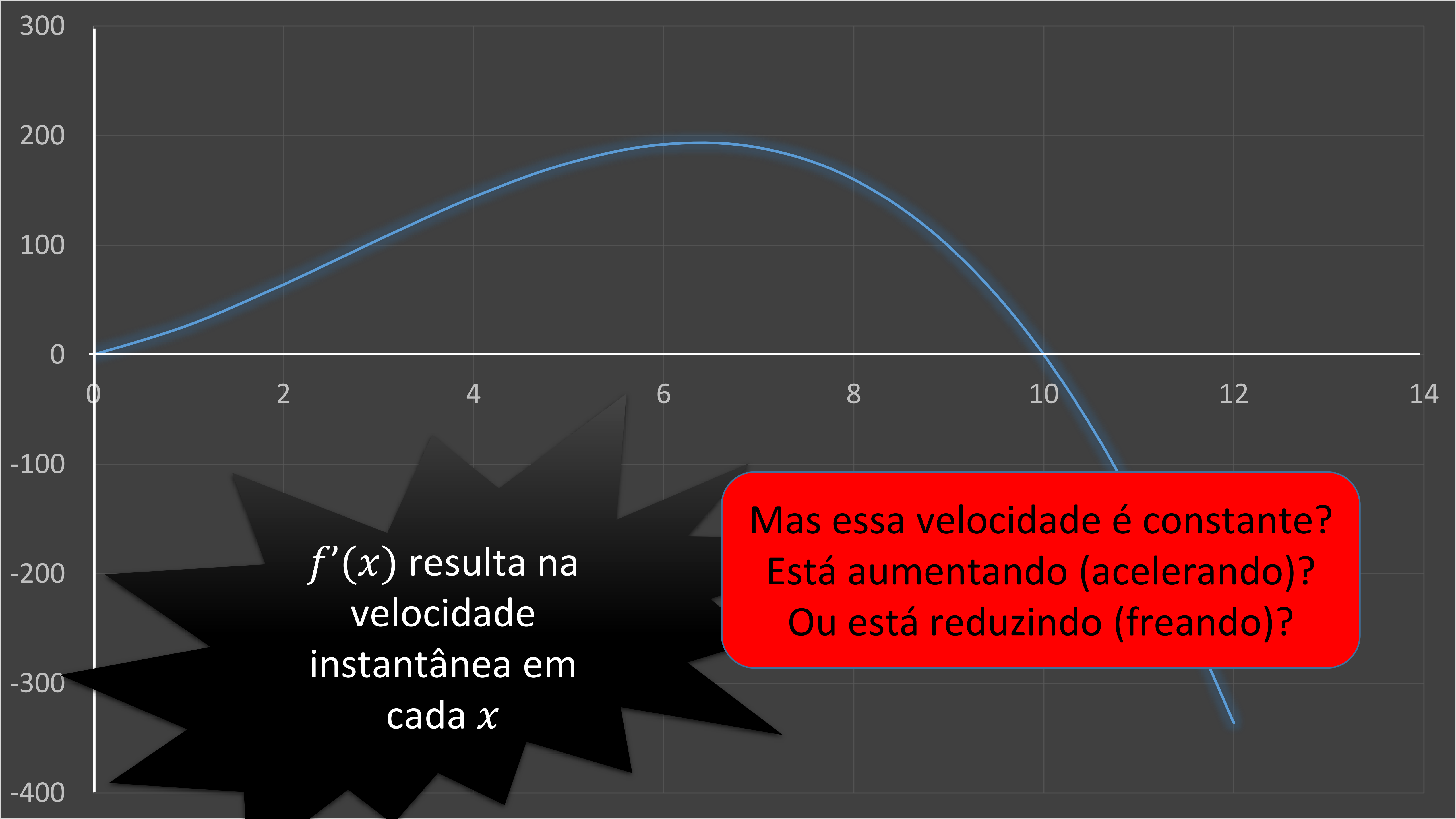
Derivadas de Ordem Superior (3.5)

- Velocidade vs. Aceleração
  - A distância em pés percorrida por um veículo após t segundos é de

$$s = -t^3 + 8t^2 + 20t \qquad (0 \leq t \leq 12)$$

Lembrando, a taxa que expressa deslocamento sobre o tempo é uma grandeza denominada velocidade

Vamos ver o gráfico dessa função...


300
200
100
0
-100
-200
-300
-400
0
2
4
6
8
10
12
14
$f'(x)$ resulta na velocidade instantânea em cada x
Mas essa velocidade é constante?
Está aumentando (acelerando)?
Ou está reduzindo (freando)?

Derivadas de Ordem Superior (3.5)

- Velocidade vs. Aceleração
  - A distância em pés percorrida por um veículo após t segundos é de

$$s = f(t) = -t^3 + 8t^2 + 20t \qquad\qquad (0 \leq t \leq 6)$$

  - Calcule $f(t)$ de décimo em décimo entre 2 e 3 segundos
  - Algo chama sua atenção?

Derivadas de Ordem Superior (3.5)

t	$f(t) = -t^3 + 8t^2 + 20t$		$f(t_1) - f(t_0)$
...	...		...
2	64	↑	3,979
2,1	68,019	↑	4,019
2,2	72,072	↑	4,053
2,3	76,153	↑	4,081
2,4	80,256	↑	4,103
2,5	84,375	↑	4,119
2,6	88,504	↑	4,129
2,7	92,637	↑	4,133
2,8	96,768	↓	4,131
2,9	100,891	↓	4,123
3	105	↓	4,109
...	...		...

Derivadas de Ordem Superior (3.5)

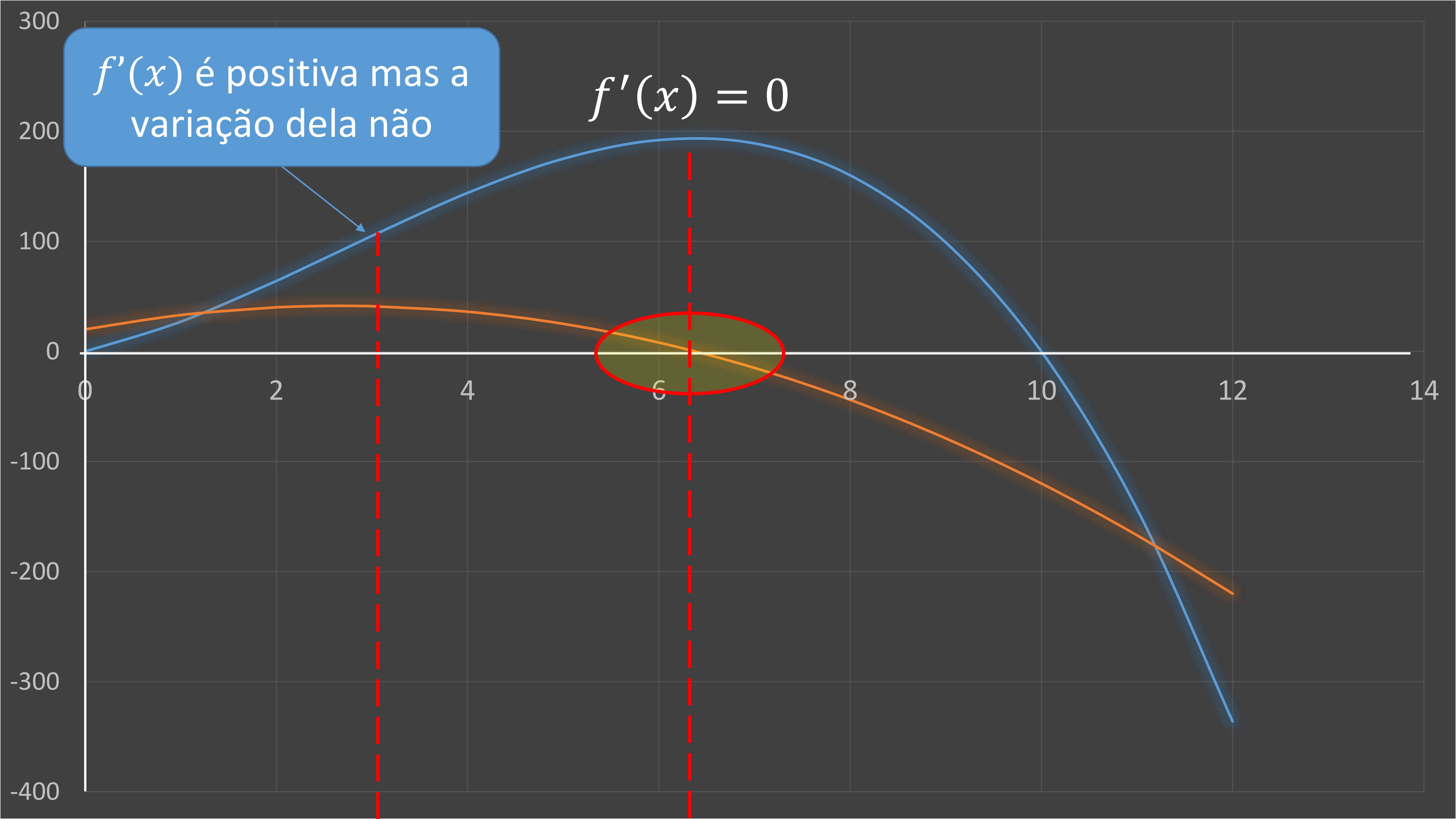
- Velocidade vs. Aceleração
  - A distância em pés percorrida por um veículo após t segundos é de

$$s = -t^3 + 8t^2 + 20t \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

  - Encontre a expressão que representa a velocidade instantânea em cada ponto do domínio...
  - O que acontece a partir de $\approx 2{,}7$ segundos?

Derivadas de Ordem Superior (3.5)

t	$f'(t) = -3t^2 + 16t + 20$	$f'(t_1) - f'(t_0)$
...	...	...
2	40	0,43
2,1	40,37	0,37
2,2	40,68	0,31
2,3	40,93	0,25
2,4	41,12	0,19
2,5	41,25	0,13
2,6	41,32	0,07
2,7	41,33	0,01
2,8	41,28	-0,05
2,9	41,17	-0,11
3	41	-0,17
...	...	...



$f'(x)$ é positiva mas a variação dela não
$f'(x) = 0$
300
200
100
0
-100
-200
-300
-400
0
2
4
6
8
10
12
14

Derivadas de Ordem Superior (3.5)

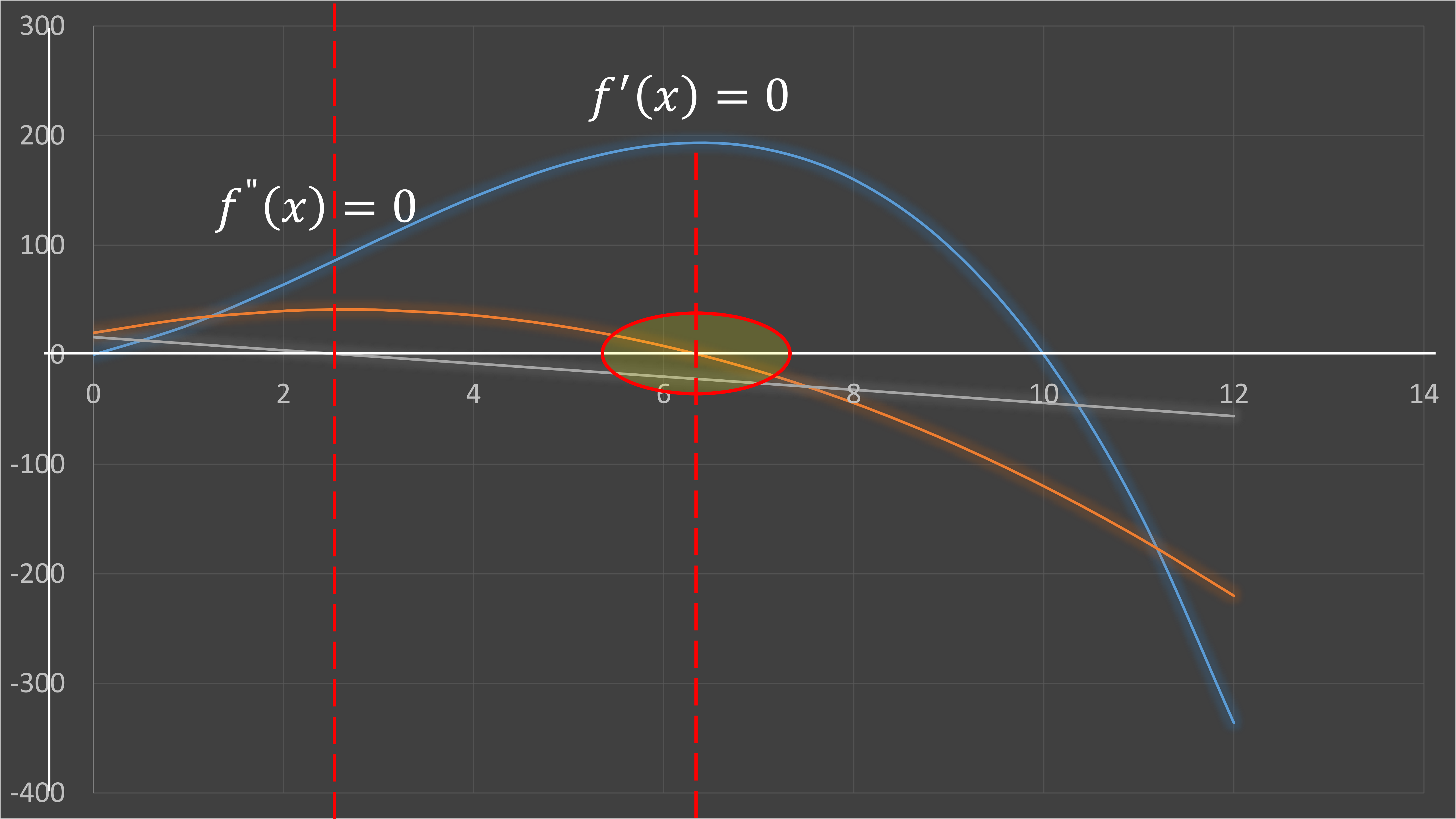
- Velocidade vs. Aceleração
  - A distância em pés percorrida por um veículo após t segundos é de

$$s = -t^3 + 8t^2 + 20t \qquad (0 \leq t \leq 6)$$

  - Encontre a expressão que representa a aceleração do veículo
  - O que acontece a partir de $\approx 2{,}7$ segundos?

Derivadas de Ordem Superior (3.5)

$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{f''(t) = -6t + 16}$
…	…
2	4
2,1	3,4
2,2	2,8
2,3	2,2
2,4	1,6
2,5	1
2,6	0,4
2,7	-0,2
2,8	-0,8
2,9	-1,4
3	-2
…	…


$f'(x) = 0$
$f''(x) = 0$
300
200
100
0
-100
-200
-300
-400
0
2
4
6
8
10
12
14

Aplicações da 1ª Derivada (4.1)

- A inclinação da reta tangente informa se a variação em x é positiva ou negativa
  - Lembrem do coeficiente angular das funções de 1º grau
  - Formalmente, o sinal da primeira derivada indica se a função é **crescente** ou **decrescente** em x

- Função estritamente crescente em seu domínio
  - $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- Função crescente em seu domínio
  - $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

Aplicações da 1ª Derivada (4.1)

- A inclinação da reta tangente informa se a variação em x é positiva ou negativa
  - Lembrem do coeficiente angular das funções de 1º grau
  - Formalmente, o sinal da primeira derivada indica se a função é **crescente** ou **decrescente** em x

- Função estritamente decrescente em seu domínio
  - $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Função decrescente em seu domínio
  - $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

Aplicações da 1ª Derivada (4.1)

- Teorema
  - Se $f'(x) > 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é crescente em(a, b)
  - Se $f'(x) < 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é decrescente em(a, b)
  - Se $f'(x) = 0$ com qualquer valor de x em (a, b), então f é constante em(a, b)

- Exemplo
  - Encontre os intervalos nos quais $f(x) = x^2 - 4x + 3$ é crescente e os intervalos nos quais é decrescente
  - Encontre os intervalos nos quais $f(x) = x^3$ é crescente e os intervalos nos quais é decrescente

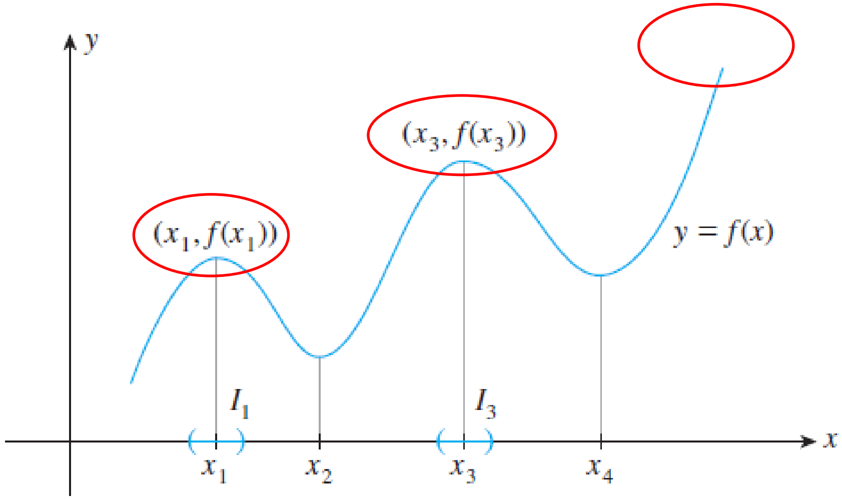
Aplicações da 1ª Derivada (4.1)

- Procedimento para identificar onde a função é crescente ou decrescente
  - Ache todos os pontos onde $\boldsymbol{f'(x) = 0}$ **ou** $\boldsymbol{f'}$ **é descontínua**
    - **Lembre-se** $\boldsymbol{f'(a) = \lim_{x \to a} f(x)}$
  - Identifique os intervalos formados por estes pontos
  - Teste um valor de x para este intervalo, determinando o sinal do $f'(x_{teste})$
    - Se $f'(x) > 0$, f é crescente
    - Se $f'(x) < 0$, f é decrescente

Aplicações da 1ª Derivada (4.1)

- Exemplo
  - $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$
  - $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Aplicações da 1ª Derivada (4.1)



- Extremos relativos (vales e picos em um gráfico)
  - **Máximo relativo**
    - Considere um intervalo (a, b) ...
    - f tem um máximo relativo em um ponto deste intervalo (por exemplo $x = c$) se $f(x) \leq f(c)\ \forall\ x\ em\ (a, b)$
  - Ou seja, $f(c)$ é o maior valor deste intervalo
  - Obviamente, o oposto é verdadeiro para os **Mínimos Relativos**
  - E por que relativos?
    - Porque levam em conta a "vizinhança"

Aplicações da 1ª Derivada (4.1)

- **Conceito de ponto crítico**
  - Qualquer x do domínio onde $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe

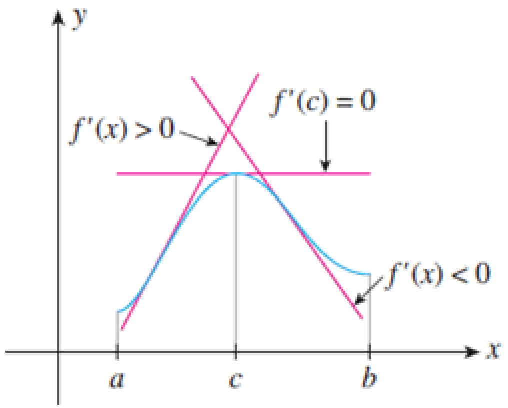
---

Pontos Críticos

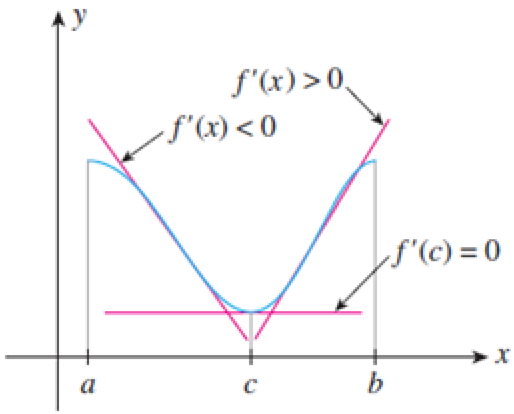
- $f'(x) = 0$
- $f'(x) = \nexists$
  - Descontinuidade → $\boldsymbol{f'(a) \neq \lim_{x \to a} f(x)}$
  - Bico
  - Reta Tangente Vertical

Aplicações da 1ª Derivada (4.1)

- **Conceito de ponto crítico**
  - Qualquer x do domínio onde $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe
- Sinal de $f'(x)$ - observe as figuras



Máximo Relativo

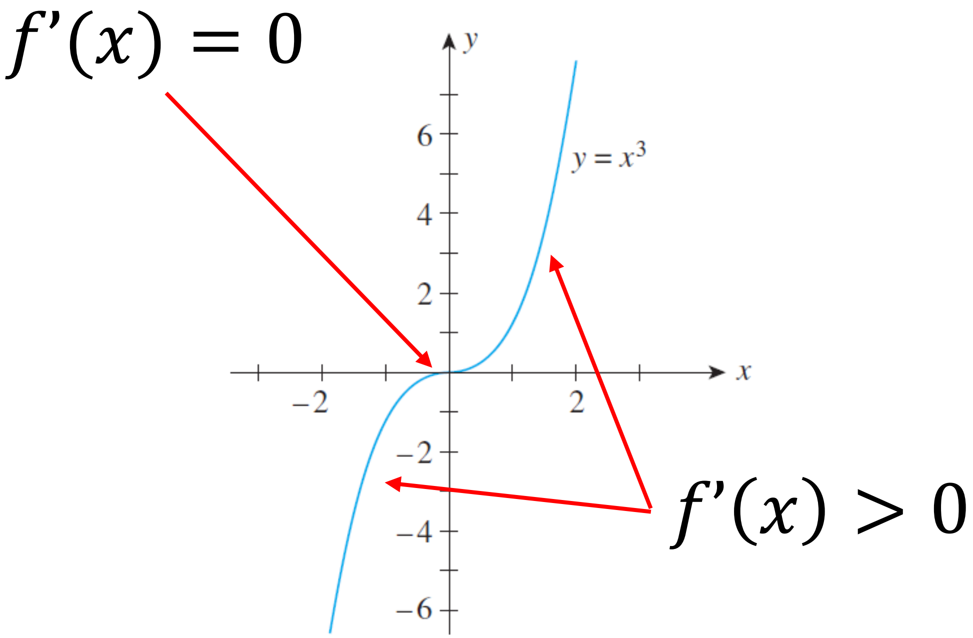


Mínimo Relativo

- Nesses casos a inclinação da reta tangente muda quando se passa por $x = c$
- Podemos ter extremos relativos de uma função diferenciável quando $f'(c) = 0$
- **Cuidado... "podemos ter"**:
  - Pode ser que a função passe por um ponto onde $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe e...
  - O SINAL NÃO MUDE!!!!!!!!

Aplicações da 1ª Derivada (4.1)

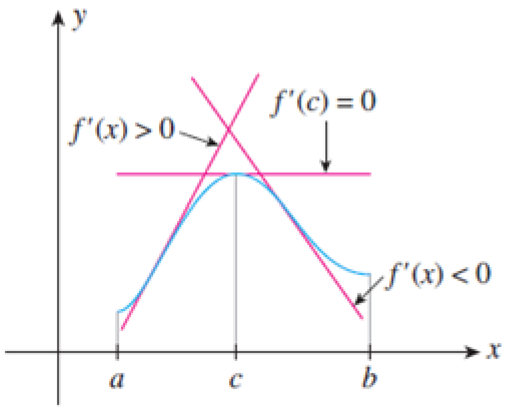
- **Conceito de ponto crítico**
  - Qualquer x do domínio onde $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe
- Observe as figuras



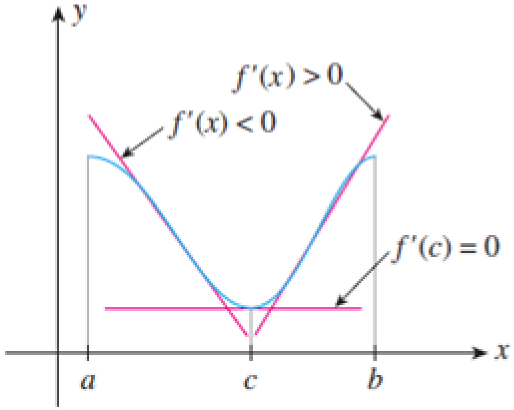
- Nesses casos a inclinação da reta tangente muda quando se passa por $x = c$
- Podemos ter extremos relativos de uma função diferenciável quando $f'(c) = 0$
- **Cuidado... "podemos ter"**:
  - Pode ser que a função passe por um ponto onde $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe e...
  - O SINAL NÃO MUDE!!!!!!!!

Aplicações da 1ª Derivada (4.1)

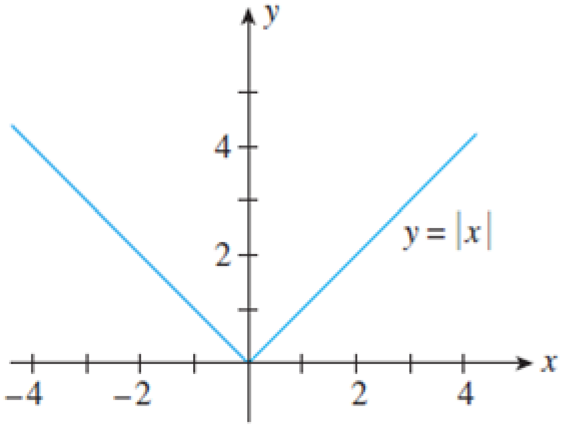
- **Conceito de ponto crítico**
  - Qualquer x do domínio onde $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe
- Observe as figuras



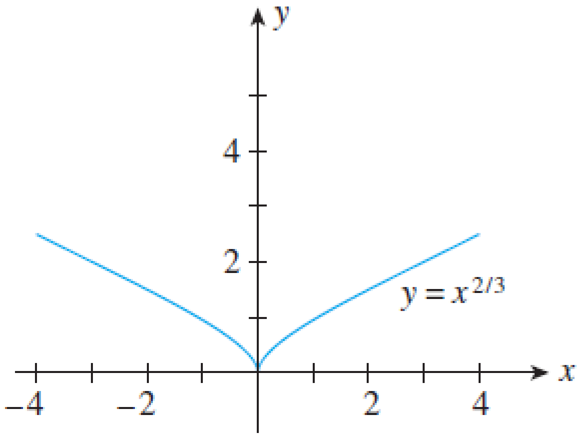
Máximo Relativo



Mínimo Relativo



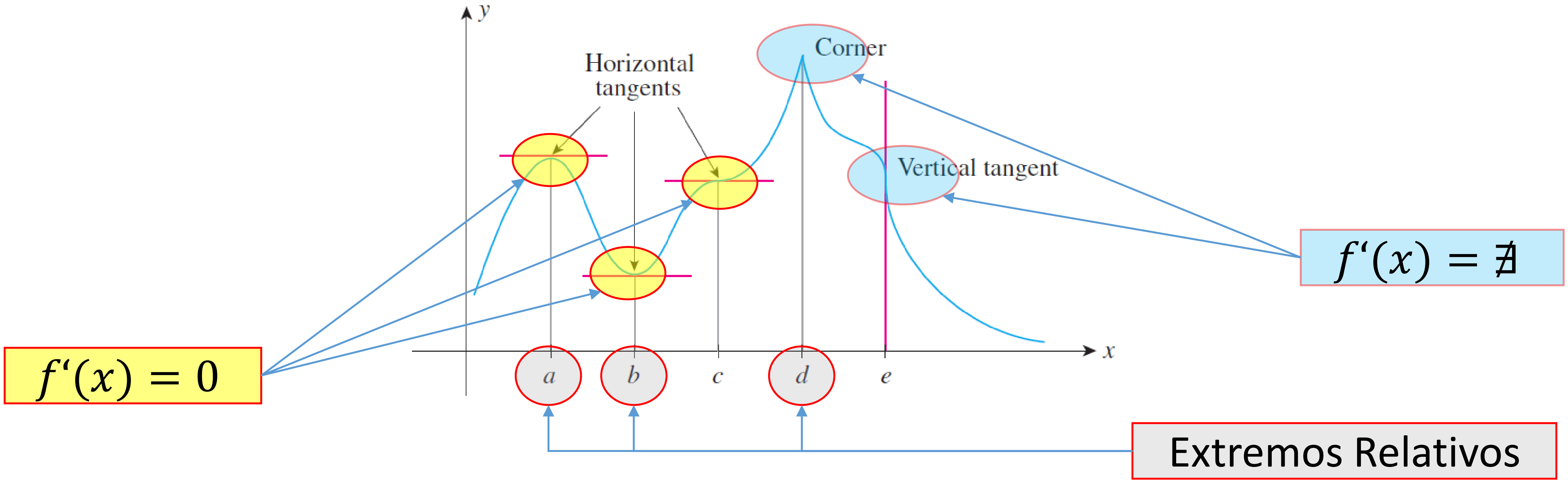
$f'(x) = \nexists$



$f'(x) = \nexists$

Aplicações da 1ª Derivada (4.1)

- **Conceito de ponto crítico**
  - Um ponto crítico de uma função f é qualquer ponto x do domínio onde $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe



Aplicações da 1ª Derivada (4.1)

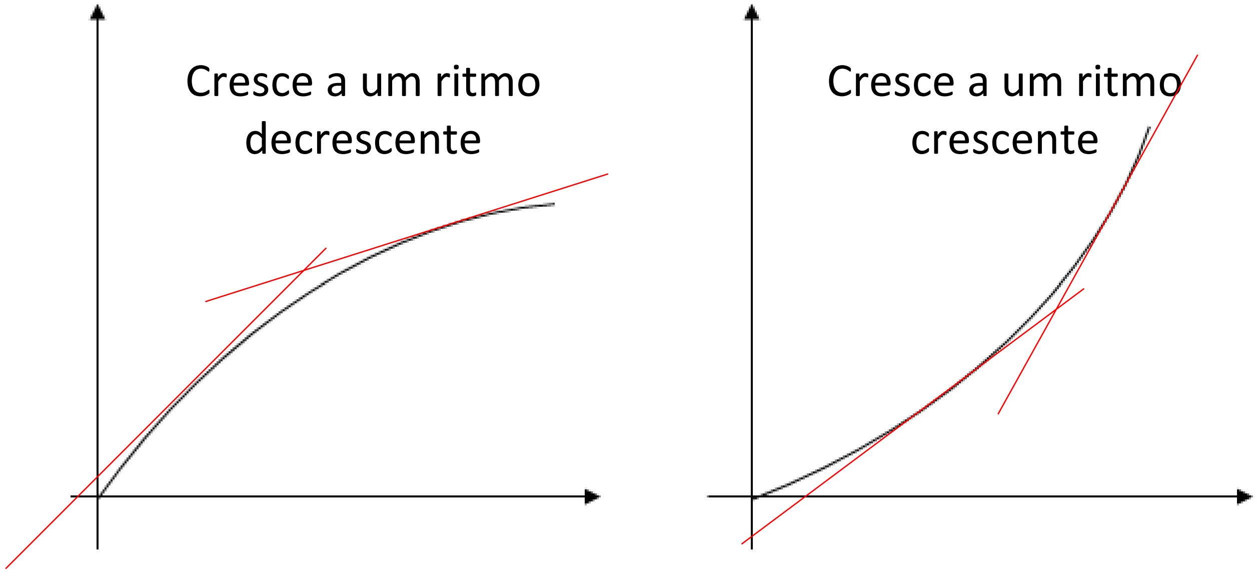
- Teste da Primeira Derivada
  - Determinar os pontos críticos de f
    - $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ não existe
  - Determine o sinal de f à esquerda e à direita de cada ponto crítico **(até aqui... sem novidades!)**
    - Máximo Relativo - $f'(x)$ muda de $+$ para – ao atravessar o $x_{crítico}$
    - Mínimo Relativo - $f'(x)$ muda de $-$ para $+$ ao atravessar o $x_{crítico}$
    - Se $f'(x)$ não muda de sinal, o ponto crítico não é um extremo relativo

Aplicações da 1ª Derivada (4.1)

- Esboce os gráficos e indique os pontos críticos
  - $f(x) = x^2 + 3x + 8$
  - $h(t) = -t^2 + 6t + 6$
  - $f(x) = \frac{x+1}{x}$
  - $g(x) = x\sqrt{x-4}$
  - $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + 4x - 8$
  - $f(x) = 3x^5 - 20x^3 + 20$

Aplicações da 2ª Derivada (4.2)

- Observe as figuras



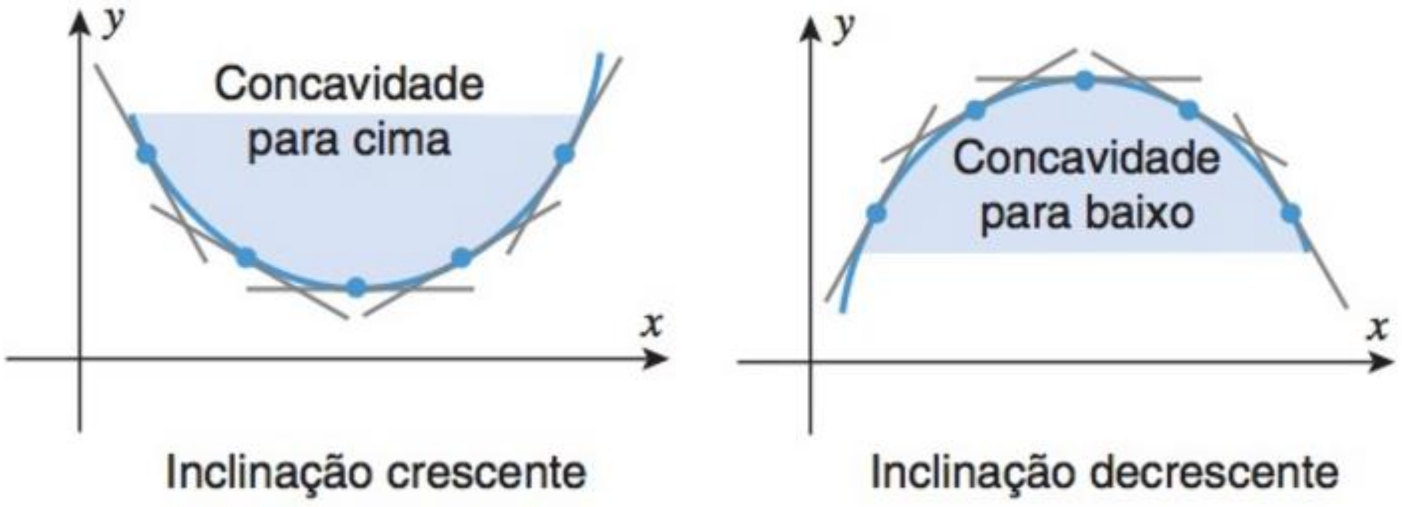
- Em ambos os caso temos $f'(x) > 0$
- Em ambos os casos, a função é crescente no intervalo $(0, \infty)$

- Agora imagine que estes gráficos se refiram a dois veículos em movimento $(S\ x\ t)$...
- Qual deles está acelerando? Por que?

- Aqui o conceito de concavidade pode ser útil...

Aplicações da 2ª Derivada (4.2)

- Em um intervalo aberto...
  - f é côncava para cima se a inclinação das retas tangentes ao gráfico de f estão aumentando com x (e vice-versa)
  - Nesse caso, o gráfico está sempre acima de suas retas tangentes no intervalo (e vice versa)



Aplicações da 2ª Derivada (4.2)

- **Atenção...**
  - Da mesma forma que o sinal de f' indica que f é crescente...
  - O sinal de f'' indica se f' é crescente
- O que importa é... **se f for duas vezes diferenciável** em um intervalo aberto, segue o teorema
  a. Se $f''(x) > 0$ em qualquer x do intervalo, então f é côncava para cima nesse intervalo
  b. Se $f''(x) < 0$ em qualquer x do intervalo, então f é côncava para baixo nesse intervalo
  c. E se $f''(x) = 0$?

Aplicações da 2ª Derivada (4.2)

- Como encontrar pontos de inflexão?
  - Calcule $f''(x)$
  - Determine os pontos **do domínio** de f para os quais $\boldsymbol{f''(x) = 0}$ **ou** $\boldsymbol{f''(x)}$ **não existe**
  - Para cada $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ não definido, teste um $f''(a)$ à esquerda e um $f''(b)$ à direita
    - Haverá um ponto de inflexão se houver mudança de sinal quando se "atravessa" o(s) $f''(x) = 0$ ou $f''(x)$ não definido
    - Serão **CANDIDATOS** a ponto de inflexão (**mudança de sinal)**
  - **E em funções descontínuas?**

Aplicações da 2ª Derivada (4.2)

- Exemplos
  - $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$
  - $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Aplicações da 2ª Derivada (4.2)

- Como encontrar pontos de inflexão?
- Exemplos
  - $f(x) = (x-1)^{\frac{5}{3}}$
  - $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$

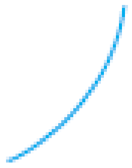
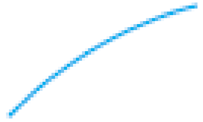
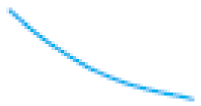
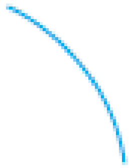
Relembrando...

- Como acho extremos relativos de uma função?
  - O que são extremos relativos?
- E pontos de inflexão?
  - O que é um ponto de inflexão?

Fixando conceitos...

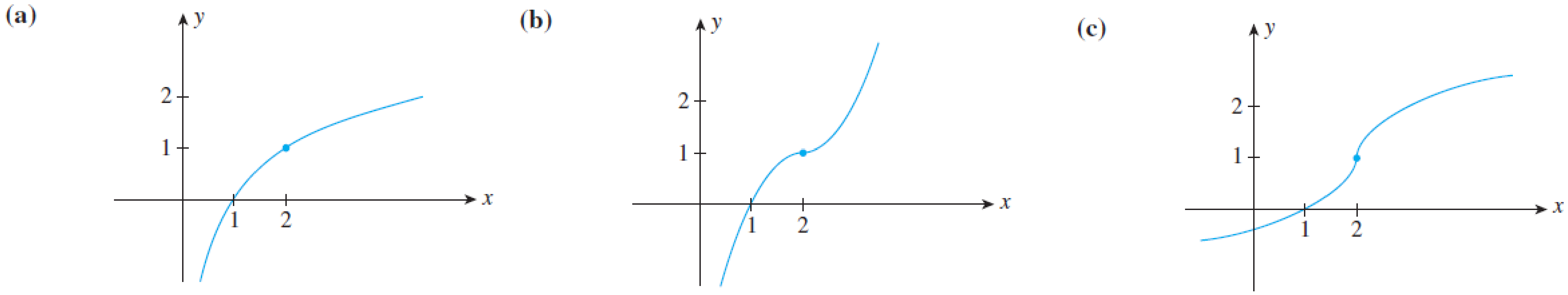
- Exercício: esboce o gráfico de uma função com as seguintes propriedades
  - $f(2) = 4, f'(2) = 0, f''(x) < 0 \; em \; (-\infty, \infty)$
  - $f(-2) = 4, f(3) = -2, f'(-2) = 0, \; f'(3) = 0, \; f'(x) > 0 \; em \; (-\infty, -2) \; e \; (3, \infty),$ $f'(x) < 0 \; em \; (-2, 3) \; e \; o \; ponto \; de \; inflexão$ é $(1,1)$
  - $f(0) = 0, f'(0) = \nexists, f''(x) < 0 \; se \; x \neq 0$

Um resumo...

Signs of f' and f''	Properties of f	General Shape of the Graph of f
$f'(x) > 0$ $f''(x) > 0$	f is increasing. The graph of f is concave upward.	
$f'(x) > 0$ $f''(x) < 0$	f is increasing. The graph of f is concave downward.	
$f'(x) < 0$ $f''(x) > 0$	f is decreasing. The graph of f is concave upward.	
$f'(x) < 0$ $f''(x) < 0$	f is decreasing. The graph of f is concave downward.	

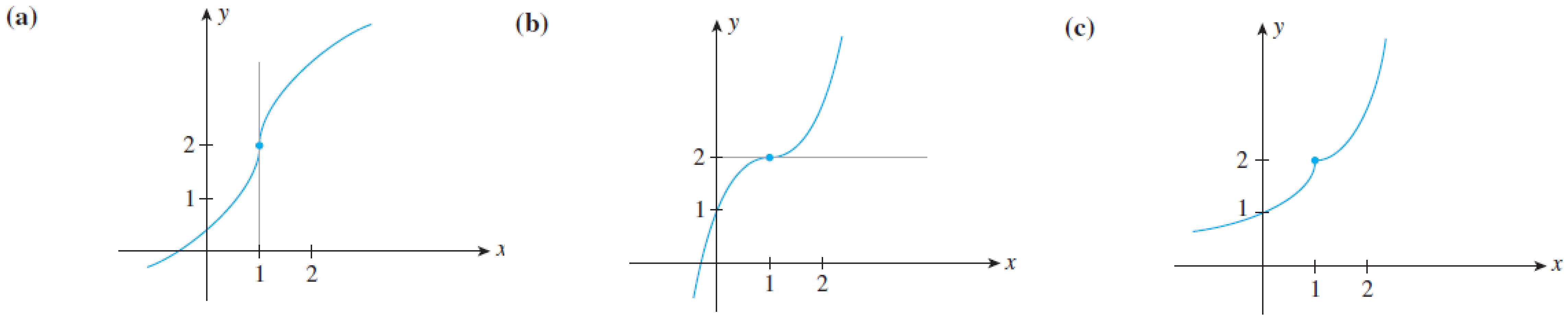
Aplicações da 2ª Derivada (4.2)

- Exercício: $f(2) = 1, f'(2) > 0, f''(2) < 0$



Aplicações da 2ª Derivada (4.2)

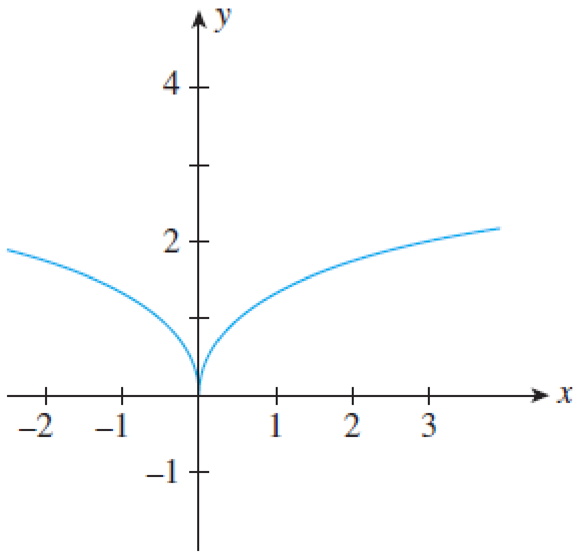
- Exercício: $f(1) = 2$, $f'(x) > 0$ em $(-\infty, 1)$ e $(1, \infty)$ e $f''(1) = 0$



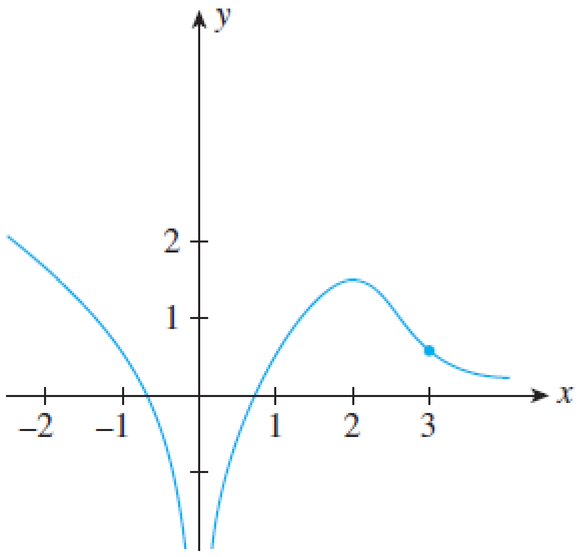
Aplicações da 2ª Derivada (4.2)

- Exercício: $f'(0)$ está indefinida, f é decrescente em $(-\infty, 0)$, é côncavo para baixo em $(0,3)$ e tem um ponto de inflexão em $x = 3$

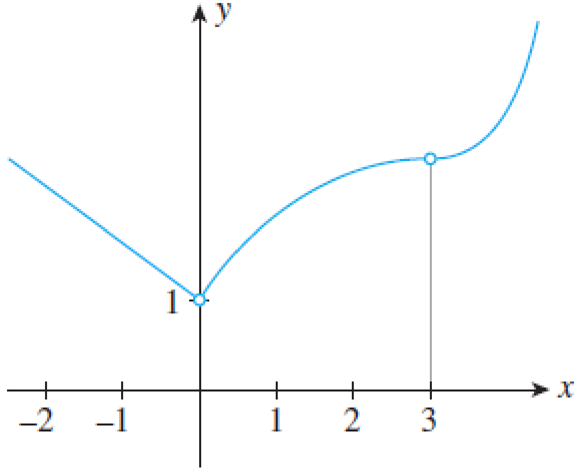
(a)



(b)



(c)



Esboçando Curvas

- Assíntotas verticais
  - Tipicamente presentes em funções racionais do tipo $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
    - No caso, P e Q são funções polinomiais
    - $x = a$ será uma AV se $Q(a) = 0$, mas $P(a) \neq 0$
  - Apesar de não fazerem parte do gráfico, elas são úteis para seu esboço
  - Ocorrem se $f(x)$ tende a $\pm\infty$ quando x se aproxima de determinado valor
  - Por exemplo, $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Esboçando Curvas

- Assíntotas horizontais
  - Verifique o que acontece com $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ quando $x \to \pm\infty$
  - Para Achar uma AH, caso ela exista, é necessário analisar o comportamento final da função
  - Uma linha $y = b$ é uma AH do gráfico de uma função caso
    - $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ ou $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$

Esboçando Curvas

- Encontre assíntotas... Se houver!
  - $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$
  - $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$
  - $g(t) = t^3 + t^2 + 1$

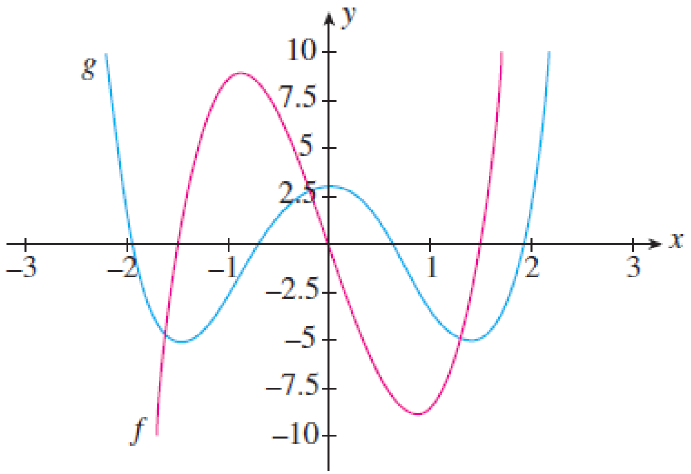
Esboçando Curvas (pg. 295)

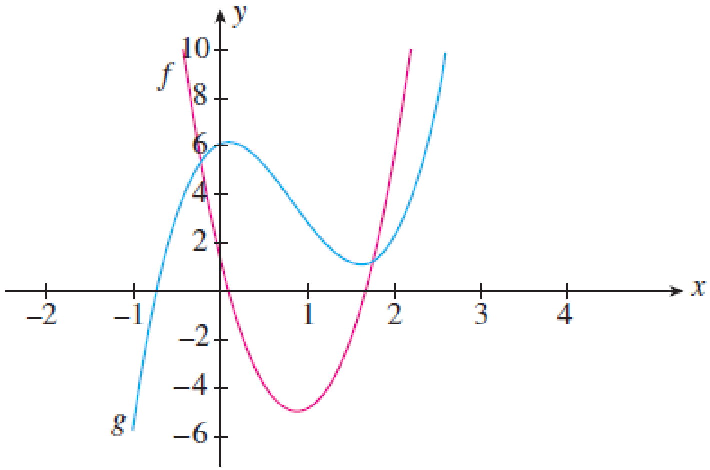
- Um guia para esboçar curvas:
    1. Determine o domínio de f
    2. Tente identificar interceptos em ambos os eixos
    3. Verifique o comportamento de f para grandes valores de x (**limite no infinito**)
    4. Verifique se há assíntotas verticais **(limites infinitos em algum x)**
    5. Determine os intervalos onde f é crescente/decrescente (**1ª derivada**)
    6. Localize os extremos relativos (**TPD**)
    7. Determine a concavidade (**2ª derivada**)
    8. Encontre os pontos de inflexão (**2ª derivada**)
    9. Ache alguns pontos adicionais e esboce o gráfico

Esboçando Curvas

- Exemplo: esboce o gráfico de...
  - $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 32$
  - $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

- Exercícios: nos gráficos abaixo indique e justifique qual função é derivada da outra





Esboçando Curvas

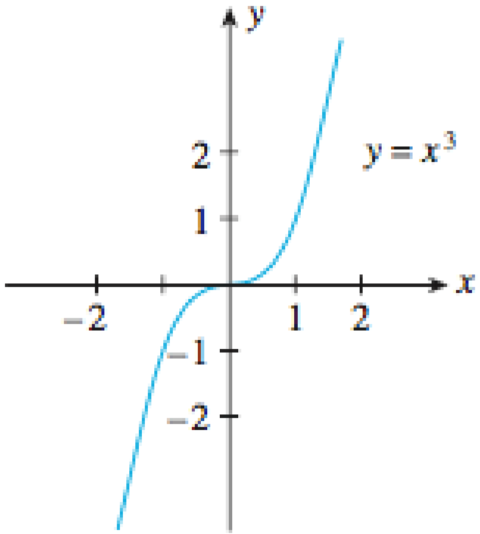
- Exercícios: esboce o gráfico
  - $f(t) = 3t^4 + 4t^3$
  - $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Otimização

- Já discutimos o papel dos extremos relativos da função
- Vejamos agora o que chamamos de **extremos absolutos**
  - Se $f(x) \leq f(c)$ $\forall x$ no domínio de f, então $f(c)$ é chamado valor **máximo absoluto** de f
  - E vice-versa
- Muitas aplicações reais se baseiam nesse conceito

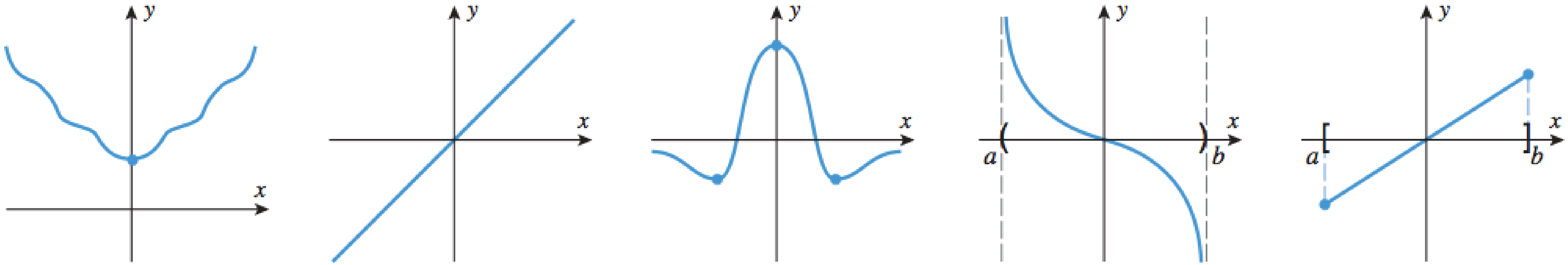
Otimização

- Uma função pode não ter extremos absolutos



- **Mas** se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f tem tanto um máximo e um mínimo absolutos em $[a, b]$
- **Teorema do Valor Extremo**

Otimização



(a) f tem um mínimo absoluto, mas não um máximo absoluto em $(-\infty, +\infty)$

(b) f não tem extremos absolutos em $(-\infty, +\infty)$

(c) f tem um máximo e um mínimo absolutos em $(-\infty, +\infty)$

(d) f não tem extremos absolutos em (a,b)

(e) f tem um mínimo e um máximo absolutos em $[a, b]$

Otimização

- Procedimento para encontrar extremos absolutos de f em um intervalo fechado
  - Passo 1 - encontre os pontos críticos de f em (a, b)
  - Passo 2 - encontre o valor de f em todos os pontos críticos e nas extremidades $a \; e \; b$
  - Passo 3 - o maior entre os valores do Passo 2 é o valor máximo absoluto de f em $[a, b]$, e o menor valor é o mínimo absoluto

- Exemplos
  - $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ no intervalo $[-2,1]$
  - $f\ (x) = 4x + \frac{1}{\mathrm{x}}$ no intervalo $[1,4]$

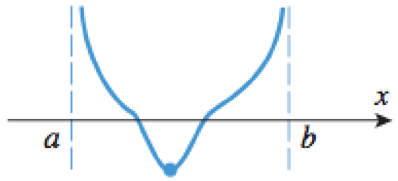
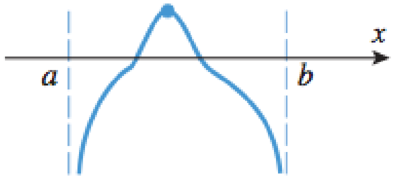
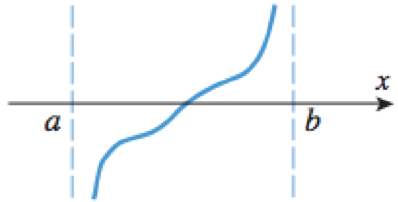
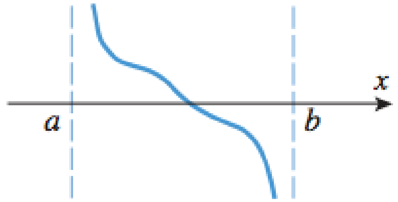
Otimização

- Procedimento para encontrar extremos absolutos de f em um intervalo fechado
  - Passo 1 - encontre os pontos críticos de f em (a, b)
  - Passo 2 - encontre o valor de f em todos os pontos críticos e nas extremidades $a\ e\ b$
  - Passo 3 - o maior entre os valores do Passo 2 é o valor máximo absoluto de f em $[a, b]$, e o menor valor é o mínimo absoluto

- Exemplos
  - $f(x) = 3x^4 + 4x^3$ no intervalo $[-2,1]$
  - $f\ (x) = 4x + \frac{1}{\mathrm{x}}$ no intervalo $[1,4]$

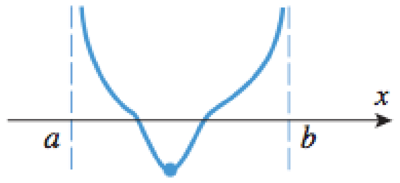
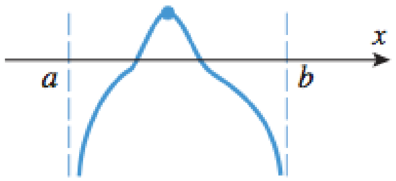
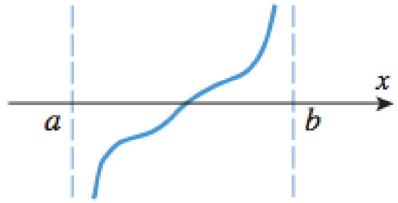
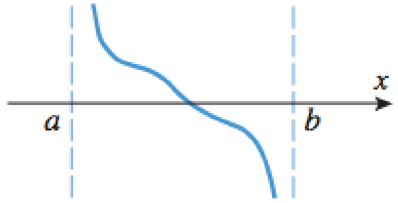
Otimização

- Extremos absolutos em intervalos **ABERTOS** – (a, b)
  - Comportamento similar a $(-\infty, \infty)$
  - Uma função contínua pode ou não ter extremos absolutos em um intervalo aberto
  - Porém, certas conclusões podem ser tiradas do comportamento de $f(x)$ quando $x \to a^+$ e $x \to b^-$, ou em intervalos do tipo (a, ∞), $(-\infty, b)$

LIMITES	$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em (a, b)	f tem um máximo absoluto mas nenhum mínimo absoluto em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)
GRÁFICO				

Otimização

- Extremos absolutos em intervalos **ABERTOS** – (a, b)
  - Exemplo: determine se $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ tem algum extremo absoluto em $(0,1)$
  - Dica: verifique o domínio...

LIMITES	$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \to b^-} f(x) = -\infty$
CONCLUSÕES SE f FOR CONTÍNUA EM (a, b)	f tem um mínimo absoluto, mas nenhum máximo absoluto em (a, b)	f tem um máximo absoluto mas nenhum mínimo absoluto em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)	f não tem nem máximo, nem mínimo absolutos em (a, b)
GRÁFICO				

Otimização

- Uma corretora dispõe de 100 apartamentos de dois quartos para alugar. O lucro mensal obtido com o aluguel é dado por
  - $P(x) = -10x^2 + 1.760x - 50.000$
- Quantas unidades devem ser alugadas a fim de maximizar o lucro mensal? Qual é o máximo lucro mensal possível??

- A velocidade média de um veículo em um trecho urbano entre 06:00 e 10:00 em um dia útil é aproximada pela função...
  - $f(t) = 20t - 40\sqrt{t} + 50 \quad (0 \leq t \leq 4)$
- Em que horário da manhã o tráfego fica mais lento? Qual a velocidade média de um veículo nesse momento?

Otimização

- O preço de demanda de uma gravadora de CD's é dada por
  - $p = -0{,}00042x + 6 \quad (0 \le x \le 12.000)$
- O custo mensal total para a prensagem e embalagem de x cópias é dada por
  - $C(x) = 600 + 2x - 0{,}00002x^2 \quad (0 \le x \le 20.000)$
- Qual o nível de produção que maximiza o lucro?

- O custo mensal total incorridos por certa empresa para fabricar seu principal produto é dado por $C(x) = 0{,}0025x^2 + 80x + 10.000$
  a. Encontre a função de custo médio
  b. Encontre o nível de produção que resulta no menor custo médio de produção
  c. Encontre o nível de produção para o qual o custo médio é igual ao custo marginal
  d. Compare o resultado de c e b