

ANÁLISE DE VARIÂNCIA DOIS FATORES

MODELO COM INTERAÇÃO

Celma de Oliveira Ribeiro/ Linda Lee Ho

1

Objetivo: analisar tempo em segundos dos corredores que terminaram uma maratona. Os tempos listados foram selecionados aleatoriamente

Tempo (s) para corredores da Maratona NY

		Idade		
		21-29	30-39	40 ou mais
Sexo	Masculino	13615	14677	14528
		18784	16090	17034
		14256	14086	14935
		10905	16460	14996
		12077	20808	22146
	Feminino	16401	15357	17260
		14216	16771	25399
		15402	15036	18647
		15326	16297	15077
		12047	17636	25898

Devemos analisar se há interação entre os fatores, isto é, se o efeito de um fator muda para diferentes categorias de outro fator.

Considera-se três fatores possíveis:

- a) Efeitos da interação entre idade e sexo
- b) Efeitos do sexo
- c) Efeitos da idade

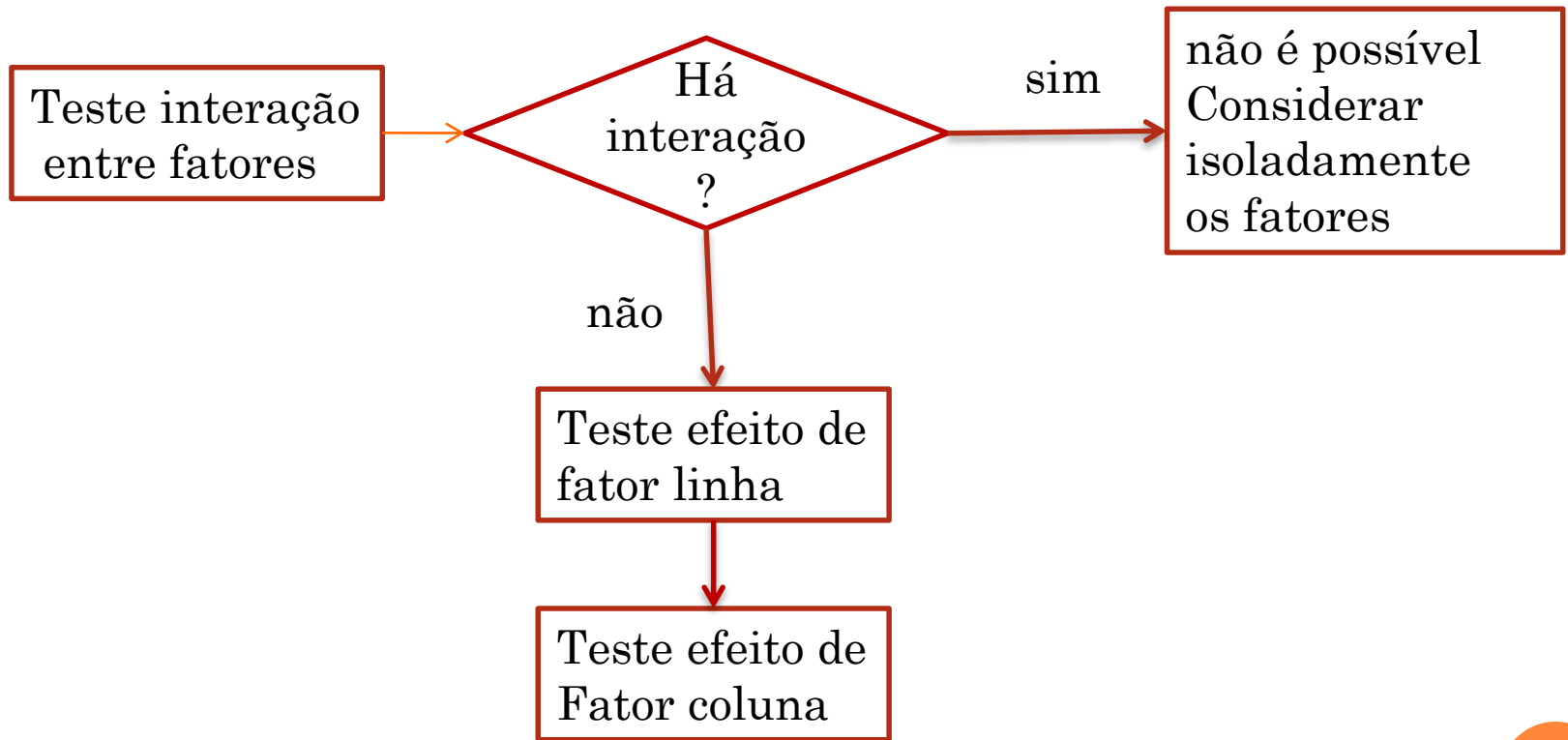
- Exemplo de venda de lojas admitindo a possibilidade de existência de interação entre o fator Loja e o fator Empregado.

Considere apenas três empregados para facilitar os cálculos

	Loja		
	L1	L2	L3
Funcionario A	53	53	52
	52	56	56
	54	56	54
Funcionario B	41	48	48
	46	51	48
	45	51	45
Funcionario C	51	54	48
	54	56	51
	54	52	48

- **Hipóteses :**
 - normalidade,
 - igualdade de variâncias,
 - independência entre as observações

- Ideia do teste



Fatores de interesse: A e B

- I = número de níveis do fator A
- J = número de níveis do fator B
- n = número de réplicas (valores) em cada célula
- $N = IJn$ = número de valores em todo o experimento
- X_{ijk} = valor da k -ésima observação para o nível i do fator A e o nível j do fator B

ANOVA DOIS FATORES

$$SQT = SQA + SQB + SQAB + SQR$$

Graus de liberdade

SQT =
Variação Total

N-1 g.l

SQA = Variação
Fator A

I-1

SQB = Variação
fator B

J-1

SQB = Variação
decorrente da interação
entre A e B

(I-1)(J-1)

SQR = Variação
residual (aleatória)

IJ(n-1)

○ Caso geral:

	B1	B2	BJ	
A1	x111 x112... x11n	x121 x122... x12n	x1J1 x1J2... x1Jn	$\bar{x}_{1..}$
A2	x211 x212... x21n	x221 x222... x22n		x2J1 x2J2... x2Jn	$\bar{x}_{2..}$
AI	xI11 xI12... xI1n	xI21 xI22... xI2n		XIJ1 xIJ2... XIJn	$\bar{x}_{I..}$
	$\bar{x}_{..1}$	$\bar{x}_{..2}$		$\bar{x}_{..J}$	

$$\bar{x}_{i..} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^J x_{ijk}}{J \times n}$$

$$\bar{x}_{ij.} = \frac{\sum_{k=1}^n x_{ijk}}{n}$$

$$\bar{x}_{.j.} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^I x_{ijk}}{I \times n}$$

$$\bar{x}_{...} = \frac{\sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J x_{ijk}}{IJn}$$

EQUAÇÕES

$$SQT = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{\dots})^2$$
$$gl = I \times J - 1$$

$$SQA = n \times J \times \sum_{i=1}^I (\bar{x}_{i..} - \bar{x}_{\dots})^2$$
$$gl = I - 1$$

$$SQB = n \times I \times \sum_{j=1}^J (x_{.j.} - \bar{x}_{\dots})^2$$
$$gl = J - 1$$

$$SQAB = n \times \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J (\bar{x}_{ij.} - \bar{x}_{i..} - \bar{x}_{.j.} + \bar{x}_{\dots})^2$$
$$gl = (I - 1) \times (J - 1)$$

$$SQR = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^n (x_{ijk} - \bar{x}_{ij.})^2$$
$$gl = I \times J \times (n - 1)$$

$$SQT = SQA + SQB + SQAB + SQR$$

○ Tabela da ANOVA

Fonte de variação	Soma de quadrados	graus de liberdade	Média dos quadrados	F
Fator A	SQA	I-1	$QMA = SQA / (I-1)$	QMA/QME
Fator B	SQB	J-1	$QMB = SQB / (J-1)$	QMB/QME
AB (interação)	SQAB	$(I-1)(J-1)$	$QMAB = SQAB / [(I-1)(J-1)]$	QMAB/QME
Residual (erro)	SQE	$IJ(n-1)$	$QME = SQE / [IJ(n-1)]$	
Total	SQT	N-1		

- Da mesma forma que no caso de um fator

Hipótese	Valor da estatística do teste	Rejeição
H_{0A} versus H_{1A}	$f_A = \frac{QMA}{QME}$	$f_A > F_{\alpha, I-1, I \times J \times (n-1)}$
H_{0B} versus H_{1B}	$f_B = \frac{QMB}{QME}$	$f_B > F_{\alpha, J-1, I \times J \times (n-1)}$
H_{0AB} versus H_{1AB}	$f_C = \frac{QMAB}{QME}$	$f_{AB} > F_{\alpha, (I-1) \times (J-1), I \times J \times (n-1)}$

- Cálculos parciais lojas (MÉDIAS)

	Médias			
	L1	L2	L3	
Funcionario A	53	55	54	54
Funcionario B	44	50	47	47
Funcionario C	53	54	49	52
	50	53	50	51

- SQR (residual)

$(x_{ijk} - \bar{x}_{ij\bullet})^2$			
0, 1, 1	4, 1, 1	4, 4, 0	
9, 4, 1	4, 1, 1	1, 1, 4	
4, 1, 1	0, 4, 4	1, 4, 1	Total
			62

- Para o exercício das lojas

ANOVA

<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Amostra	234	2	117	33,96774	7,76E-07	3,554557
Colunas	54	2	27	7,83871	0,00356	3,554557
Interações	48	4	12	3,483871	0,028288	2,927744
Dentro	62	18	3,444444			
Total	398	26				

Há efeito da interação

Assim para exercício da maratona

ANOVA						
<i>Fonte da variação</i>	<i>SQ</i>	<i>gl</i>	<i>MQ</i>	<i>F</i>	<i>valor-P</i>	<i>F crítico</i>
Amostra	15225413	1	15225413	1,686377	0,206419	4,259677
Colunas	92086979	2	46043490	5,099807	0,014265	3,402826
Interações	21042069	2	10521034	1,165317	0,328851	3,402826
Dentro	2,17E+08	24	9028477			
Total	3,45E+08	29				

Não há evidência de que sexo afeta tempo

Não há evidências de interação

- O modelo analisa: $x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \tau_{ij} + \varepsilon_{ij}$
- As hipóteses sendo testadas são:

$$H_{0A} : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_I = 0$$

$$H_{0B} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_J = 0$$

$$H_{1A} : \exists i : \alpha_i \neq 0$$

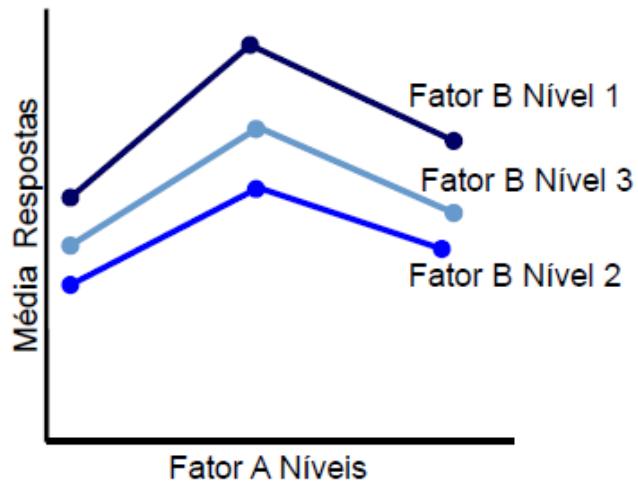
$$H_{1B} : \exists i : \beta_i \neq 0$$

$$H_{0AB} : \tau_{ij} = 0 \quad \forall i, j$$

$$H_{1AB} : \exists (i, j) : \tau_{ij} \neq 0$$

○ Graficamente

- Sem efeito de interação:



- Efeito interação presente:

