MAE0121 - Introdução à Probabilidade e Estatística II
Exercícios 7
Vanderlei da Costa Bueno

1. Lança-se uma moeda perfeita 3 vezes, e sejam:

   X = número de caras nos dois primeiros resultados.

   Y = número de caras no último resultado.

   S = número total de caras.

   Resposta

   a) Através da distribuição conjunta de (X,Y) verifique se X e Y são independentes. Qual a covariância entre elas?

Y,X	0	1	2	total
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
1	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
total	$\frac{2}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{2}{8}$	1

   Verifica-se que $P(X=x, Y=y) = P(X=x).P(Y=y)$ para todo par (x,y) e concluimos que X e Y são independentes com $Cov(X,Y)=0$.

   b) Para cada variável X, Y e S ache a esperança e a variância. $E[X] = 0.\frac{2}{8} + 1.\frac{4}{8} + 2.\frac{2}{8} = 1$

   $E[X^2] = 0.\frac{2}{8} + 1.\frac{4}{8} + 4.\frac{2}{8} = 1,5$

   Portanto $Var(X) = 0,5$.

   A variável Y tem distribuição de Bernoulli com probabilidade de sucesso $p = \frac{1}{2}$ e tem $E[Y] = \frac{1}{2}$ e $Var(Y) = \frac{1}{4}$.

   $E[S] = E[X+Y] = E[X] + E[Y] = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

   $Var(S) = Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) = 0,5 + 0,25 = 0,75$.

   c) Existe alguma relação entre os parâmetros encontrados em (b) ? Isso sempre se verifica? Porque?

   As relações são:

   A esperança da soma é a soma das esperanças.

   Se as variáveis são independentes a variância da soma é a soma das variâncias

2. Numa urna tem-se 4 tiras de papel numeradas 1, 3, 3 e 5. Uma tira de papel é sorteada, recolocada na urna, e uma segunda tira é sorteada. Sejam X_1 e X_2 respectivamente o primeiro e segundo número sorteado. Resposta:

   a) Determine a distribuição conjunta de X_1 e X_2.

$$(X_1, X_2) : (1,1); (1,3); (1,5); (3,1); (3,3); (3,5); (5,1) : (5,3); (5,5)$$

   $P(X_1, X_2) = (1,1)) = \frac{1}{16}$
   $P(X_1, X_2) = (1,3) = \frac{2}{16}$
   $P(X_1, X_2) = (1,5)) = \frac{1}{16}$
   $P(X_1, X_2) = (3,1)) = \frac{2}{16}$
   $P(X_1, X_2) = (3,3)) = \frac{4}{16}$
   $P(X_1, X_2) = (3,5)) = \frac{2}{16}$
   $P(X_1, X_2) = (5,1)) = \frac{1}{16}$

$P(X_1, X_2) = (5, 3)) = \frac{2}{16}$
$P(X_1, X_2) = (5, 5)) = \frac{1}{16}$

b) Ache as distribuições marginais de X_1 e X_2. Elas são independentes?
$P(X_1 = 1) = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16}$.
$P(X_1 = 3) = \frac{2}{16} + \frac{4}{16} + \frac{2}{16} = \frac{8}{16}$.
$P(X_1 = 5) = \frac{1}{16} + \frac{2}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16}$.
X_2 é identicamente distribuido a X_1.

c) Encontre a esperança e variância de X_1 , X_2.

$$E[X_1] = \frac{4}{16} + \frac{24}{16} + \frac{20}{16} == \frac{48}{16} = 3 = E[X_2].$$

$$E[X_1^2] = \frac{4}{16} + \frac{72}{16} + \frac{100}{16} == \frac{176}{16} = 11.$$

Portanto $Var(X_1) = 11 - 9 = 2 = Var(X_2)$.

d) Como seriam as suas respostas anteriores se em vez de uma tira de papel com cada número, tivessemos 1.000 tiras de papel com cada número?

As mesmas

3. Como seriam as respostas do problema anterior se a primeira tira de papel n ao é devolvida antes de a segunda ser sorteada? Resposta a) Determine a distribuição conjunta de X_1 e X_2.

$$(X_1, X_2) : (1, 1); (1, 3); (1, 5); (3, 1); (3, 3); (3, 5); (5, 1) : (5, 3); (5, 5)$$

$P(X_1, X_2) = (1, 1)) = 0$
$P(X_1, X_2) = (1, 3) = \frac{2}{12}$
$P(X_1, X_2) = (1, 5)) = \frac{1}{12}$
$P(X_1, X_2) = (3, 1)) = \frac{2}{12}$
$P(X_1, X_2) = (3, 3)) = \frac{2}{12}$
$P(X_1, X_2) = (3, 5)) = \frac{2}{12}$
$P(X_1, X_2) = (5, 1)) = \frac{1}{12}$
$P(X_1, X_2) = (5, 3)) = \frac{2}{12}$
$P(X_1, X_2) = (5, 5)) = 0$

b) Ache as distribuições marginais de X_1 e X_2. Elas são independentes?
$P(X_1 = 1) = 0 + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} == \frac{3}{12}$.
$P(X_1 = 3) = \frac{2}{12} + \frac{2}{12} + \frac{1}{12} == \frac{6}{12}$.
$P(X_1 = 5) = 0 + \frac{1}{12} + \frac{2}{12} == \frac{3}{12}$.
X_2 é identicamente distribuido a X_1. c) Encontre a esperança e variância de X_1 , X_2.

$$E[X_1] = \frac{3}{12} + \frac{18}{12} + \frac{15}{12} = 3 = E[X_2].$$

$$E[X_1^2] = \frac{3}{12} + \frac{54}{12} + \frac{75}{12} = 11.$$

Portanto $Var(X_1) = 11 - 9 = 2 = Var(X_2)$.

d) Como seriam as suas respostas anteriores se em vez de uma tira de papel com cada número, tivessemos 1.000 tiras de papel com cada número?

As mesmas

4. Sejam X e Y duas variáveis aleatórias com a seguinte distribuição conjunta de probabilidades:

X, Y	-1	0	1	total
-1	0	$0,25$	0	$0,25$
0	$0,25$	0	$0,25$	$0,50$
1	0	$0,25$	0	$0,25$
total	$0,25$	$0,50$	$0,25$	1

a) Calcule E(X), E(Y) e Cov(X, Y).

As variáveis aleatórias X e Y são identicamente distribuidas, com média $\mu = \frac{-1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = 0$ e variância $\sigma^2 = \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$. b) As variáveis aleatórias X e Y são independentes? Justifique.

Como $P(X = -1, Y = -1) = 0 \neq \frac{1}{4}.\frac{1}{4} = P(X = -1).P(Y = -1)$, as variáveis são dependentes

5. Dois tetraedros com as faces numeradas de 1 a 4 (dados com 4 faces) são lançados e os números das faces voltadas para cima são observados. Sejam as seguintes variáveis aleatórias:

X: maior dos números observados.

Y: menor dos números observados.

$Z = X + Y$.

a) Construa a tabela de probabilidade conjunta de X e Y.

b) Determine E(X), E(Y), Var(X), Var(Y) e Var(Z).

Resposta

a) O espaço amostral Ω é

$$(1,1); (1,2); (1,3); (1,4);$$
$$(2,1); (2,2); (2,3); (2,4);$$
$$(3,1); (3,2); (3,3) : (3,4);$$
$$(4,1); (4,2); (4,3); (4,4);$$

A distribuição conjunta de X e Y é:

Y, X	1	2	3	4	total
1	$0,0625$	$0,125$	$0,125$	$0,125$	$0,4375$
2	0	$0,0625$	$0,125$	0,125	$0,3125$
3	0	0	$0,0625$	$0,125$	$0,1875$
4	0	0	0	$0,0625$	$0,0625$
total	$0,0625$	$0,1875$	$0,3125$	$0,4375$	1

b)

$$E[X] = \frac{1}{16} + \frac{6}{16} + \frac{15}{16} + \frac{28}{16} = \frac{50}{16} = 3,125;$$
$$E[X^2] = \frac{1}{16} + \frac{12}{16} + \frac{45}{16} + \frac{112}{16} = \frac{170}{16} = 10,625;$$

Portanto $Var(X) = 10,625 - 9,765 = 0,86$.

$$E[Y] = \frac{7}{16} + \frac{10}{16} + \frac{9}{16} + \frac{4}{16} = \frac{30}{16} = 1,875;$$
$$E[Y^2] = \frac{7}{16} + \frac{20}{16} + \frac{27}{16} + \frac{16}{16} = \frac{70}{16} = 4,375;$$

Portanto $Var(Y) = 4,375 - 3,52 = 0,86.$

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = 0,86 + 0,86 + 2.0,39 = 2,5$$
$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 6,25 - 3,125.1,875 = 0,39.$$

$$E[XY] = 1.1.\frac{1}{16} + 1.2.\frac{2}{16} + 1.3.\frac{2}{16} + 1.4.\frac{2}{16} + ... + 4.1.0 + 4.2.0 + 4.3.0 + 4.4.\frac{1}{16} +$$
$$\frac{1}{16}(1+4+6+8+4+12+16+9+24+16) = \frac{100}{16} = 6,25.$$

6. Se $E[X] = \mu$ e $Var(X) = \sigma^2$, escreva em função de μ e σ^2 as seguintes expressões.
   a) $E(X^2)$ b)$E[X(X-1)]$

   Resposta:
   Como $\sigma^2 = E[X^2] - \mu^2$ temos $E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$.
   Temos $E[X.(X-1)] = E[X^2 - X] = E[X^2] - E[X] = \sigma^2 + \mu^2 - \mu$.

7. Prove que $E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E[XY] - E[X]E[Y]$ (o primeiro membro corresponde a outra maneira de definir a covariância entre duas variáveis).

8. Se X_1, X_2, X_3, X_4 são variáveis aleatórias independentes, tais que $E(X_i) = \mu$ e $Var(Xi) = \sigma^2$ para i = 1, 2, 3, 4, e definimos $M = \frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}$, encontre $E(M)$ e $Var(M)$.

   Resposta

$$E[M] = E[\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4}] = \frac{1}{4}E[X_1 + X_2 + X_3 + X_4] =$$
$$\frac{1}{4}(E[X_1] + E[X_2] + E[X_3] + E[X_4]) = \frac{1}{4}(\mu + \mu + \mu + \mu) = \mu.$$

$$Var(M) = E[(M - E[M])^2] = E[(M-\mu)^2] = E[(\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4} - \frac{4\mu}{4}))^2] =$$
$$\frac{1}{16}E[((X_1-\mu) + (X_2-\mu) + (X_3-\mu) + (X_4-\mu))^2] =$$
$$\frac{1}{16}E[(X_1-\mu)^2 + (X_2-\mu)^2 + (X_3-\mu)^2 + (X_4-\mu)^2 +$$
$$2\{E[(X_1-\mu).(X_2-\mu)] + E[(X_1-\mu).(X_3-\mu)] + E[(X_1-\mu).(X_4-\mu)] +$$
$$E[(X_2-\mu).(X_3-\mu)] + E[(X_2-\mu).(X_4-\mu)] + E[(X_3-\mu).(X_4-\mu)]\} =$$
$$\frac{1}{16}\{\sum_{i=1}^{4} Var(X_i) + 2\sum_{i<j}^{4} Cov(X_i, X_j)\}.$$

Como as variáveis são independentes temos $cov(X_i, X_j) = 0$ e $Var(M) = \frac{\sigma^2}{4}$

9. Suponha que tempo de vida (em horas) de um certo componente eletrônico seja uma variável aleatória continua T com distribuição exponencial com média de 1500 horas.

a) Qual é a probabilidade de que um componente falhe antes das 2000 horas se sabemos que sobreviveu 1000 horas?

b) Se três componentes independentes são conectados em paralelo, qual a probabilidade de que o sistema formado esteja funcionando depois de 1500 horas?

c) Qual o número máximo de componentes que podemos conectar em série para que o sistema formado tenha uma chance maior do que 0,8 de sobreviver a 110 horas?

d) Ao testarmos 10 componentes independentes simultaneamente, qual é o número esperado de componentes que sobrevivem 1500 horas?

Resposta:

Seja $T \sim exp(\frac{1}{1500})$

a)

$$P(T \leq 2000|T > 1000) = \frac{P(1000 < T \leq 2000)}{P(T > 1000)} =$$

$$\frac{e^{-\frac{1000}{1500}} - e^{-\frac{2000}{1500}}}{e^{-\frac{1000}{1500}}} =$$

$$\frac{e^{-0,66} - e^{-1,33}}{e^{-0,66}} = \frac{0,52 - 0,26}{0,52} = 0,5.$$

b) $S = \max\{T_1, T_2, T_3\}$ é o sistema em paralelo.

$$P(\max\{T_1, T_2, T_3\} > 1500) = 1 - P(\max\{T_1, T_2, T_3\} \leq 1500) =$$

$$1 - P(T_1 \leq 1500, T_2 \leq 1500, T_3 \leq 1500) = 1 - P(T_1 \leq 1500).P(T_2 \leq 1500).P(T_3 \leq 1500) =$$

$$1 - P(T_1 \leq 1500).P(T_2 \leq 1500).P(T_3 \leq 1500) = 1 - (1 - e^{-\frac{1500}{1500}})^3 =$$

$$1 - (1 - e^{-1})^3 = 1 - (1 - 0,37)^3 = 1 - 0,63^3 = 0,75.$$

c) $S = \min\{T_1, T_2, ..., T_n\}$ Qual o valor de n tal que $P(\min\{T_1, T_2, ..., T_n\} > 110) > 0,8$?

$$P(\min\{T_1, T_2, ..., T_n\} > 110) > 0,8 \leftrightarrow P(T_1 > 110, T_2 > 110, ..., T_n > 110) > 0,8 \leftrightarrow$$

$$P(T_1 > 110).P(T_2 > 110).....P(T_n > 110).0,8 \leftrightarrow P(T_1 > 110)^n > 0,8 \leftrightarrow$$

$$e^{-\frac{110.n}{1500}} > 0,8 \leftrightarrow -\frac{110.n}{1500} > \ln 0,8 = -0,223 \leftrightarrow \frac{110.n}{1500} > 0,223 \leftrightarrow n > 3.$$

d) O número de componentes que sobrevivem 1500 horas tem distribuição binomial $B(10, p)$, onde $p = P(T > 1500) = e^{-1} = 0,37$. Então o número esperado é 3,7.