Monitoria:

Exercício 6:

Considere $f = a_0 + \dots + a_m x^m$, $a_m \neq 0$.

Suponha que exista $g \in \mathbb{K}[x]$ tal que $f \cdot g = 1$. Note que:

$$gr(fg) = \underbrace{gr(f)}_{m} + \underbrace{gr(g)}_{n} = gr(1) = 0 \Rightarrow$$

$m = n = 0$. Logo $f \in \mathbb{K}^*$. Assim $U(\mathbb{K}[x]) = \mathbb{K}^*$.

Exercício 7: Queremos encontrar um polinômio não constante em $\mathbb{Z}_4[x]$ que seja inversível.

obs/ Resumo:

$$(ax+b)(cx+d) = \underbrace{ac}_{0}\, x^2 + \underbrace{ad}_{0}\, x + \underbrace{bc}_{0}\, x + \underbrace{bd}_{1}$$

— ,, —

Em $\mathbb{Z}_4$, $\bar{3}$ é inversível pois mdc$(3,4) = 1$

com $\bar{3}\cdot\bar{3} = \bar{1}$

é, $\bar{2}$ é um divisor de zero pois $mdc(2,4) \neq 1$

e, $\bar{2}\cdot\bar{2} = \bar{0}$.

Então considere $f = 2x + 3$. Note que

$$(2x+3)(2x+3) = \underbrace{\cancel{\bar{2}\cdot\bar{2}}}_{\bar{0}}x^2 + \underbrace{\bar{2}\cdot\bar{3}\,x + \bar{3}\,\bar{2}\,x}_{\bar{0}} +$$

$\bar{9} = \bar{1}$

Dica (ex 10)

$f = 5x^4 + 3x^2 + 1$, $g = 3x^2 + 2x + 1$

$$5x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 0x + 1 \;\; \underline{|\, 3x^2 + 2x + 1}$$

Dica (ex 12)

$$(x-2)^{10n} + (x-1)^n + 2 = \underbrace{(x-1)(x-2)}_{g}\, q(x) + r(x)$$

$gr(g) = 2 \Rightarrow g(r) = 0$ ou 1.

Suponhamos $r = ax + b$