Aula ILM - 26/05/2020

Demonstrações de Existência e Unicidade

Teorema: As sentenças a seguir são equivalentes:

(i) $\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow y=x))$

(ii) $\exists x \forall y(P(y) \leftrightarrow y=x)$

(iii) $\exists x P(x) \land \forall y \forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)$

Sec. 22

$\underline{\exists! x P(x)}$ iet

$\exists x(P(x) \land \neg \exists y(P(y) \land y \neq x))$ iet

$\exists x\ P(x) \land \forall y(\neg P(y) \lor y=x)$ iet

$\exists x P(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow y=x)$

Rascunho:

(i) → (ii)

Givens	Goal
—	(i) → (ii)

Suponha (i), ou seja, $\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow y=x))$

Givens	Goal
$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow y=x))$	$\exists x \forall y(P(y) \leftrightarrow y=x)$

Usando I.E. seja x_0 tal que $P(x_0)$ e $\forall y(P(y) \rightarrow y=x_0)$

Givens	Goal
$P(x_0)$	$\exists x \forall y(P(y) \leftrightarrow y=x)$
$\forall y(P(y) \rightarrow y=x_0)$	

Seja $x=x_0$.

Givens	Goal
$P(x_0)$	$\forall y(P(y) \leftrightarrow y=x_0)$
$\forall y(P(y) \rightarrow y=x_0)$	

Tome y arbitrário.

Givens	Goal
$P(x_0)$	$P(y) \leftrightarrow y=x_0$
$\forall z(P(z) \rightarrow z=x_0)$	

O goal atual é uma bicondicional. Dividindo a demonstração em duas

Givens	Goal
$P(x_0)$	$P(y) \rightarrow y=x_0$
$\forall z(P(z) \rightarrow z=x_0)$	

Usando I.U. no given 2, para $z=y$ obtém-se $P(y) \rightarrow y=x_0$.

Givens	Goal
$P(x_0)$	$P(y) \leftarrow y=x_0$
$\forall z(P(z) \rightarrow z=x_0)$	

Suponha $y=x_0$.

Givens	Goal
$P(x_0)$	$P(y)$
$\forall z(P(z) \rightarrow z=x_0)$	
$y=x_0$	

Como $y=x_0$ e $P(x_0)$, então $P(y)$.

(ii) → (iii)

Givens	Goal
—	(ii) → (iii)

Suponha (ii).

Givens	Goal
$\exists x \forall y(P(y) \leftrightarrow y=x)$	$\exists x P(x) \land \forall y \forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)$

Seja x_0 tal que $\forall y(P(y) \leftrightarrow y=x_0)$.

Givens	Goal
$\forall y(P(y) \leftrightarrow y=x_0)$	$\exists x P(x) \land \forall y \forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)$

Provando a conjunção em separado

Givens	Goal
$\forall y(P(y) \leftrightarrow y=x_0)$	$\exists x P(x)$

Seja $x=x_0$

Givens	Goal
$\forall y(P(y) \leftrightarrow y=x_0)$	$P(x_0)$

Usando I.U. para $y=x_0$, tem-se $P(x_0) \leftrightarrow x_0=x_0$

Givens	Goal
$P(x_0) \leftrightarrow x_0=x_0$	$P(x_0)$

Tratando o given em separado

Givens	Goal
$P(x_0) \rightarrow x_0=x_0$	$P(x_0)$
$x_0=x_0 \rightarrow P(x_0)$	

Como $x_0=x_0$ e $(x_0=x_0 \rightarrow P(x_0))$, por M.P., obtém-se $P(x_0)$.

Givens	Goal
$\forall y(P(y) \leftrightarrow y=x_0)$	$\forall y \forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)$

Tome y arbitrário. Tome z arbitrário.

Givens	Goal
$\forall y(P(y) \leftrightarrow y=x_0)$	$P(y) \land P(z) \rightarrow y=z$

Suponha $P(y)$ e $P(z)$.

Givens	Goal
$\forall w(P(w) \leftrightarrow w=x_0)$	$y=z$
$P(y)$	
$P(z)$	

Usando I.U. para $w=y$, tem-se $P(y) \leftrightarrow y=x_0$

Usando I.U. para $w=z$, tem-se $P(z) \leftrightarrow z=x_0$

Givens	Goal
$P(y) \leftrightarrow y=x_0$	$y=z$
$P(z) \leftrightarrow z=x_0$	
$P(y)$	
$P(z)$	

Tratando os bicondicionais em separado

Givens	Goal
$P(y) \rightarrow y=x_0$	$y=z$
$P(z) \leftarrow z=x_0$	
$P(y) \rightarrow y=x_0$	
$P(z) \leftarrow z=x_0$	
$P(y)$	
$P(z)$	

Usando $P(y) \rightarrow y=x_0$ e $P(y)$, obtém-se por M.P. que $y=x_0$

Usando $P(z) \rightarrow z=x_0$ e $P(z)$, obtém-se por M.P. que $z=x_0$.

Logo, $y=x_0=z$.

(iii) → (i)

Givens	Goal
—	(iii) → (i)

Suponha (iii)

Givens	Goal
$\exists x P(x) \land \forall y \forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)$	$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow y=x))$

Tratando o given em separado

Givens	Goal
$\exists x P(x)$	$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow y=x))$
$\forall y \forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)$	

Seja x_0 tal que $P(x_0)$

Givens	Goal
$P(x_0)$	$\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow y=x))$
$\forall y \forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)$	

Seja $x=x_0$

Givens	Goal
$P(x_0)$	$P(x_0) \land \forall y(P(y) \rightarrow y=x_0)$
$\forall y \forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)$	

Provando a conjunção em separado

Givens	Goal
$P(x_0)$	$P(x_0)$
$\forall y \forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)$	

Como $P(x_0)$, então $P(x_0)$

Para a outra parte

Givens	Goal
$P(x_0)$	$\forall y(P(y) \rightarrow y=x_0)$
$\forall y \forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)$	

Tome y arbitrário

Givens	Goal
$P(x_0)$	$P(y) \rightarrow y=x_0$
$\forall w \forall z(P(w) \land P(z) \rightarrow w=z)$	

Suponha $P(y)$

Givens	Goal
$P(x_0)$	$y=x_0$
$\forall w \forall z(P(w) \land P(z) \rightarrow w=z)$	
$P(y)$	

Usando I.U. para $w=y$

Givens	Goal
$P(x_0)$	$y=x_0$
$\forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)$	
$P(y)$	

Usando I.U. para $z=x_0$.

Givens	Goal
$P(x_0)$	$y=x_0$
$P(y) \land P(x_0) \rightarrow y=x_0$	
$P(y)$	

Como $P(x_0)$ e $P(y)$, então $P(y) \land P(x_0)$.

Como $P(y) \land P(x_0)$ e $P(y) \land P(x_0) \rightarrow y=x_0$, por M.P., obtém-se $y=x_0$.

Teorema: As sentenças a seguir são equivalentes:

(i) $\exists x(P(x) \land \forall y(P(y) \rightarrow y=x))$

(ii) $\exists x \forall y(P(y) \leftrightarrow y=x)$

(iii) $\exists x P(x) \land \forall y \forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)$

$\left.\right\}$ $\underline{\exists! x P(x)}$

* Para provar um goal do tipo $\exists! x P(x)$

Prove $\underbrace{\exists x P(x)}_{\text{Existência}}$ e $\underbrace{\forall y \forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)}_{\text{Unicidade}}$

Solution:

Existência: [Prova de que $\exists x P(x)$]

Unicidade: [Prova de $\forall y \forall z(P(y) \land P(z) \rightarrow y=z)$]

Exemplo: Prove que existe um único conjunto A tal que para cada conjunto B, $A \cup B = B$.

Givens	Goal
—	$\exists! A \underbrace{\forall B(A \cup B = B)}$

$\rightarrow \exists! A\ P(A)$

Reescrevendo o goal usando o Teorema acima

Givens	Goal
—	$\exists A \underbrace{\forall B(A \cup B = B)}_{P(A)} \wedge \forall y \forall z \left(\underbrace{\forall B(y \cup B = B)}_{P(y)} \wedge \underbrace{\forall B(z \cup B = B)}_{P(z)} \rightarrow y = z \right)$

Unicidade e existência serão provados em separado

Primeiro existência:

Givens	Goal
—	$\exists A\, \forall B(A \cup B = B)$

Tome $A = \emptyset$.

Givens	Goal
—	$\forall B(\emptyset \cup B = B)$

Tome B arbitrário.

Givens	Goal
—	$(\emptyset \cup B = B)$

Note que $\emptyset \cup B = B$.

Agora Unicidade

Givens	Goal
—	$\forall y \forall z \left(\underbrace{\forall B(y \cup B = B)} \wedge \underbrace{\forall B(z \cup B = B)} \rightarrow y = z \right)$

Tome y arbitrário. Tome z arbitrário

Givens	Goal
—	$\forall B(y \cup B = B) \wedge \forall B(z \cup B = B) \rightarrow y = z$

Suponha $\forall B(y \cup B = B)$ e $\forall B(z \cup B = B)$

Givens	Goal
$\forall B(y \cup B = B)$	$y = z$
$\forall B(z \cup B = B)$	

Usando I.U. em $\forall B(y \cup B = B)$ para $B = z$, tem-se $y \cup z = z$.
Usando I.U. em $\forall B(z \cup B = B)$ para $B = y$, tem-se $z \cup y = y$.
Logo, $z = y \cup z = z \cup y = y$.

* Para provar $\exists! x\, P(x)$:

Prove que $\exists x \left(P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow y = x) \right)$

* Para usar um given da forma $\exists! x\, P(x)$:

Trate o given $\exists x\, P(x) \wedge \forall y \forall z \left(P(y) \wedge P(z) \rightarrow y = z \right)$ em separado.

Exemplos

Givens	Goal
—	$\forall x \left(x \neq 2 \rightarrow \exists! y \left(\frac{2y}{y+1} = x \right) \right)$

Tome x arbitrário

Givens	Goal
—	$x \neq 2 \rightarrow \exists! y \left(\frac{2y}{y+1} = x \right)$

Suponha $x \neq 2$

Givens	Goal
$x \neq 2$	$\exists! y \overbrace{\left(\frac{2y}{y+1} = x \right)}^{P(y)}$

Usando o Teorema

Givens	Goal
$x \neq 2$	$\exists y \left(\overbrace{\frac{2y}{y+1} = x}^{P(y)} \wedge \forall z \left(\overbrace{\frac{2z}{z+1} = x}^{P(z)} \rightarrow z = y \right) \right)$

Rascunho do Rascunho $\frac{2y}{y+1} = x \leftrightarrow 2y = x(y+1) \leftrightarrow y(2-x) = x \leftrightarrow y = \frac{x}{2-x}$

Seja $y = \frac{x}{2-x}$

Givens	Goal
$x \neq 2$	$\overbrace{\frac{2y}{y+1} = x}^{P(y)} \wedge \forall z \left(\overbrace{\frac{2z}{z+1} = x}^{P(z)} \rightarrow z = y \right)$
$y = x/(2-x)$	

Como $x \neq 2$, então $y = \frac{x}{2-x} \in \mathbb{R}$.

Provando a conjunção em separado, note que

$$\frac{2y}{y+1} = \frac{2x/(2-x)}{1 + x/(2-x)} = \frac{\frac{2x}{\cancel{2-x}}}{\frac{2-\cancel{x}+\cancel{x}}{\cancel{2-x}}} = \frac{2x}{2} = x$$

Tome z arbitrário.

Suponha $\frac{2z}{z+1} = x$

Givens	Goal
$x \neq 2$	$\left(\frac{2z}{z+1} = x \rightarrow z = y \right)$
$y = x/(2-x)$	

Givens	Goal
$x \neq 2$	$z = y$
$y = x/(2-x)$	
$\frac{2z}{z+1} = x$	

Segue de $x = \frac{2z}{z+1}$ que $x(z+1) = 2z$ e, portanto, que $z(2-x) = x$. Logo, $z = \frac{x}{2-x} = y$.

Exercícios 3.6: {2, 3, 5, 7, 10, 12}