Determinantes de Matrizes

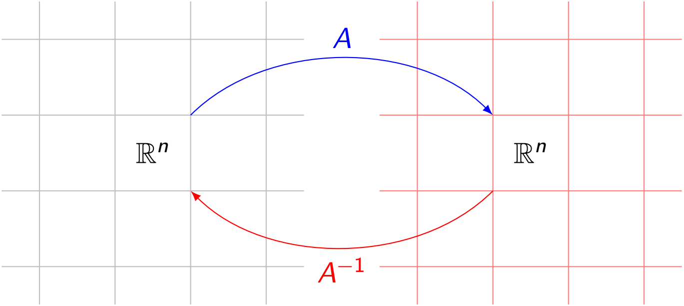
MAP 2110 - Diurno

IME USP

26 de maio

A importância de uma matriz invertível

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \implies x = A^{-1}\mathbf{b}$$



Caso 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ invertível } \iff \det A \neq 0$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\text{de fato, se } \det(A) \neq 0 \implies A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Pra mostrar que se A é invertível usamos a eliminação de Gauss, supondo $a_{11} \neq 0$:

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline a_{11} & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22} & {\color{red} a_{11} L_2 - a_{21} L_1} \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline a_{11} & a_{12} & \\ 0 & \det(A) & {\color{red} \leftarrow} \\ \hline \end{array}$$

Algumas propriedades do determinante (caso 2×2)

Estas propriedades queremos estender para a os determinantes de dimensões maiores:

1. $\det(I) = 1$
2. Se uma coluna ou uma linha for zero então $det(A) = 0$
3. Se A e B diferem só por troca de linhas ou de colunas, então $\det(A) = -\det(B)$
4. Se a primeira linha de B é um a vezes a primeira linha de A e as segundas linhas são as mesmas, então $\det(B) = a\det(A)$
5. Se a diferença entre A e B é que a primeira linha de B é a primeira linha de A mais um multiplo da segunda linha de A então $\det(A) = \det(B)$

Comentários

Determinantes de matrizes 3×3

Antes de dar uma definição do caso geral, trataremos o caso 3×3 para nos convencermos de que estamos no caminho certo.
Queremos definir um número para a matriz, que indidique que ela é invertível.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{11}L_2 - a_{21}L1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{11}L_3 - a_{31}L1 \end{array}\right] \to$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} & a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} & \\ 0 & a_{11}a_{32} - a_{31}a12 & a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} & \end{array}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) \\
-&(a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})
\end{aligned}
$$

Distribuindo a multiplicação:

$$
\begin{aligned}
&\ a_{11}a_{22}a_{11}a_{33} - a_{11}a_{22}a_{31}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{11}a_{33} + \boxed{a_{21}a_{12}a_{31}a_{13}} \\
&-(a_{11}a_{23}a_{11}a_{32} - a_{21}a_{13}a_{11}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{31}a_{12} + \boxed{a_{21}a_{13}a_{31}a_{12}}) \\
&= a_{11}(a_{22}a_{11}a_{33} - a_{22}a_{31}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{11}a_{32} + a_{21}a_{13}a_{32} + \cdots \\
&\quad + a_{23}a_{31}a_{12}) \\
&= a_{11}\left(a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\right)
\end{aligned}
$$

Para matrizes de dimensão 3×3 podemos definir então:

$$\det(A) = \left(a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \right)$$

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ então

$$\det(A) = \left(1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = -6$$

exemplos

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \left(1 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = 0$$

Se $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ então

$$\det(A) = \left(0 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) = 6$$

A definição geral

Se A é uma matriz quadrada de dimensão n, então, por definição, A_{ij} é a matriz quadrada de dimensão $n-1$ obtida de A eliminando-se a i-ésima linha e a j-ésima coluna.
Se tivermos definido o determinante de matrizes de dimensão $n-1$ vamos definir o cofator da posição ij da matriz A como o número

$$c_{ij}(A) = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

Iremos definir

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} c_{i1}(A)$$

Exemplos

Vamos ver a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \; A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \; A_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_{21} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \; A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \; A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$A_{31} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \; A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \; A_{33} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Exemplos

Vamos ver a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \; A_{12} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \; A_{13} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \; A_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \; A_{23} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{31} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \; A_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \; A_{33} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de cofatores

$$C = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \\ -2 & 8 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Verdadeiro ou Falso

1

$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos\theta \end{pmatrix}$ é invertível para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Verdadeiro ou Falso

2

Se $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é linear e injetora, e se A é sua matriz associada, então $Ax = b$ têm, no máximo, uma única solução.

Verdadeiro ou Falso

3

Uma aplicação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ não pode ser sobrejetora.

Verdadeiro ou Falso

4

A aplicação $T(x, y) = (x - 2y, \sqrt{2}x)$ é linear

Verdadeiro ou Falso

5

A aplicação $T(x, y) = (2xy, 3x + y)$ é linear