Função

Evandro R. da Silva

ICMC – USP

Função Composta: associativa e elemento neutro

Teorema

Sejam $f : A \longrightarrow B$, $g : B \longrightarrow C$ *e* $h : C \longrightarrow D$ *funções. Então* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ *(associativa).*

Teorema

Seja $f : A \longrightarrow B$ *função.*
A) Se $I_B : B \longrightarrow B$, *com* $I_B(x) = x$. *Então* $I_B \circ f = f$.
B) Se $I_A : A \longrightarrow A$, *com* $I_A(x) = x$. *Então* $f \circ I_A = f$.

Observação: O teorema anterior diz que a função identidade I é o elemento neutro da composição.

Composta: injetora, sobrejetora e bijetora

Teorema

Sejam $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *funções:*

A) Se f *e* g *são funções injetoras então* $g \circ f$ *é injetora.*

B) Se f *e* g *são funções sobrejetoras então* $g \circ f$ *é sobrejetora.*

C) Se f *e* g *são funções bijetoras então* $g \circ f$ *é bijetora.*

Função inversa

Definição

Sejam $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow A$ funções. Dizemos que g é a inversa de f e escrevemos $g = f^{-1}$ se são satisfeitas as seguintes condições:

$$g \circ f(x) = I_A(x) = x,\ x \in A \ \text{e} \ \ f \circ g(y) = I_B(y) = y,\ y \in B.$$

Neste caso dizemos que f é inversível.

Observação: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Exemplo

Sejam $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(x) = x^2$ *e*
$g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $g(x) = \sqrt{x}$.
Temos que $g = f^{-1}$.
De fato,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x| = x, \quad \textit{pois } x \geq 0$$

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = (g(y))^2 = (\sqrt{y})^2 = y$$

Exemplo

Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 9x + 1$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{x-1}{9}$.
Temos que $g = f^{-1}$.
De fato,

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = \frac{f(x) - 1}{9} = \frac{9x + 1 - 1}{9} = x$$

$$f \circ g(y) = f(g(y)) = 9g(y) + 1 = 9\left(\frac{y - 1}{9}\right) + 1 = y - 1 + 1 = y$$

Teorema

Uma função $f : A \longrightarrow B$ é inversível se, e somente se, f é uma bijeção (f é bijetora).

Exemplo

Verifique se a função $f : \mathbb{R} - \{4\} \to \mathbb{R} - \{1\}$ *dada por*

$$f(x) = \frac{x+1}{x-4}$$

é inversível e determine sua inversa.

Pelo teorema anterior para mostrar que f é inversível basta mostrar que f é bijetora.
Mostremos que f é injetora. De fato, suponha x_1 e x_2 em $\mathbb{R} - \{4\}$ com $f(x_1) = f(x_2)$ então

$$\frac{x_1 + 1}{x_1 - 4} = \frac{x_2 + 1}{x_2 - 4} \Leftrightarrow (x_1 + 1)(x_2 - 4) = (x_2 + 1)(x_1 - 4) \Leftrightarrow$$

$$x_1 x_2 - 4x_1 + x_2 - 4 = x_2 x_1 - 4x_2 + x_1 - 4 \Leftrightarrow$$

$$-5(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2.$$

Mostremos que f é sobrejetora. De fato, seja $y \in \mathbb{R} - \{1\}$ e mostremos que existe $x \in \mathbb{R} - \{4\}$ tal que $f(x) = y$.

Temos

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-4} \Leftrightarrow$$

$$y(x-4) = x+1 \Leftrightarrow yx - 4y = x+1 \Leftrightarrow$$

$$yx - x = 4y+1 \Leftrightarrow x(y-1) = 4y+1 \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{4y+1}{y-1}.$$

Portanto se $x = \frac{4y+1}{y-1}$ então $f(x) = y$.

Deste modo pelo teorema anterior f é inversível.
Segue ainda do que foi feito anteriormente que
$g : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R} - \{4\}$ com $g(y) = \frac{4y+1}{y-1}$ é a inversa de f, isto é,
$g = f^{-1}$.

A inversa da composta

Teorema

Sejam $f : A \to B$ *e* $g : B \to C$ *funções bijetoras. Então* $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Relação entre os gráficos de f e f^{-1}

Seja $f : A \to B$ função e $f^{-1} : B \to A$ a sua função inversa. Notemos que $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$. Deste modo temos

1) $(a, b) \in G(f) \Leftrightarrow (b, a) \in G(f^{-1})$

Notemos ainda que

2) A reta que passa pelos os pontos (a, b) e (b, a) é perpendicular a reta r de equação $y = x$. Além disso, a distância de (a, b) a r é a mesma distância de (b, a) a r. Neste caso dizemos que estes pontos são simétricos em relação a reta r.

Conclusão: Assim, quando o par (a, b) descreve o gráfico $G(f)$ temos que o par (b, a) descreve o gráfico de $G(f^{-1})$ e como os pontos (a, b) e (b, a) são simétricos em relação a reta $y = x$ segue que os gráficos $G(f)$ e $G(f^{-1})$ são simétricos em relação a reta $y = x$.