Lista de Exercício III

1. O grupo $SU(4)$ é o grupo das matrizes 4×4, complexas, unitárias, e de determinante igual a 1. Escrevendo os elementos próximos à identidade pelo mapeamento exponencial como $g = e^{i\,T}$, vemos que os elementos T da álgebra de Lie de $SU(4)$ são matrizes 4×4, complexas, hermitianas e de traço nulo.

   (a) Mostre que a dimensão de $SU(4)$ é 15.

   (b) Construa uma base para a álgebra de Lie de $SU(4)$ em termos de matrizes 4×4, hermitianas e de traço nulo, e que são ortogonais.

   (c) Escolha uma subalgebra de Cartan dentre estas matrizes.

   (d) Tomando combinações lineares complexas das matrizes, construa os operadoes step de $SU(4)$ e calcule as raízes desta álgebra.

   (e) Verifique que estas raízes satisfazem os postulados de uma diagrama de raízes.

2. Considere uma representação matricial (finita) $R\,(T)$ de uma álgebra de Lie $\mathcal{G}$, i.e.

$$[\,R\,(T)\,,\,R\,(T')\,] = R\,([\,T\,,\,T'\,]) \qquad\qquad T\,,\,T' \in \mathcal{G}$$

   Considere um conjunto de operadores de criação e aniquilação em número igual à dimensão da representação R,

$$[\,a_i\,,\,a_j\,] = 0 \qquad \left[\,a_i^\dagger\,,\,a_j^\dagger\,\right] = 0 \qquad \left[\,a_i\,,\,a_j^\dagger\,\right] = \delta_{ij} \qquad i,j = 1,\ldots \dim R$$

   Mostre que os operadores

$$S\,(T) \equiv \sum_{i,j} a_i^\dagger R_{ij}\,(T)\,a_j$$

   constituem uma representação de $\mathcal{G}$, i.e.

$$[\,S\,(T)\,,\,S\,(T')\,] = S\,([\,T\,,\,T'\,])$$

3. Considere a álgebra $sl(2)$ com relações de comutação

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm\ ; \qquad [T_+, T_-] = 2T_3$$

   Calcule os operadores $S\,(T_{3,\,\pm})$ (do exercício anterior) para o caso da representação bidimensional (espinorial) desta álgebra. Mostre que realizando os operadores de criação e aniquilação como

$$a_i \equiv \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \qquad\qquad a_i^\dagger = \lambda_i$$

obtemos a representação em termos dos seguintes operadores diferenciais ($\lambda_1 \equiv \lambda$ e $\lambda_2 \equiv \bar{\lambda}$)

$$S\left(T_+\right) \equiv \lambda \frac{d}{d\bar{\lambda}} \; ; \qquad S\left(T_-\right) \equiv \bar{\lambda} \frac{d}{d\lambda} \; ; \qquad S\left(T_3\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\lambda \frac{d}{d\lambda} - \bar{\lambda} \frac{d}{d\bar{\lambda}}\right)$$

Calcule a ação dos operadores $S\left(T_{3,\pm}\right)$ nos estados $\lambda^p \, \bar{\lambda}^q$. Quais são as representações irredutíveis?

4. Verifique se as duas subálgebras (de dimensão 1) de $sl(2)$ geradas por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são subálgebras de Cartan.

5. Verifique se a subálgebra (de dimensão 2) de $sl(3)$ gerada por

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é uma subálgebra de Cartan.

6. O diagrama de raízes da álgebra $so(5)$ está dado na figura 2.9, página 79, da apostila. Verifique qual é a estrutura do grupo de Weyl de $so(5)$.

7. Defina um vetor δ no espaço de raízes como

$$\delta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha > 0} \alpha$$

Mostre que se α é uma raíz simples então

$$\sigma_\alpha(\delta) = \delta - \alpha$$

e portanto

$$\frac{2\delta \cdot \alpha}{\alpha^2} = 1 \qquad \text{para } \alpha \text{ simples}$$

8. Calcule o sistema de raízes e as relações de comutação de $SO(5)$ a partir de seu diagrama de Dynkin (veja figura 2.9, página 79, da apostila). Mostre como fazer uma escolha consistente dos cociclos $\varepsilon(\alpha, \beta)$.

9. A classificação dos diagramas de Dynkin é feita provando-se ser impossível a existência de vários tipos de diagramas. Neste contexto:

   (a) Mostre que um diagrama de Dynkin não possue loops

   (b) Mostre que o número de linhas conectadas a um dado ponto não pode exceder 3