Exercício de Filtro de Kalman Extendido- PMR3502

Thiago Martins

2020

Grupos de 2 alunos. Entrega até 5/06/2020. Forneça além dos resultados o código-fonte do seu programa e instruções para executá-lo.

Descrição do Sistema

Um robô tricilo como o da Figura 1 se desloca no plano xy. As rodas motoras giram em uma velocidade determinada por um controlador. O ângulo de basculamento da roda dianteira também é controlado.

Mede-se a distância do robô até uma antena, bem como o fluxo magnético terrestre no referencial do robô. A posição da antena é conhecida. O fluxo magnético terrestre no local é presumido constante, uniforme (independente da posição do veículo) e desconhecido.

Adota-se neste problema o vetor de estado do sistema dado por:

$$X_t = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \theta \\ f_x \\ f_y \end{bmatrix}$$

onde x, y são as coordenadas da posição do robô, θ é o ângulo do eixo longitudinal do mesmo com o eixo x, f_x, f_y são as componentes do vetor fluxo magnético terrestre no local.

A ação de controle do sistema é representada pelo vetor:

$$u_t = \begin{bmatrix} v \\ \phi \end{bmatrix}$$

onde v é a velocidade longitudinal imposta pelas rodas motoras e ϕ é o ângulo de basculamento da roda dianteira.

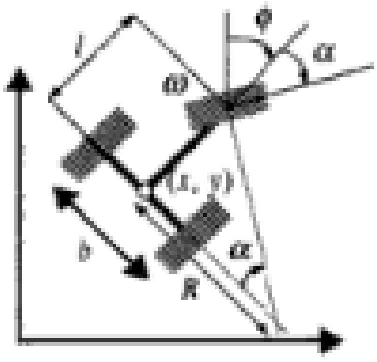

Figura 1: Geometria de Robô Tricilo

Questão 1

Escreva a lei de recorrência de evolução do vetor de estado na seguinte forma:

$$X_t = F\left(X_{t-1}, u_t\right) + \varepsilon_t \tag{1}$$

onde ε_t é um vetor de 5 componentes aleatório Gaussiano de média nula e matriz de covariância R.

Escreva a expressão para $F\left(X_{t-1}, u_t\right)$ (você pode usar $x_t, y_t, \theta_t, f_{xt}, f_{yt}$ para referenciar as componentes de X_t e v_t, ϕ_t para as componentes de u_t). Considere que em cada instante a função F representa o deslocamento do robô em um arco de circunferência, determinado por v e ϕ.

Escreva a matriz R que representa a covariância da perturbação aleatória que se soma ao deslocamento determinístico.

Considere para isso que ao final do arco de circunferência percorrido pelo robô soma-se um deslocamento aleatório longitudinal, um deslocamento radial e um deslocamento angular. Estes três deslocamentos são independentes, Gaussianos de média nula e covariâncias ${s_l}_t^2$, ${s_r}_t^2$ e ${s_\theta}_t^2$ respectivamente. As covariâncias ${s_l}_t^2$ e ${s_r}_t^2$ são de medidas de perturbação en um referencial ideal que faz um ângulo de $\hat{\theta}_t$ com o eixo x. Esta orientação seria a do eixo longitudinal do veículo se este descrevesse um arco *perfeito* de circunferência no instante t de modo que $\hat{\theta}_t = F\left(X_{t-1}, u_t\right)_3$ (ou seja, a orientação determinada pela função F *sem* ruído). A matriz R, por outro lado, está escrita no referencial *Global*. Neste referencial, as perturbações em x e y podem não ser independentes. Escreva a matriz R em função de $\hat{\theta}_t$.

Questão 2

As medições são representadas pelo vetor:

$$z_t = \begin{bmatrix} \rho \\ b_f \\ b_e \end{bmatrix}$$

Onde ρ é medição da distância do robô até uma antena, b_l é a medição da projeção do campo magnético terrestre na direção longitudinal do robô (positiva para a dianteira) e b_t é a medição do campo magnético na direção transversal (positiva para a esquerda). A antena está sobre a origem do sistema de coordenadas x, y e a uma altura h. Estas medições são feitas com ruídos aleatórios Gaussianos independentes de média nula e covariâncias ${s_\rho}_t^2$, ${s_f}_t^2$ e ${s_e}_t^2$ respectivamente.

Escreva a lei de medição do sistema na seguinte forma:

$$z_t = G\left(X_t\right) + \delta_t \tag{2}$$

onde δ_t é um vetor aleatório Gaussiano de média nula e matriz de covariância Q_t dada por:

$$Q_t = \begin{bmatrix} {s_\rho}_t^2 & 0 & 0 \\ 0 & {s_f}_t^2 & 0 \\ 0 & 0 & {s_e}_t^2 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Questão 3

No filtro extendido de Kalman, a estimativa de covariância do estado *antes* da incorporação da medição é dada por:

$$\overline{\Sigma}_t = A_t \Sigma A_t^T + R_t$$

onde a matriz A_t é dada por $\nabla_X F(X, u)$.

Escreva a matriz A_t do sistema em função de X_{t-1} e u_t.

Questão 4

Implemente o passo de previsão do Filtro Extendido utilizando a linguagem de programação que achar mais adequada (Sugestão: Python com o pacote `numpy`).

Neste passo você deve estimar o estado recursivamente com as equações:

$$\overline{\mu}_t = F(\mu_{t-1}, u_t) \tag{4}$$
$$\overline{\Sigma}_t = A_t \Sigma A_t^T + R_t \tag{5}$$

Note que as matrizes A_t e R_t dependem da estimativa de estado μ_{t-1} e da entrada u_t.

Os valores das covariâncias ${s_l}_t^2$, ${s_r}_t^2$ e ${s_\theta}_t^2$ dependem do parâmetro v_t (o primeiro coeficiente de u_t) de acordo com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} {s_l}_t^2 &= \left(\frac{\Delta t v_t}{6}\right)^2 \\ {s_r}_t^2 &= \left(\frac{\Delta t v_t}{12}\right)^2 \\ {s_\theta}_t^2 &= \left(\frac{\Delta t v_t}{8l}\right)^2 \end{aligned}$$

Onde l é a distância entre os eixos do veículo e vale $0,3$.

Como nesta etapa *não* são consideradas medições, use $\mu_t = \overline{\mu}_t$ e $\Sigma_t = \overline{\Sigma}_t$.

Para o estado inicial, use:

$$\mu_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } \Sigma_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

O seu programa deve processar uma entrada no formato descrito pela seção “Dados”. Processe os parâmetros u_t no arquivo csv anexado neste enunciado. Plote os valores de x_t, y_t de $\overline{\mu}_t$ no plano x, y.

Considere a distância entre os eixos do veículo $l = 0m3$ e $\delta t = 0,25$.

Quais são os valores das covariâncias de x e y para $t = 250$?

Questão 5

No filtro extendido de Kalman o ganho de Kalman é dado por:

$$K_t = \overline{\Sigma}_t C_t^T \left(C_t \overline{\Sigma}_t C_t^T + Q_t\right)^{-1} \tag{6}$$

Onde a matriz C_t é definida como $\nabla_X G(X)$.

Escreva a matriz C_t em função de X_t.

Questão 6

Complete a implementação de seu filtro de Kalman.

Agora você deve estimar o estado e sua covarância de acordo com as leis:

$$\mu_t = \overline{\mu}_t + K_t \left(\_t - G(\overline{\mu}_t)\right) \tag{7}$$
$$\Sigma_t = \left(I - K_t C_t\right) \overline{\Sigma}_t \tag{8}$$

Note que a matriz C_t depende da estimativa de estado $\overline{\mu}_t$.
Use $h = 0,5$
O valor ${s_{\rho}}_t^2$ deve ser calculado a partir do estado estimado do sistema $\overline{\mu}_t$ de acordo com a seguinte expressão:

$$ {s_{\rho}}_t^2 = \frac{h^2 + \overline{x}_t^2 + \overline{y}_t^2}{20^2} $$

onde $\overline{x}_t$ e $\overline{y}_t$ são respectivamente a primeira e segunda componentes de $\overline{\mu}_t$.
Considere ${s_f}_t^2 = {s_e}_t^2 = 1/4$.
Novamente, seu programa deve processar os dados anexados a este enunciado.
Plote os valores de x_t, y_t de μ_t no plano x, y.

Dados

Este exercício usa dados simulados do robô, especificamente as entradas u_t e as medições z_t. Estes dados são fornecidos no arquivo `valores.csv` aqui anexado.

Este arquivo está no formato CSV (*comma-separated values*). Cada linha do arquivo corresponde a um instante do sistema e possui 5 componentes separadas por vírgula. As duas primeiras componentes são as duas componentes de u_t, respectivamente a velocidade das rodas motores e o ângulo (em graus) da roda dianteira (positivos para guinadas à esquerda). As três seguintes são as três componentes de z_t, respectivamente a distância do robô até a antena, a componente medida do campo magnético no sentido longitudinal e a componente medida do campo magnético no sentido transversal.

Por exemplo, a linha:
`1,0.15292019386577996,30.952114723924993,-1.7020162314364906,1.3283578315232143`
indica que em um determinado instante, as rodas motoras se deslocaram com velocidade 1, a roda dianteira estava basculada de $0,153$ graus radianos para a esquerda, mediu-se uma distância de $30,95$ até a antena, um campo magnético de $1,70$ para a traseira do veículo e de $1,33$ para a esquerda.

Formulário

Um sistema Dinâmico não-linear gaussiano de tempo discreto é descrito pelas equações:

$$ X_t = F(X_{t-1}, u_t) + \epsilon_t \tag{9} $$
$$ z_t = G(X_t) + \delta_t \tag{10} $$

Os símbolos são:

t: Variável tempo, que assume valores discretos.

x_t: Vetor de estado do sistema no instante t.

u_t: Vetor de entrada do sistema.

ϵ_t: Ruído de processo do sistema, variável aleatória gaussiana com média *nula* e matriz de covariância $\mathbf{R}_t$.

$F(X, u)$: A função que descreve a componente determinística do estado do sistema.

z_t: O vetor de medidas (ou saídas) do sistema.

$G(X)$: A função da componente determinística da medição do sistema.

δ_t: Ruído de observação do sistema, variável aleatória gaussiana de média *nula* e matriz de covariância $\mathbf{Q}_t$.

O conhecimento estimado pelo filtro de Kalman Extendido sobre o estado do sistema no instante t é descrito por uma distribuição gaussiana de média μ_t e covariância Σ_t. Para tanto, além das matrizes das equações (1.1) e (1.2), são necessárias as matrizes $\mathbf{Q}_t$ e $\mathbf{R}_t$, e o conhecimento sobre o estado inicial do sistema x_0, representado por uma distribuição gaussiana de média μ_0 e covariância Σ_0.

O estado é estimado pelo sistema de equações recorrentes:

$$\overline{\mu}_t = F(\mu_{t-1}, u_t) \tag{11}$$
$$\overline{\Sigma}_t = \mathbf{A}_t \Sigma_{t-1} \mathbf{A}_t^T + \mathbf{R}_t \tag{12}$$
$$\mathbf{K}_t = \overline{\Sigma}_t C_t^T \left(C_t \overline{\Sigma}_t C_t^T + Q \right)^{-1} \tag{13}$$
$$\mu_t = \overline{\mu}_t + \mathbf{K}_t \left(z_t - G(\overline{\mu}_t) \right) \tag{14}$$
$$\Sigma_t = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_t \mathbf{C}_t \right) \overline{\Sigma}_t \tag{15}$$

As matrizes A_t e C_t são resultados das linearizações das funções F e G.

A matriz A_t é a matriz das derivadas de F *nas variáveis do estado*, calculada em μ_{t-1}.

A matriz C_t é a matriz das derivadas de G calculada em $\overline{\mu}_t$.

A distribuição $\mathcal{N}\left(\overline{\mu}_t, \overline{\Sigma}_t\right)$ expressa o conhecimento sober o estado *previsto* no instante t *antes* de incorporar a medida z_t. A matriz $\mathbf{K}_t$ é chamada de *ganho de Kalman*.