Lista 3:

Questão 4:

a) $f(x) = \begin{cases} x \,\text{sen}\, 1/x &, x \neq 0 \\ 0 &, x = 0 \end{cases}$

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \,\text{sen}\, 1/h}{h} = \lim_{h\to 0} \text{sen}\, \frac{1}{h}$$

Afirmação: $\lim_{h\to 0} \text{sen}\, \frac{1}{h}$ não existe $\Rightarrow$ $f'(0)$ não existe.

Uma maneira de ver que o $\lim_{h\to 0} \text{sen}\, \frac{1}{h}$ não existe é

o seguinte: 1) se considerarmos a sequência de números se aproximando de 0: $\frac{2}{5\pi}, \frac{2}{9\pi}, \frac{2}{13\pi}, \ldots, \frac{2}{\pi(4n+1)}, \ldots$

obtemos que $\text{sen}\left(\frac{1}{2/\pi(4n+1)}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi(4n+1)}{2}\right)$

$= \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1$ ou seja $\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$ se aproxima de 1

2) se considerarmos outra sequência de números se aproximando de 0: $\frac{2}{3\pi}, \frac{2}{7\pi}, \frac{2}{11\pi}, \ldots, \frac{2}{\pi(4n-1)}, \ldots$

obtemos que $\text{sen}\left(\frac{1}{2/\pi(4n-1)}\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi(4n-1)}{2}\right)$

$= \text{sen}\left(\frac{-\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1$ ou seja, sen $\left(\frac{1}{h}\right)$ se aproxima de

-1

3) Logo, observamos que $\text{sen}\left(\frac{1}{h}\right)$ não possui limite quando $h \to 0$ pois não possui uma tendência única.

Questão 4 (Lista 3)

b) $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right)}{h}$

$= \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0$

Observamos que $-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) \leq 1 \Rightarrow \underbrace{-h}_{\xrightarrow{h \to 0}\, 0} \leq h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) \leq \underbrace{h}_{\xrightarrow{h \to 0}\, 0}$

Pelo Teorema do Confronto:

$\lim_{h \to 0} h \operatorname{sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0$

Questão 6 : (Lista 3)

a) $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - x}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \to 1} \frac{x(x^2-1)}{\sqrt{x-1}}$

$= \lim_{x \to 1} \frac{x(x-1)(x+1)}{\sqrt{x-1}} = \lim_{x \to 1} x\sqrt{x-1}\,(x+1) = 0 \neq f(1) = 1$

Logo, $f(x)$ não é contínua em $x = 1 \Rightarrow f(x)$ não é derivável em $x = 1$.

b) $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} =$

$\lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + \operatorname{sen} h}{h} = \lim_{h \to 0} h + \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$

$\lim_{h \to 0^-} \frac{h^5 + 4h^3}{h} = \lim_{h \to 0^-} h^4 + 4h^2 = 0$

Logo, não existe $f'(0)$

Questão 6 (Lista 3)

c) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{4}{5} x^5 = \frac{4}{5}$

$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1} x^4 = 1$

$\Rightarrow \lim_{x \to 1} f(x)$ não existe

$\Rightarrow f(x)$ não é contínua em $x = 1$ $\Rightarrow f(x)$ não é derivável em $x = 1$.