- Sistemas dinâmicos

Considere um sistema mecânico com n graus de liberdade (nossa discussão será mais geral, mas manteremos a nomeclatura de sistemas mecânicos para simplificar a linguagem). Nós representaremos o estado sistema por um vetor $\vec{x}(t)$ e as n equações do movimento são

$$\dot{\vec{x}} \equiv \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{F}(\vec{x},t) \quad (*)$$

$\rightarrow$ "velocidade"

$\vec{F}$ caracterizado por um conjunto de parâmetros de controle $\vec{c}$.

A idéia é fixarmos $\vec{c}$ e determinarmos $x(t)$ para diferentes condições iniciais. Temos assim diferentes trajetórias de $x(t)$ no espaço de fase do sistema. O conjunto dessas trajetórias forma um <u>retrato de fase</u> do sistema. Essa descrição de um sistema dinâmico desse modo é conhecida como fluxo em analogia com o movimento de um fluido. É importante notar que sistemas de primeira ordem não são assim tão especiais, pois podemos escrever $x_i = \frac{d^{i-1}}{dt^{i-1}} x$, $i = 1, 2, \ldots, n$ e assim reescrevemos

$$\frac{d^n x}{dt} = G\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x\right)$$

na forma (*). Quando a velocidade $\vec{F}(x)$ não depende explicitamente do tempo, o sistema é dito autônomo. Focaremos a maior parte de nossa discussão nesses sistemas.

- Exemplo: Sistemas de primeira ordem ($n=1$). A linha de fase

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Kx^2 - \sigma x^2 , \quad K, \sigma > 0$$
$$x(0) = x_0 > 0$$

Equação logística devido a Verhulst. Modelo de crescimento populacional. A taxa de crescimento $\dot{x}/x$ decresce na medida em que $x(t)$ aumento devido à superlotação ou falta de recursos.

Essa é uma equação diferencial separável que podemos integrar

$$\int_0^t dt = 1/K \int_{x_0}^{x} dx \, \frac{1}{x - \alpha x^2}, \quad \alpha = \sigma/K$$

$$t = 1/K \int_{x_0}^{x} dx \left[1/x + \frac{\alpha}{1-\alpha x} \right]$$

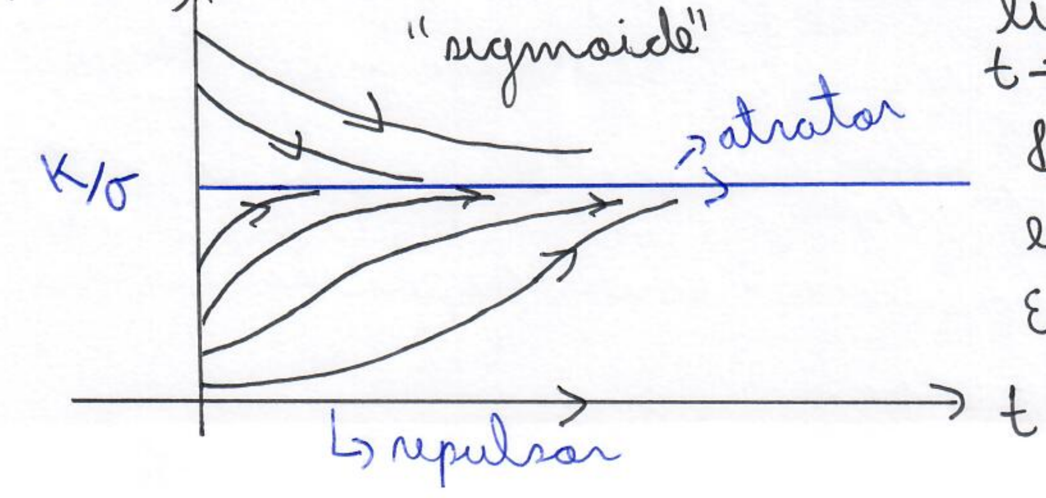
$$t = 1/K \left[\ln\left[x/x_0 \right] - \ln\left[\frac{1-\alpha x}{1-\alpha x_0} \right] \right]$$

$$Kt = \ln\left[\frac{x(1-\alpha x_0)}{x_0(1-\alpha x)} \right]$$

$$e^{Kt} x_0 (1-\alpha x) = x(1-\alpha x_0)$$

$$x\left[1 - \alpha x_0 + \alpha x_0 e^{Kt}\right] = x_0 e^{Kt}$$

$$x = \frac{K x_0}{(K - \sigma x_0) e^{-Kt} + \sigma x_0}$$



$$\lim_{t \to \infty} x(t) = K/\sigma$$

População de equilíbrio.
Estável assintonticamente

Podemos obter informações sobre esse sistema diretamente da equação diferencial, sem passarmos por sua solução, considerando o espaço de fase e o retrato de fase.

$$\dot{x} = Kx - \sigma x^2$$

$\dot{x} = 0 \Rightarrow$ pontos de equilíbrio ou pontos críticos

$$Kx\left(1 - \sigma/_K\, x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = K/_\sigma \end{cases}$$

Escrevemos agora $x = x_{eq} + \xi(t)$, com $\xi(t)$ pequeno tal que desprezamos termos de ordem $\xi^2(t)$ e superior

$- \; x_{eq} = 0$

$$\dot{\xi} = K\xi$$

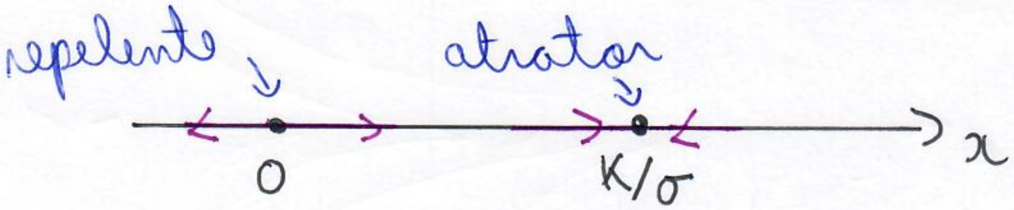
$$\xi = Ae^{Kt}$$

$- \; x_{eq} = K/_\sigma$

$$\dot{\xi} = K\left(1 - \sigma/_K\, x\right)x$$

$$\dot{\xi} = -\sigma \cdot \xi \; K/_\sigma$$

$$\dot{\xi} = -K\xi \Rightarrow \xi = Be^{-Kt}$$



Nesse e outros sistemas de primeira ordem o comportamento qualitativo é completamente determinado pela posição dos pontos críticos, o comportamentos das linhas de fase em suas vizinhanças e requerimento geométrico forte que $\dot{x}$ não pode mudar de sinal em nenhum outro valor de x

– Sistemas de segunda ordem – o plano de fase ($n=2$)

Vamos começar nossa discussão com um caso simples, o oscilador harmônico.

A equação do movimento é

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \omega = \sqrt{K/m},$$

que podemos reescrever da seguinte forma

$$\dot{x} = y \quad , \quad \dot{y} = -\omega^2 x$$

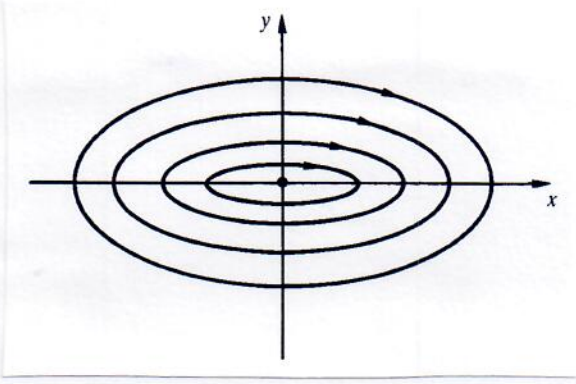
As trajetórias desse sistema autônomo no plano de fase são soluções da equação

$$\frac{dy}{dx} \equiv \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{\omega^2 x}{y},$$ que pode ser trivialmente resolvida

$$\omega^2 x^2 + y^2 = A^2, \quad A = \text{constante}$$

A fotografia de fase é composto por um conjunto de elipses centradas na origem com $E = \frac{1}{2} m A^2$.

$(x, y) = (0, 0)$ é um ponto crítico e pequenas perturbações levam a trajetórias elípticas ao seu redor. Cada trajetória é fechada e temos assim órbitas periódicas



Nesse caso, fomos capazes de identificar as órbitas. No caso geral, as trajetórias só podem ser obtidas numericamente. No caso geral, escrevemos

$$\dot{x} = F(x, y) \quad e \quad \dot{y} = G(x, y)$$

A equação $\frac{dy}{dx} = G/F$ determina a inclinação das trajetórias únicas no espaço de fase exceto nos pontos críticos (x_0, y_0) pois $F(x_0, y_0) = G(x_0, y_0) = 0$. As trajetórias só podem se tocar nos pontos críticos e mais em lugar algum.

Quando deslocamos o sistema de seu ponto crítico, três cenários são possíveis

1) O sistema se move em direção a (x_0, y_0) para $t \to \infty$. Assintoticamente estável.

2) O sistema se move para longe de (x_0, y_0). Instável

3) O sistema permanece em uma pequena vizinhança de (x_0, y_0), sem necessariamente tender para (x_0, y_0) quando $t \to \infty$. Estável

O oscilador harmônico é um exemplo do caso 3 e ilustra um propriedade nova para sistemas de segunda ordem.

Podemos agora repetir nossa análise sobre a estabilidade dos pontos de equilíbrio para dois graus de liberdade

$$x = x_0 + \xi \quad , \quad y = y_0 + \eta$$

$$\dot{\xi} = \xi \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0 + \eta \left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 + O(\xi^2, \eta^2)$$

$$\dot{\eta} = \xi \left.\frac{\partial G}{\partial x}\right|_0 + \eta \left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_0 + O(\xi^2, \eta^2)$$

Em notação matricial

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial F/\partial x|_0 & \partial F/\partial y|_0 \\ \partial G/\partial x|_0 & \partial G/\partial y|_0 \end{bmatrix}}_{\equiv M} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

O comportamento do sistema nas proximidades de (x_0, y_0) pode quase sempre ser classificado por meio dos autovalores da matriz Jacobiana M. Exceções ocorrem se, por exemplo, $M = 0$ e precisamos de ordem superiores. Obviamente, sempre avaliamos M no ponto crítico (x_0, y_0)

Se escrevemos $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ temos que seus autovalores obedecem:

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

$$\lambda^2 - (\mathrm{Tr}\, M)\lambda + (\det M) = 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{Tr}\, M \quad \text{e} \quad \lambda_1 \lambda_2 = \det M$$

$\lambda_1, \lambda_2 \rightarrow$ autovalores. Notem que agora M não é simétrica e, portanto, os autovalores não são necessariamente reais.

Vamos ilustrar alguns casos possíveis. Para tal, procuramos soluções do tipo ⑨

$$\vec{\xi} \equiv \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} e^{\lambda t} \equiv \vec{\xi}_0 e^{\lambda t}, \text{ dando}$$

$$M \vec{\xi}_0 = \lambda \vec{\xi}_0 \quad \text{(equação do problema de autovetor (autovalor de } M\text{))}$$

Aqui, vou me concentrar no caso em que M possui dois autovalores distintos. Para o caso em que $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ veja o apêndice C do Kibble. Devido à linearidade do sistema posso então escrever que:

$$\vec{\xi}(t) = c_1 \vec{\xi}_{01} e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{\xi}_{02} e^{\lambda_2 t} = \begin{pmatrix} c_1 \xi_{10} e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi_{20} e^{\lambda_2 t} \\ c_1 \eta_{10} e^{\lambda_1 t} + c_2 \eta_{20} e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}, \quad c_1 = c_2 = \text{constantes}$$

A resposta mais geral é uma combinação linear dos deslocamentos nas direções dos autovetores. Temos então que

$$\vec{\xi}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_{01} & \xi_{02} \\ \eta_{01} & \eta_{02} \end{pmatrix}}_{U_0} \underbrace{\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix}}_{\Delta(t)} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}_{\vec{c}}$$

$$= U_0 \cdot \Delta(t) \cdot \vec{c}$$

Se agora avaliamos em $t=0$

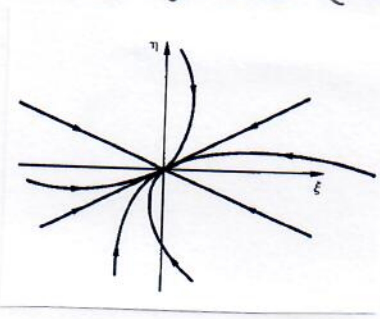
$$\vec{\xi}(0) = U_0 \cdot \underbrace{\Delta(0)}_{\mathbb{1}} \cdot \vec{c} \Rightarrow \vec{c} = U_0^{-1} \cdot \vec{\xi}(0) ,$$

determinando então as constantes $\vec{c}$ em termos das condições iniciais é:

$$\vec{\xi}(t) = U_0 \cdot \Delta(t) \cdot U_0^{-1} \cdot \vec{\xi}(0)$$

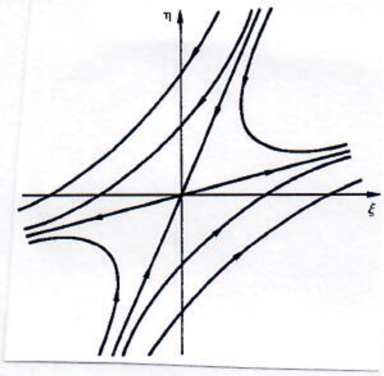
Vamos agora estudar alguns padrões qualitativos de trajetórias locais

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ (reais)

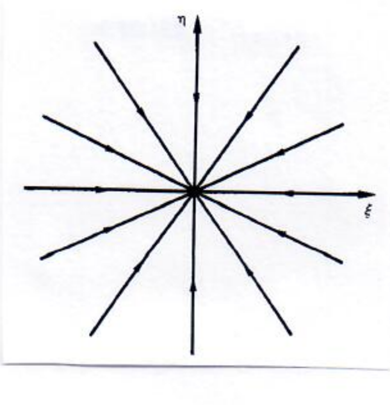


Ponto crítico assintoticamente estável. Se $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ devemos inverter os sentidos das setas e o ponto crítico é instável

λ_1 e λ_2 reais e sinais opostos

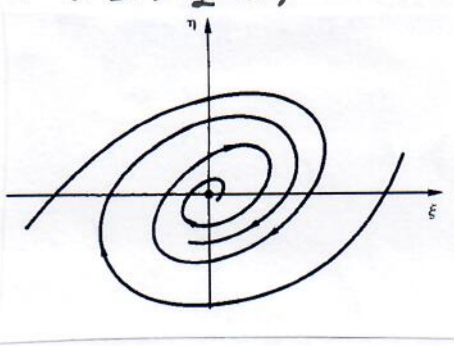


Nesse caso, o ponto crítico é sempre instável. Sempre há trajetórias que se afastam



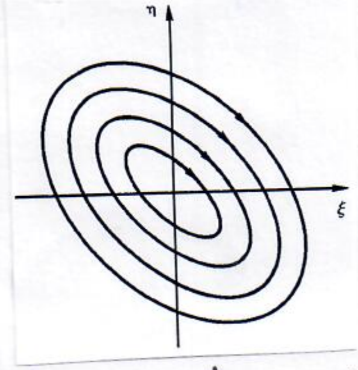
$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ (Caso particular). Estável se $\lambda < 0$, figura ao lado, e instável se $\lambda > 0$.

$\lambda_1 = \mu + iV$
$\lambda_2 = \lambda_1^* = \mu - iV$



Se $\mu < 0$ esse ponto espiral é estável assintóticamente. Se $\mu > 0$ o ponto crítico é instável com o sentido das setas invertido

$\lambda_1 = iV$
$\lambda_2 = \lambda_1^* = -iV$



Esse ponto crítico eleptico é sempre estável. O sentido das setas pode ser diferente

A importância do comportamento local nas proximidades de pontos críticos é que nós podemos, em geral, obter um cenário qualitativo do retrato de fase completo. Novamente, temos que as trajetórias só podem se cruzar nos pontos críticos. Informações quantitativas podem ser obtidas por meios numéricos, se necessário.

Vamos agora considerar sistemas que são de particular interesse na mecânica clássica.

- Sistemas conservativos com um grau de liberdade

$$F = m\ddot{x}, \quad F = -dV/dx$$

$$\dot{x} = y, \; \dot{y} = F/m = -\frac{V'(x)}{m}$$

As trajetórias nesse caso são dadas por

$$\tfrac{1}{2} m y^2 + V(x) = E, \; y = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - V(x))}$$

Para esse problema temos que

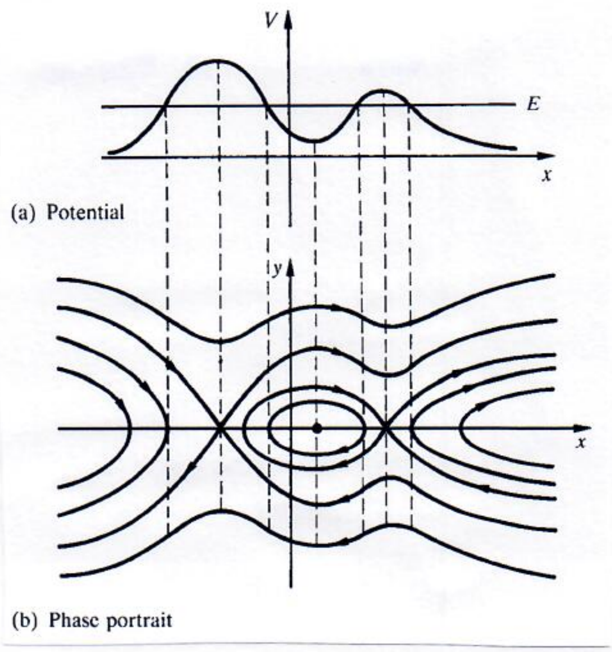
$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{V''(x_0)}{m} & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda^2 = -\frac{V''(x_0)}{m}$$

Com o ponto de equilíbrio dado por $(x_0, 0)$.

Se temos um ponto de mínimo, $V''(x_0) > 0$ e assim $\lambda = \pm i\sqrt{\frac{V''(x_0)}{m}}$. Ponto crítico estável

Se temos um ponto de máximo, $V''(x_0) < 0$ e assim $\lambda = \pm\sqrt{\frac{|V''(x_0)|}{m}}$. Ponto crítico instável

Podemos fazer um esboço do retrato de fase desse problema:

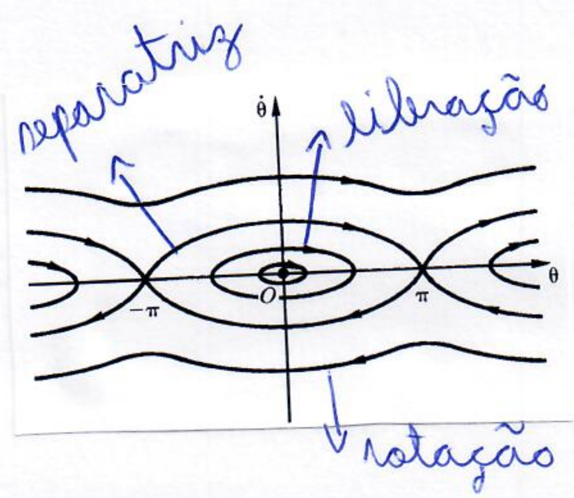


(a) Potential

(b) Phase portrait

Note que quando $E = V(x)$ temos $y = 0$, mas não um ponto crítico. Esses são os pontos de retorno do movimento e marcam o limite de trajetórias $E =$ cte.

Um caso especialíssimo é o do pêndulo simples para o qual temos $V(\theta) = mgl(1-\cos\theta)$. O movimento periódico, libração, ocorre se $E < 2mgl$. Se $E > 2mgl$ o pêndulo executa rotações. Para $E = 2mgl$ a trajetória uma separatiz conectando os pontos de sela $(-\pi, 0)$ e $(\pi, 0)$



- Predador-presa e espécies competindo.

Vamos agora dar exemplos de alguns sistemas que ilustram essas ideias da análise do plano de fase. Vamos começar por um modelo que é enganosamente simples

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases}$$

Lotka (1920)
Volterra (1926)

a, b, c e d constantes positivas.

Sua aplicação biológica é um modelo simples de dinâmica populacional

$x \to$ presa (coelho)
$y \to$ predador (raposa)

$xy \to$ modela o encontro entre as duas espécies. Vantajoso para o predador e desvantajoso para a presa

Sem os predadores, as presas proliferam exponencialmente no tempo. Já sem as presas, os predadores são extintos exponencialmente também. Isso leva à seguinte interpretação dos parâmetros

$a \to$ taxa de crescimento

$b \to$ taxa de decaimento

$c, d \to$ taxas de eficiência na competição

Esse é um modelo muito simplificado e serve apenas de base para investigações mais elaboradas. Os pontos críticos do sistema são dados por:

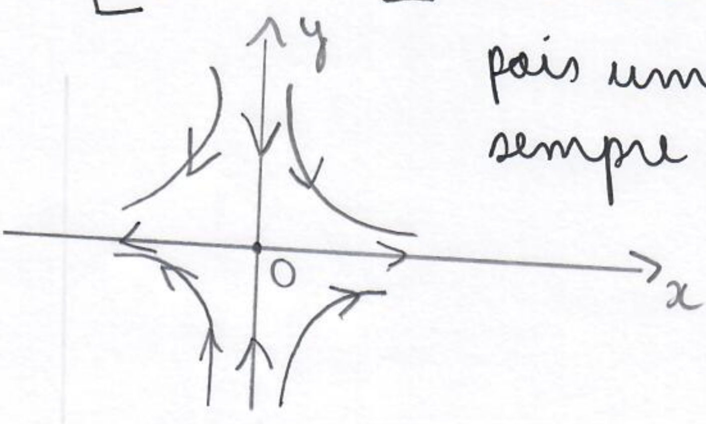
$$\begin{cases} ax - bxy = 0 \\ -cy + dxy = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(a - by) = 0 \\ y(-c + dx) = 0 \end{cases}$$

Há, portanto, dois deles: $(0,0)$ e $(c/d, a/b)$

- $(0,0)$

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{bmatrix}$$

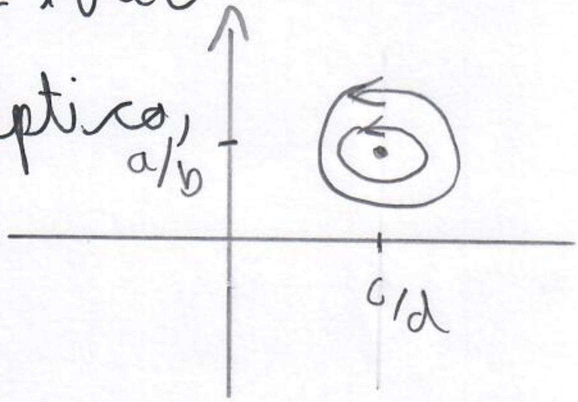
A matriz já é diagonal com $\lambda_1 = a$ e $\lambda_2 = -c$. O ponto crítico é sempre instável, pois uma das perturbações sempre cresce exponencialmente



• $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ $\quad M = \begin{bmatrix} 0 & -bc/d \\ da/b & 0 \end{bmatrix}$

Os autovalores são $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ac}$

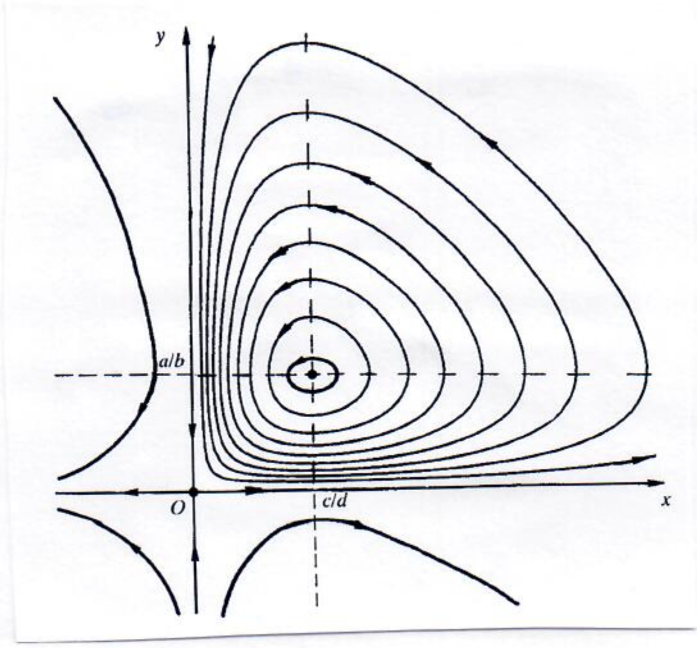
Esse é um ponto crítico elíptico, que é sempre estável.



Para esse problema, podemos encontrar a equação para as trajetórias. Para tal, reescrevemos a equação de Lotka-Volterra como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-c+dx)}{x(a-by)}$$, que é separável e nos dá

$$f(x,y) \equiv -c\ln|x| + dx - a\ln|y| + by = \text{constante}$$



Essas curvas confirmam a análise local acerca dos pontos de equilíbrio. O interesse biológico do sistema é restrito ao primeiro quadrante, onde $x, y \geq 0$

Pequenas oscilações ao redor do ponto de equilíbrio estável possuem frequência $\sqrt{ac}$ e um período $T = 2\pi/\sqrt{ac}$.

Dado que:

$$\int_0^T \frac{\dot{x}}{x}\,dt = \int_0^T (a-by)\,dt$$

$$\int_0^T \frac{dx}{x} = \int_0^T (a-by)\,dt$$

$$\underbrace{\cancel{\ln x(t)\Big|_0^T}}_{0} = \int_0^T (a-by)\,dt$$

$$\Rightarrow \langle y \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T y\,dt = a/b,$$

ou seja o valor esperado de y ao redor de uma órbita é o valor de equilíbrio a/b. De modo análogo temos $\langle x \rangle = c/d$

O modelo prevê variações cíclicas de x e y que estão fora de fase. Assim, uma redução presente das presas levará a uma diminuição futura dos predadores, que leva a um aumento das presas e depois dos predadores e assim por diante.

- Ciclos limite

Até agora, estudamos retratos de fase nos quais os atratores e repelentes são pontos críticos isolados. Contudo há outras possibilidades. Uma delas são os chamados ciclos limite, que são órbitas periódicas atratoras que são estáveis assintoticamente. Eles modelam oscilações auto-sustentáveis como batimento cardíaco, reações químicas, vibrações em pontes, dentre outras. A amplitude das oscilações depende das condições iniciais, mas o ciclo limite é determinado pela estrutura do problema

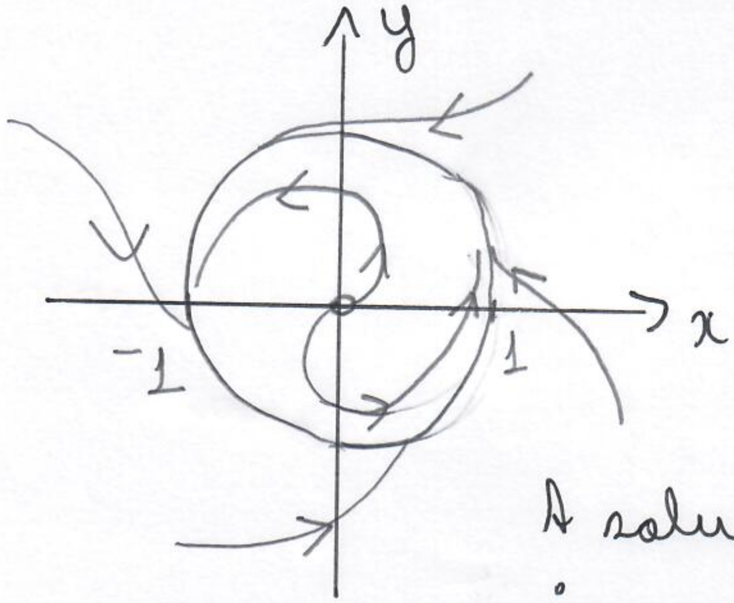
- Exemplo: Um ciclo limite simples

$$\dot{r} = r(1-r^2) \quad , \quad \dot{\theta} = 1 . \quad \text{(Coordenadas polares)}$$

Pontos fixos para r : $r^* = 0$ (instável) e $r^* = 1$ (estável)

$f(r) = r - r^3$, $f'(r) = 1 - 3r^2$ $\therefore$ $f'(0) = 1$ e $f'(1) = -2$

O retrato de fase desse mapa é então



Todas as trajetórias se espiralam asintoticamente em direção ao ciclo limite ($r=1$)

A solução do ciclo limite é

$\dot{r} = 0 \Rightarrow r = \text{constante} = 1$

$\dot{\theta} = 1 \Rightarrow \theta = t + \theta_0$

$x^* = r\cos(\theta) = \cos(t + \theta_0)$

Soluções fora do ciclo limite eventualmente tendem a x^*. Nesse caso, toda a energia adicionada em um ciclo é dissipada em um ciclo

- Bifurcação de Hopf

Vamos considerar agora um sistema no qual a estabilidade de um ponto crítico muda como função de um parâmetro externo. Nesse ponto de mudança há o aparecimento de um ciclo limite. Essa é a bifurcação de Hopf. Vamos mostrar como isso ocorre em um modelo simples de oscilação química proposto por Prigogine e Lefever em 1968

$$\begin{cases} \dot{x} = a - (1+b)x + x^2 y \equiv F(x,y) \\ \dot{y} = bx - x^2 y \equiv G(x,y) \end{cases}$$

$x(t), y(t) \rightarrow$ concentração química de dois reagentes

$a, b \rightarrow$ concentração fixa de outros reagentes

Pontos fixos $F(x,y) = G(x,y) = 0$

$$\begin{cases} a - (1+b)x + x^2 y = 0 \\ bx = x^2 y \end{cases} \Rightarrow \quad a - x - bx + bx = 0$$

$\underline{x = a}$, donde

$y = b/a$

Só há um ponto fixo $(a, b/a)$. A matriz M é

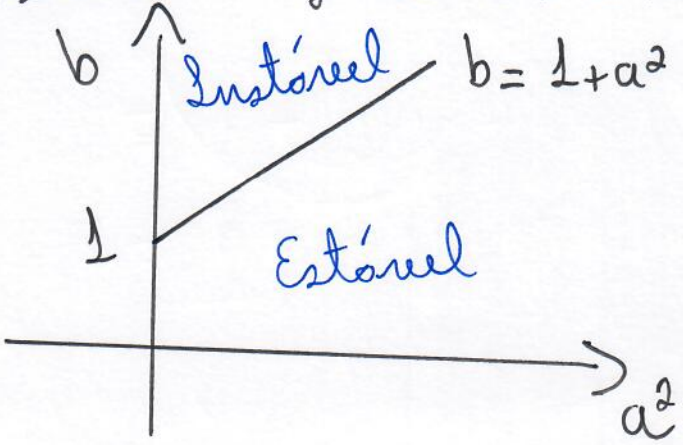
$$M = \begin{bmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{bmatrix},$$ cuja equação característica é dada por:

$$(\lambda + 1 - b)(\lambda + a^2) + ba^2 = 0$$

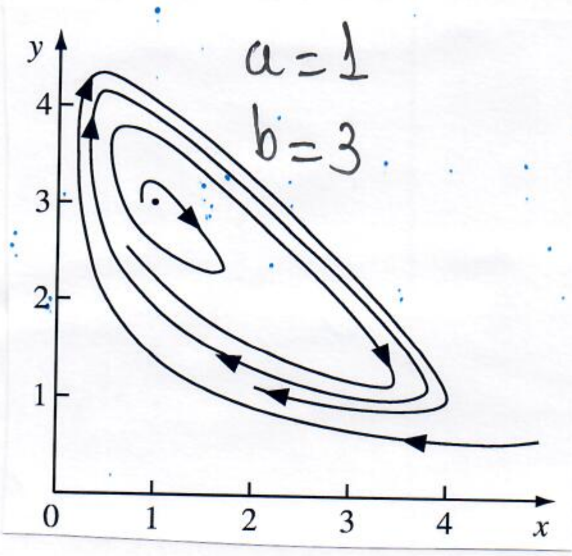
$$\lambda^2 + \lambda(a^2 + 1 - b) - ba^2 + ba^2 = 0$$

$$\lambda(\lambda + a^2 + 1 - b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = b - (1 + a^2) \end{cases}$$

Se $b < 1+a^2$, $\lambda < 0$ e o ponto crítico é estável. Só se $b > 1+a^2$ ele é instável.



Na linha $b = 1+a^2$ aparece uma bifurcação de Hopf. Desse modo, o ponto fixo instável é acompanhado por um atrator do tipo ciclo limite, como na figura ao lado.



– Sistemas de ordem 3 ou superior

Esses sistemas possuem algumas propriedades típicas de sistemas com ordem maior que dois. Vamos discutir alguns exemplos, deixando a maior parte dos cálculos para a lista de exercícios.

– Rotação livre de um corpo rígido

Vamos considerar a rotação de um corpo rígido em relação ao seu centro de massa, de forma que as forças externas não realizem torque

As equações de Euler, escritas ao longo dos eixos principais que se movem com o corpo, são

$$
\begin{cases}
I_1 \dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\,\omega_2 \omega_3 = 0 \\
I_2 \dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\,\omega_3 \omega_1 = 0 \\
I_3 \dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\,\omega_1 \omega_2 = 0
\end{cases}
$$

No nosso caso, é conveniente escrevermos

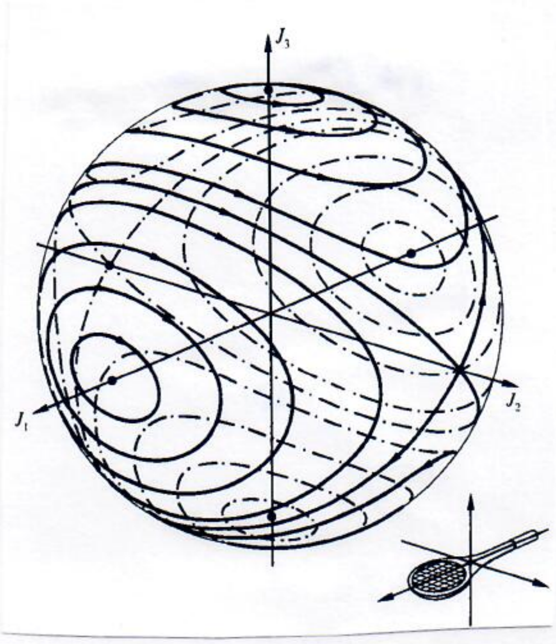
$(J_1, J_2, J_3) = (I_1\omega_1, I_2\omega_2, I_3\omega_3)$ para eliminar ω_i

$$
\begin{cases}
\dot{J}_1 - \left(\dfrac{I_2 - I_3}{I_2 I_3}\right) J_2 J_3 = 0 \\[2ex]
\dot{J}_2 - \left(\dfrac{I_3 - I_1}{I_3 I_1}\right) J_3 J_1 = 0 \\[2ex]
\dot{J}_3 - \left(\dfrac{I_1 - I_2}{I_1 I_2}\right) J_1 J_2 = 0
\end{cases}
$$

No espaço de fase (J_1, J_2, J_3) cada trajetória é a intersecção de duas superfícies:

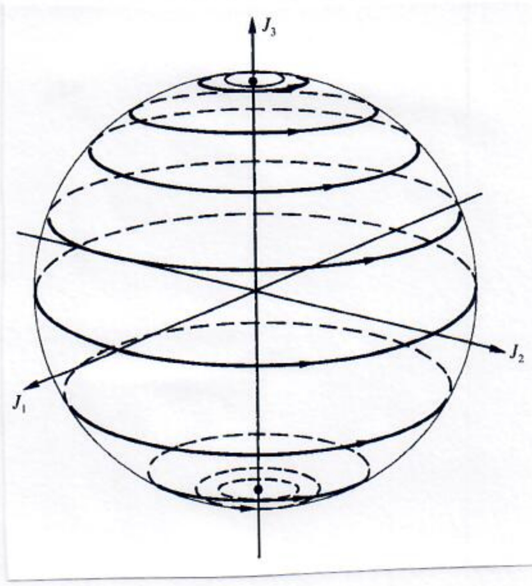
esfera: $J^2 = J_1^2 + J^2 + J_3^2$ $\quad (J^2 = \text{constante})$

elipsoide: $J_1^2/I_1^2 + J_2^2/I_2^2 + J_3^2/I_3^2 = 2T$ $\quad (T = \text{constante})$



Se consideramos $\vec{J}$ fixo e olhamos para os pontos fixos na esfera de fase correspondente, recuperamos os resultados conhecidos: rotação ao redor do maior e do menor eixo principal de inércia é estável. Rotação ao redor do eixo principal de inércia intermediário é instável.

No caso em que existe uma simetria axial no corpo rígido, existe uma simetria equivalente no espaço de fase. Nesse caso, temos $J_3 = I_3 \Omega =$ constante, e podemos escrever



$$\ddot{J}_1 = -\left[\frac{(I_3 - I_1)}{I_1}\right]^2 \Omega^2 J_1 ,$$

e uma equação análoga para J_2, o que mostra que as componentes J_1 e J_2 simplesmente executam um movimento harmônico. Para um conjunto de eixos fixos no espaço, $\vec{J}$ é fixo e nesse caso o vetor $\vec{\omega}$ precessiona ao redor de $\vec{J}$ com velocidade angular

$$\dot{\varphi} = J/I_1 \simeq I_3/I_1\, \Omega\,, \text{ para } \omega_1, \omega_2 << \Omega$$

Essa é a precessão de Chandler que a Terra executa, $\dot{\varphi} \simeq \Omega$, ou a precessão de um disco girando jogado para o alto, $\dot{\varphi} \simeq 2\Omega$.

O problema geral, quando o torque $\vec{G} \neq 0$, pode ser muito complicado, inclusive mostrando caos. Para um sistema contínuo ser caótico ele precisa ser ao menos de terceira ordem. Já para mapas discretos, o caos aparece já para um grau de liberdade!

Um outro exemplo de sistema de ordem 3 é o pêndulo forçado amortecido:

$$m\, l\, \ddot{\theta} + \lambda \dot{\theta} + mg \sin\theta = F \cos \Omega t$$

Para ver que ele é de ordem 3, faça

$$\dot{\phi} = \Omega\,, \quad \dot{\theta} = \omega\,, \quad \dot{\omega} = -\lambda/ml\, \omega - g/l \sin\theta + F/ml \cos\phi$$

Os termos não lineares $\sin\theta$ e $\cos\phi$ fazem esse sistema muito rico, inclusive podendo apresentar caos.

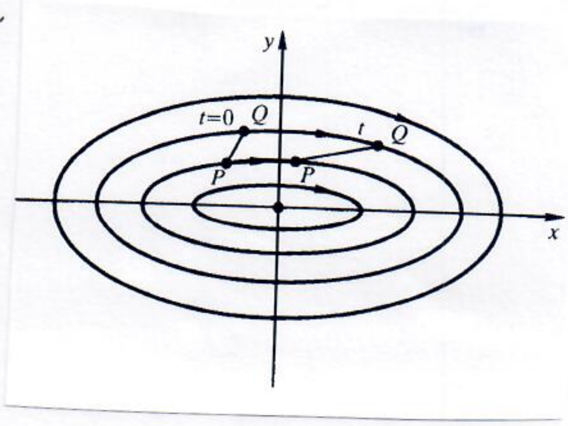
- Sensibilidade a condições iniciais

Uma consequência importante para a ordem efetiva de uma sistema dinâmico é a maneira como a dimensão resultante do espaço de fase pode restringir a evolução ao longo de trajetórias de estados inicialmente próximas.

Vamos começar, por simplicidade, com um sistema de ordem 2 com trajetórias fechadas no espaço de fase

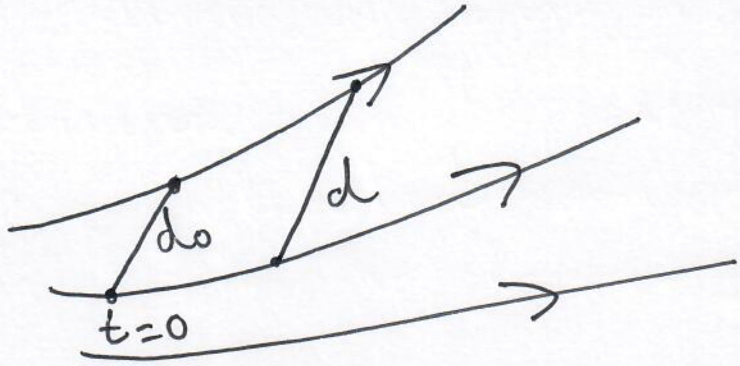
$$P \equiv (x_0, y_0) \quad e \quad Q \equiv (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$$

Se o sistema for um oscilador harmônico simples, o período ao longo dessas órbitas é o mesmo e podemos mostrar que distância no espaço de fase entre P e Q permanece limitada no tempo. Esse é um comportamento especial,



pois de maneira geral o período do movimento depende da sua órbita (energia). Nesses casos, a distância entre as órbitas aumento de modo linear com o tempo em geral.

Em espaços de fase de dimensão três ou superior, as trajetórias podem agora divergir exponencialmente uma da outra em uma região limitada sem se cruzarem. Isso é possível pois agora as trajetórias se enovelam em um nó complexo



$d \simeq d_0 e^{\lambda t}$, na média

$\lambda \rightarrow$ expoente de Lyapunov

Se ao menos um dos expoentes for positivo observamos uma forte sensibilidade às condições iniciais. Essa é a propriedade chave para a identificação de um comportamento irregular agora conhecido como caos.

O efeito no comportamento global de um sistema dinâmico produzido por uma sensibilidade às condições iniciais é conhecido como efeito borboleta (Lorenz, 1972)

"Previsibilidade: pode o bater de asas de uma borboleta no Brasil dar início a um tornado no Texas"