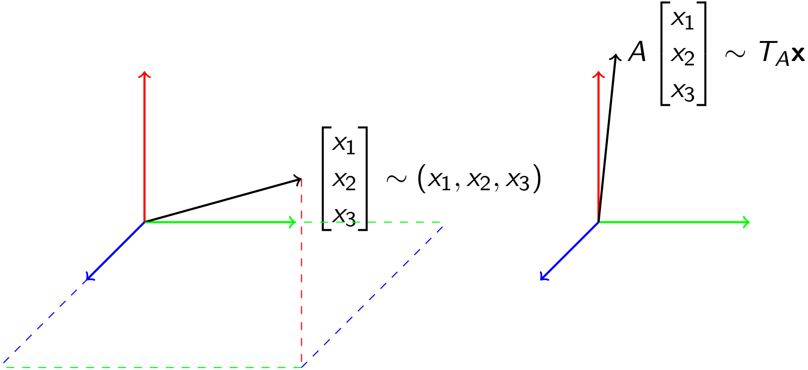
Transformações Lineares

MAP 2110 - Diurno

IME USP

19 de maio

Espaço V_n como espaço de matrizes

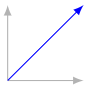


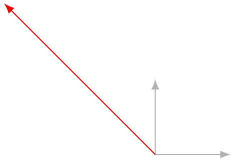
Se A é uma matriz $m \times n$, ela induz uma transformação $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dada por $T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ que é a transformação gerada por A.

Exemplo

$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Então temos:

$$T_A(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_2 \\ 2x_1 \end{bmatrix} = (-2x_2, 2x_1)$$





Propriedades das Transformações geradas por matrizes

Seja A uma matriz $m \times n$ e identificamos $\mathbb{R}^n$ com o conjunto das matrizes de n linhas e 1 coluna de números reais, e da mesma forma $\mathbb{R}^m$ será o conjunto das matrizes reais com m linhas e 1 coluna. A tranformação $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, como definida acima tem as seguintes Propriedades

1. $T_A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T_A(\mathbf{x}) + T_A(\mathbf{y})$
2. $T_A(\alpha \mathbf{x}) = \alpha T_A(\mathbf{x})$

Isso quer dizer que T_A é uma transformação linear.

Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \; \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ Então}$$

$$T_A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$T_A(\mathbf{x}) + T_A(\mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Obtendo a matriz A a partir da transformação

Em $\mathbb{R}^n$ vamos considerar o seguinte conjunto de vetores $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ dados por

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ com o 1 na linha } j$$

$$T_A(\mathbf{e}_j) = A.\mathbf{e}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \text{ com } A = [a_{ij}] \text{ uma matriz } m \times n$$

Transformações Lineares

De forma geral $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é linear quando satisfaz:

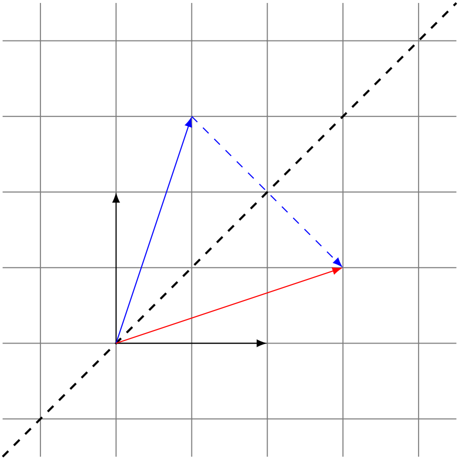
1. $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)(\forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$
2. $T(\alpha \mathbf{x}) = \alpha T(\mathbf{x})(\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)(\forall \alpha \in \mathbb{R})$

Então podemos achar a matriz $Am \times n$ que gera T sabendo que $T(\mathbf{e}_j)$ será a j-ésima coluna de A.

$$
\begin{array}{c|ccccc|}
 & T(\mathbf{e}_1) & \cdots & T(\mathbf{e}_j) & \cdots & T(\mathbf{e}_n) \\
\hline
 & a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\
 & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
A = & a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\
 & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
 & a_{m1} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \\
\hline
\end{array}
$$

Exemplo

Ache a matriz da transformação que dê o ponto simétrico em relação à reta $r : (0,0) + t(1,1)$

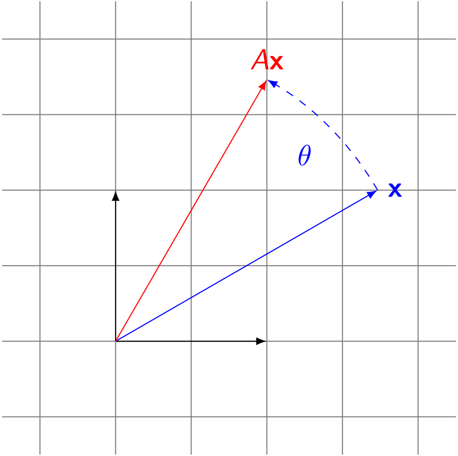


Note que $T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$ e $T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1$ Então

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rotação no Plano

Qual a matriz de uma Rotação em torno da origem em $\mathbb{R}^2$

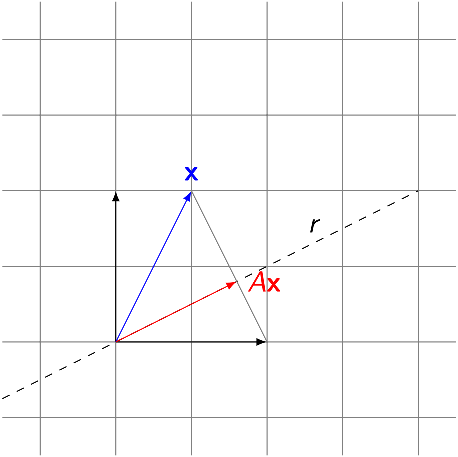


Note que $T(\mathbf{e}_1) = \cos\theta \mathbf{e}_1 + \sin\theta \mathbf{e}_2$ e $T(\mathbf{e}_2) = -\sin\theta \mathbf{e}_1 + \cos\theta \mathbf{e}_2$

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Projeção ortogonal no plano

Dada uma reta que passa pela origem $r : (0, 0) + s\mathbf{v}$, achar a matriz da projeção ortogonal sobre esta reta



Agora precisamos lembrar como é a fórmula da projeção, que a gente já fez.

$$\operatorname{proj}_r(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v}$$

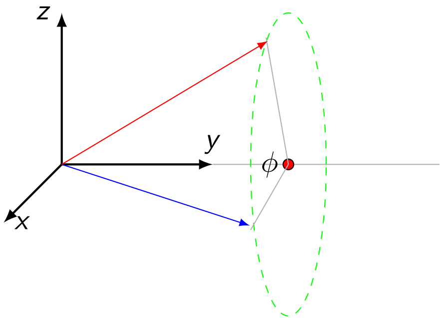
Se colocamos $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ então $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{v} = v_1$ e $\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{v} = v_2$.
Dessa forma

$$\operatorname{proj}_r(\mathbf{e}_1) = \begin{bmatrix} v_1^2/(v_1^2+v_2^2) \\ v_1 v_2/(v_1^2+v_2^2) \end{bmatrix} \text{ e } \operatorname{proj}_r(\mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} v_1 v_2/(v_1^2+v_2^2) \\ v_2^2/(v_1^2+v_2^2) \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{(v_1^2+v_2^2)} \begin{pmatrix} v_1^2 & v_1 v_2 \\ v_1 v_2 & v_2^2 \end{pmatrix}$$

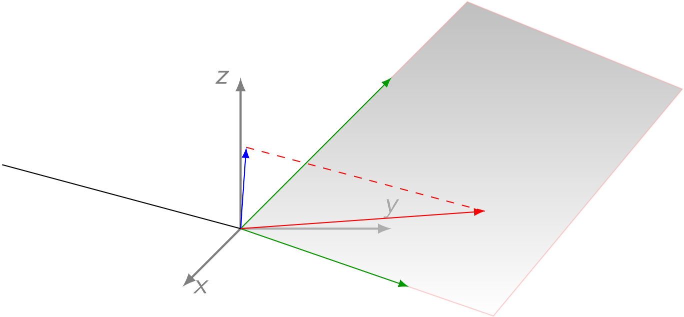
Exemplos em dimensão 3

Qual a matriz que define a rotação de uma ângulo ϕ em torno do eixo y, digamos.



$$A = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 & -\sin(\phi) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\phi) & 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Projeção ortogonal sobre um plano gerado pelos vetores **u** e **v**



Fazendo as contas

Vamos chamar

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

queremos encontrar α e β tais que

$$\text{proj}(\mathbf{x}) = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Condição de ortogonalidade

O vetor $\mathbf{x} - \text{proj}(\mathbf{x})$ deve ser ortogonal ao plano, e assim ortogonal aos vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ que nos fornece as equações

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{x} - \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}) = 0$$
$$\mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \alpha\mathbf{u} - \beta\mathbf{v}) = 0$$

ou

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = \alpha\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - \beta\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = \alpha\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \beta\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Resolvendo a equação para α e β temos

$$\begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$\text{proj}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\alpha \\ \beta\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$$A = \begin{bmatrix}u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_2\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix}u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3\end{bmatrix}$$

Verdadeiro ou Falso

1

Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear, então $T(0) = 0$

Verdadeiro ou Falso

2

Se $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é linear então só pode ser constante igual a zero.

Verdadeiro ou Falso

3

Se a matriz A tiver blocos quadrados

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & A_2 \end{bmatrix}$$

e A é invertível, então cada um dos blocos A_i é invertível.

Verdadeiro ou Falso

4

se $\wedge$ denotar o produto vetorial então temos que

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Verdadeiro ou Falso

5

$$A^T A\mathbf{x} = 0 \iff A\mathbf{x} = 0$$