Aula 9 – Análise de Fila Única com Buffer Finito

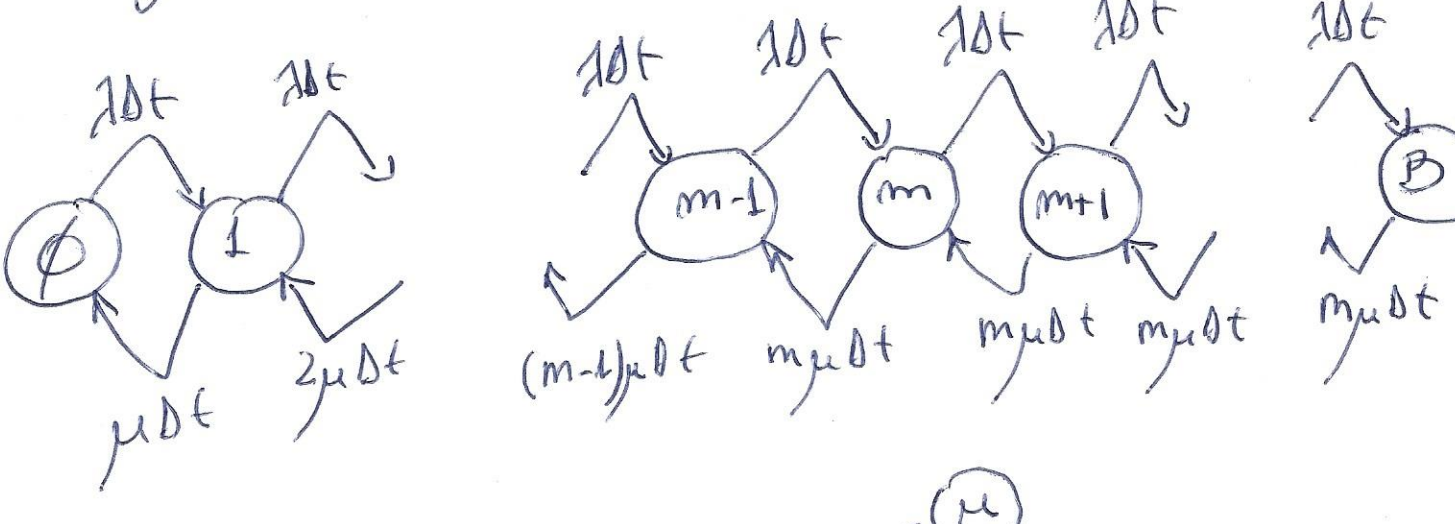
(M/M/m/B) (Cap 31 - Raj Jain)

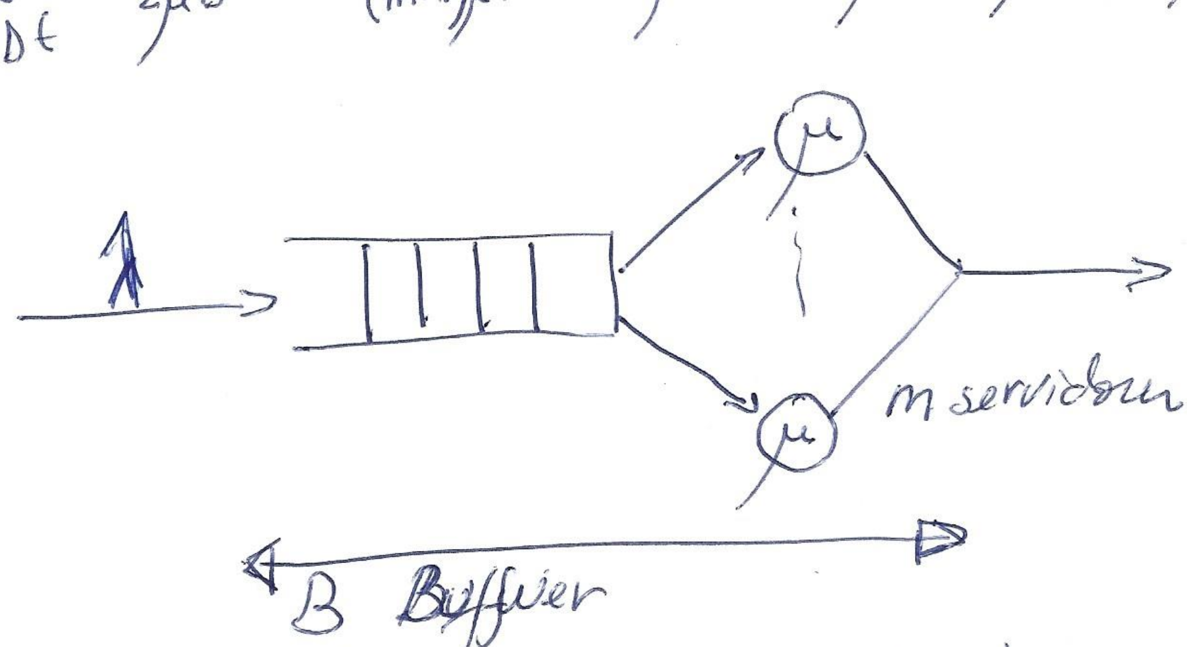
(1)

Esta estrutura é similar ao M/M/m exceto o número finito de buffers B. Após encher o buffer B, todas as demais chegadas são perdidas.

Assume-se que $B \geq m$, caso contrário alguns servidores nunca irão operar devido à falta de buffer.

Segue o diagrama de estados:





(contendo com m servidores)

Do processo "nascimento-morte" (2)

- $\lambda_n = \lambda \quad n = 0, 1, \ldots, B-1$

- $\mu_n = \begin{cases} n\mu, & n < m \\ m\mu, & n \geq m \quad n \leq B \ (m \leq n \leq B) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad p_n = \frac{\lambda_0 . \lambda_1 . \ldots . \lambda_{n-1}}{\mu_1 . \mu_2 \ldots \mu_n} . p_0$$

$$\begin{cases} \bullet \ p_n = \dfrac{\lambda^n}{n! \, \mu^n} . p_0 \quad (n < m) \\ \bullet \ p_n = \dfrac{\lambda^n}{m! \, \mu^n . (m)^{n-m}} . p_0 \quad (m \leq n \leq B) \end{cases}$$

A Intensidade de Tráfego é: $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu m} \Rightarrow \dfrac{\lambda}{\mu} = m . \rho$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bullet \ p_n = \dfrac{(m\rho)^n}{n!} . p_0 \quad (n < m) \\ \bullet \ p_n = \dfrac{(m . \rho)^n}{m! \, (m)^{n-m}} . p_0 \quad (m \leq n \leq B) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad p_n = \frac{m^m . \rho^n}{m!} . p_0$$

Como $\sum_{n=0}^{B} p_n = 1$

$$p_0 + p_1 + p_2 \text{ --- --- } + p_B = 1$$

$$p_0 + p_0 . \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + p_0 . \sum_{n=m}^{B} . \frac{\rho^n . m^m}{m!} = 1$$

$$p_0 + p_0 . \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + p_0 . \frac{(m\rho)^m}{m!} \underbrace{\sum_{n=m}^{B} . \rho^{n-m}}_{\underbrace{1 + \rho + \rho^2 + \cdots \rho^{B-m}}_{\text{PG de tamanho } (B-m+1)}} = 1$$

$$\sum PG = \frac{a_1(q^n - 1)}{(q-1)} = \frac{1(\rho^{B-m+1} - 1)}{(\rho - 1)}$$

$$\Downarrow$$

$$p_0 + p_0 . \sum_{n=1}^{m-1} \frac{(m\rho)^n}{n!} + p_0 \frac{(m\rho)^m}{m!} . \frac{(1-\rho^{B-m+1})}{(1-\rho)} = 1$$

O número médio de tarefas no sistema é:

$$E[n] = \sum_{n=1}^{B} . n . p_n$$

O número médio de tarefas na fila é:

$$E[n_q] = \sum_{n=m+1}^{B} (n-m) . p_n$$

Como todas as chegadas ao sistema, quando ele já contém B tarefas ($n = B$), são perdidas, pode-se calcular a Taxa de Chegada Efetiva:

$$\lambda' = \sum_{n=0}^{B-1} \lambda . p_n = \lambda . \sum_{n=0}^{B-1} p_n$$

$$\boxed{\lambda' = \lambda (1 - p_B)}$$

$p_B \rightarrow$ [probabilidade do Sistema Cheio

Dessa forma, a Taxa de Perda de Pacote é:

$$\lambda - \lambda' = \underline{\underline{\lambda . p_B}}$$

Para as tarefas que não são perdidas (já estão internas ao sistema) a Lei de Little pode ser aplicada:

$$E[n] = \lambda' . E[r]$$

$$\Rightarrow E[r] = \frac{E[n]}{\lambda'} = \frac{E[n]}{\lambda(1-p_B)}$$ Tempo Médio de Resposta.

Da mesma forma,

$$E[w] = \frac{E[n_q]}{\lambda'} = \frac{E[n_q]}{\lambda(1-p_B)}$$ Tempo Médio de Espera na Fila.

Qual a taxa de utilização por servidor?

Vamos observar o sistema por um longo tempo T.
O número total de tarefas efetivamente chegando será: $\lambda' \cdot T$

O tempo total de uso dos m servidores será $\frac{\lambda' T}{\mu}$, e assim o tempo de uso de cada servidor será $\left(\frac{\lambda' T}{\mu}\right)/m$.

Dessa forma o fator de utilização de cada servidor será:

$$U = \frac{\left(\frac{\lambda' T}{\mu}\right)/m}{T} \Rightarrow U = \frac{\lambda'}{\mu m}$$

$$\Rightarrow U = \frac{\lambda(1-p_B)}{\mu \cdot m} \Rightarrow \boxed{U = \rho\,(1-p_B)}$$

Qual a probabilidade de uma tarefa chegar e esperar na fila?

$$\sigma = P(m \leq n \leq B) = p_m + p_{m+1} + \cdots + p_B$$

$$= \sum_{n=m}^{B} \frac{m^m \cdot \rho^n}{m!} \cdot p_0 = \frac{m^m}{m!} \cdot p_0 \sum_{n=m}^{B} \rho^n$$

$$= p_0 \cdot \frac{(m \cdot \rho)^m}{m!} \cdot \underbrace{\sum_{n=m}^{B} \rho^{n-m}}_{\left(\frac{1-\rho^{B-m+1}}{1-\rho}\right)} \quad (*) \text{ pg } 3$$

$$\Rightarrow \sigma = p_0 \cdot \frac{(m\rho)^m}{m!} \cdot \left(\frac{1-\rho^{B-m+1}}{1-\rho}\right)$$

Vazão do Sistema $= \mu \overbrace{(1-p_0)}^{\text{Fator de Utilização}}$ para $M/M/1/B$

$$p_0 + p_0 \cdot \rho \frac{(1-\rho^B)}{(1-\rho)} = 1 \qquad p_0 \cdot \frac{(1-\rho) + \rho(1-\rho^B)}{(1-\rho)} = 1$$

$$p_0 = \frac{(1-\rho)}{(1-\rho) + \rho(1-\rho^B)} \qquad (1-p_0) = \frac{\cancel{(1-\rho)} + \rho(1-\rho^B) - \cancel{(1-\rho)}}{(1-\rho) + \rho(1-\rho^B)}$$

$$p_0 = \frac{\rho(1-\rho^B)}{(1-\rho) + \rho(1-\rho^B)} \qquad \text{VAZÃO} = \overbrace{\frac{\lambda}{\cancel{\rho}}}^{\mu} \cdot \frac{\cancel{\rho}(1-\rho^B)}{(1-\rho) + \rho(1-\rho^B)}$$

$$\boxed{\text{VAZÃO} = \lambda \cdot \frac{(1-\rho^B)}{(1-\rho^{B+1})}}$$

Exemplo 1: mesmo problema (Exemplo 1) apresentado na página 10 da Aula 8, considerando a existência de apenas 2 buffers, podendo modelar o sistema na forma M/M/1/2.

$\lambda = 125 \quad \mu = 500 \quad B = 2 \quad m = 1$

- Intensidade de Tráfego

$$\rho = \frac{\lambda}{m\mu} = \frac{125}{1.500} = 0,25$$

- $p_1 = \rho . p_0 = 0,25 . p_0$
- $p_2 = \frac{\rho^2}{1!} . p_0 = 0,25^2 . p_0 = 0,0625 . p_0$
- $p_0 + p_1 + p_2 = 1 \longrightarrow \begin{cases} p_0 = 0,76 \\ p_1 = 0,19 \\ p_2 = 0,0476 \end{cases}$

- Número Médio de Pacotes no Gateway:

$$E[n] = \sum_{n=1}^{2} n . p_n = p_1 + 2 . p_2$$

$$E[n] = 1 . 0,19 + 2 . 0,0476 \Rightarrow \underline{\underline{E[n] = 0,29}}$$

- Número Médio de Pacotes na Fila:

$$E[n_q] = \sum_{n=m+1}^{B} (n-m) . p_n = (2-1) . p_2 = (2-1) . 0,0476$$

$$\underline{\underline{E[n_q] = 0,0476}}$$

- Taxa Efetiva de Chegada:

$\lambda' = \lambda(1-p_B)$

$\lambda' = \lambda(1-p_2) = 125(1-0{,}0476)$

$\Rightarrow \underline{\lambda' = 119\,pps}$ (VAZÃO).

- Taxa de Perda de Pacotes.

$\lambda_p = \lambda - \lambda' = 125 - 119 \Rightarrow \underline{\lambda_p = 6\,pps}$

- Tempo Médio de Resposta.

$E[r] = \frac{E[n]}{\lambda'} = \frac{E[n]}{\lambda(1-p_B)} = \frac{0{,}29}{119} \Rightarrow \underline{E[r] = 2{,}40 . 10^{-3}\,s}$

- Tempo Médio de espera na Fila

$E[w] = \frac{E[n_q]}{\lambda'} = \frac{0{,}0476}{119} \Rightarrow \underline{E[w] = 4 . 10^{-4}\,seg}$

- Variância do número Médio de Pacotes no Gateway:

$Var[n] = E[n^2] - (E[n])^2 = (1^2 \cdot 0{,}19 + 2^2 \cdot 0{,}0476) - (0{,}29)^2$

$\underline{Var[n] = 0{,}2963}$

<u>Obs</u>: Comparar com <u>Exemplo 1</u> (<u>M/M/1</u>) da <u>Aula 8</u>.