

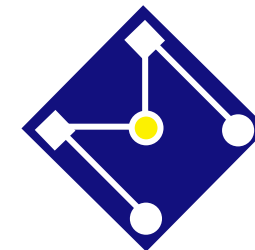


# PMR5026

## Método dos Elementos Finitos Linear

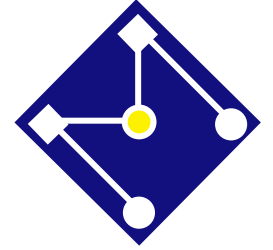
COMENTÁRIOS SOBRE ANÁLISE  
DINÂMICA E FECHAMENTO DO CURSO

Larissa Driemeier



# CRONOGRAMA TEORIA

AULA	CONTEÚDO	DATA [2 <sup>ª</sup> ]	PROFESSOR
1	Modelagem em engenharia e Mecânica dos Sólidos Introdução ao Método dos Elementos Finitos	17/2	Rafael
2	Elementos finitos 1D – estático Ensaio experimental e modelos de material	02/3	Rafael
3	Elementos finitos 1D - dinâmico	09/3	Marcilio
4	Elementos Finitos de viga - estático	16/3	Marcilio
5	Elementos Finitos de viga - dinâmico	23/3	Marcilio
6	Elementos Finitos de viga - análise modal	30/3	Marcilio
7	Ensaio experimental: vibrações em viga	13/4	Rafael
8	Elementos finitos isoparamétricos – estático	27/4	Larissa
9	Elementos finitos isoparamétricos – Integração numérica	04/05	Larissa
10	Elementos finitos isoparamétricos – dinâmico	11/05	Larissa
11	Ensaio experimental: vibrações em placa	18/05	Rafael



# PROBLEMA!

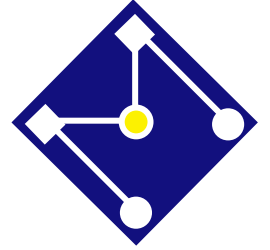
$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = F$$

Dado um carregamento conhecido (no tempo e espaço), obtenha a resposta da estrutura (no tempo e espaço). Ou seja, obtenha, para estrutura carregada, a cada instante de tempo,

Deslocamento,

Velocidade,

Aceleração



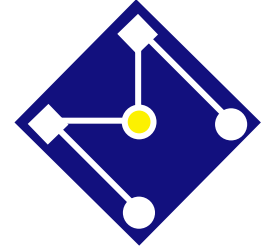
# MÉTODOS DE SOLUÇÃO

## SUPERPOSIÇÃO MODAL

- Desacoplamento das equações de equilíbrio.

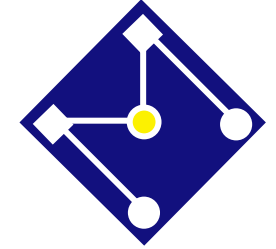
## INTEGRAÇÃO DIRETA

- Nenhuma transformação das equações em outra forma é efetuada.



# INTEGRAÇÃO DIRETA

- Na integração direta as equações diferenciais são integradas utilizando-se um procedimento numérico passo-a-passo.
- O procedimento é baseado em duas ideias,
  - Ao invés de tentar satisfazer as equações para qualquer instante  $t$ , procura-se a solução em instantes discretos  $t_1, t_2, \dots, t_n$  separados por um intervalo  $\Delta t$ ;
  - Assume-se uma variação de deslocamento, velocidade e aceleração dentro do intervalo  $\Delta t$  – a forma de variação que irá determinar a acurácia, estabilidade e custo computacional do método.



$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$$

## Explícito

O conceito básico é escrever as equações de movimento para o instante inicial do passo de tempo, aproximar a velocidade inicial e a aceleração em termos de diferenças-finitas, então resolver para o instante de tempo final do passo.

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = f(\mathbf{u}_t, \dot{\mathbf{u}}_t, \ddot{\mathbf{u}}_t, \mathbf{u}_{t-\Delta t}, \dots)$$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{k}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t$$

Condicionalmente estável:  $\Delta t_{crit}$

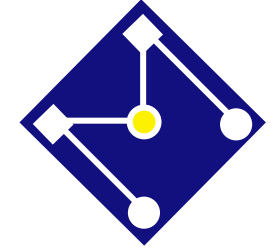
## Implícito

No método implícito, expressões para  $t + \Delta t$  usam a equação de equilíbrio em  $t + \Delta t$ .

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = f(\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}, \ddot{\mathbf{u}}_t, \mathbf{u}_t, \dots)$$

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{k}\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{p}_{t+\Delta t}$$

Incondicionalmente estável



# MÉTODO DA DIFERENÇA CENTRAL

- Usando-se a série de Taylor, para incrementos  $\Delta t$  e  $-\Delta t$ , tem-se que

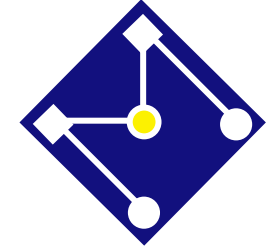
$$\mathbf{d}_{t+\Delta t} = \mathbf{d}_t + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_t + \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{\mathbf{d}}_t + \dots \quad (1)$$

$$\mathbf{d}_{t-\Delta t} = \mathbf{d}_t - \Delta t \dot{\mathbf{d}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_t - \frac{\Delta t^3}{6} \dddot{\mathbf{d}}_t + \dots \quad (2)$$

① - ②  $\dot{\mathbf{d}}_t = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{d}_{t+\Delta t} - \mathbf{d}_{t-\Delta t})$

① + ②  $\ddot{\mathbf{d}}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{d}_t + \mathbf{d}_{t+\Delta t})$

(desprezando-se os termos  $\Delta t^3$  e de maior grau)



$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}}_t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_t + \mathbf{K}\mathbf{d}_t = \mathbf{F}_t$$

$$\ddot{\mathbf{d}}_t = \frac{1}{\Delta t^2} (\mathbf{d}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{d}_t + \mathbf{d}_{t+\Delta t})$$

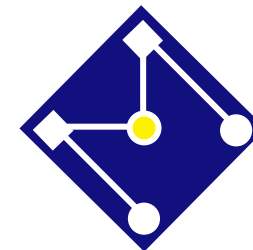
$$\dot{\mathbf{d}}_t = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{d}_{t+\Delta t} - \mathbf{d}_{t-\Delta t})$$

$$\left( \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{d}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_t - \mathbf{K}\mathbf{d}_t + \frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M}(2\mathbf{d}_t - \mathbf{d}_{t-\Delta t}) + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C}\mathbf{d}_{t-\Delta t}$$

O deslocamento  $\mathbf{d}_{t+\Delta t}$  é completamente determinado a partir do conhecimento dos deslocamentos nos instantes anteriores  $t$  e  $t - \Delta t$ . Por esse motivo, o processo de integração é chamado de **método explícito**.

Se  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{C}$  forem diagonais as equações serão desacopladas e  $\mathbf{d}_{t+\Delta t}$  pode ser obtido sem a necessidade de resolver todas as equações simultaneamente.





# ASPECTOS COMPUTACIONAIS

Perceba que os valores em  $t$  e  $t - \Delta t$  são necessários, portanto, necessita-se de um processo inicial especial ( $t = 0$ ). Supõe-se, para  $t = 0$

$$\mathbf{d}_0, \dot{\mathbf{d}}_0, \mathbf{F}_0 \rightarrow \text{dados do problema}$$

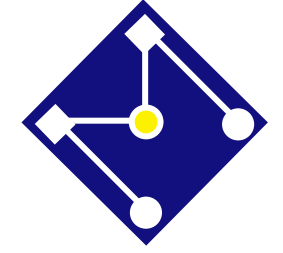
Mas  $\ddot{\mathbf{d}}_0$  é calculado a partir da equação de equilíbrio:

$$\ddot{\mathbf{d}}_0 = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{F}_0 - \mathbf{K}\mathbf{d}_0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}}_0]$$

Da equação (2),

$$\mathbf{d}_{-\Delta t} = \mathbf{d}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{d}}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_0$$

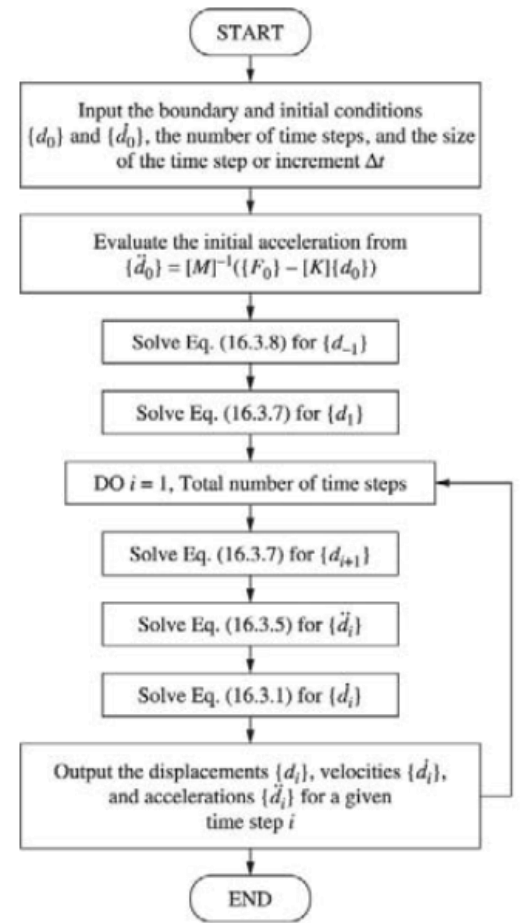
$$\mathbf{d}_{t-\Delta t} = \mathbf{d}_t - \Delta t \dot{\mathbf{d}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_t$$

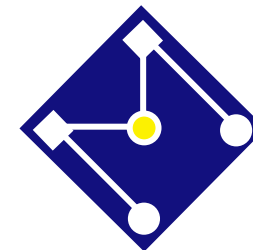


# ALGORITMO

1.  $d_0, \dot{d}_0, F_0$
2.  $\ddot{d}_0 = M^{-1}[F_0 - Kd_0 - C\dot{d}_0]$
3.  $d_{-1} = d_0 - \Delta t\dot{d}_0 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{d}_0$
4.  $d_1 = \left(\frac{1}{\Delta t^2}M + \frac{1}{2\Delta t}C\right)^{-1} \left[F_0 - Kd_0 + \frac{1}{\Delta t^2}M(2d_0 - d_{-1}) + \frac{1}{2\Delta t}Cd_{-1}\right]$
5.  $d_2 = \left(\frac{1}{\Delta t^2}M + \frac{1}{2\Delta t}C\right)^{-1} \left[F_1 - Kd_1 + \frac{1}{\Delta t^2}M(2d_1 - d_0) + \frac{1}{2\Delta t}Cd_0\right]$
6.  $\ddot{d}_1 = M^{-1}[F_1 - Kd_1 - C\dot{d}_1]$
7.  $\dot{d}_1 = \frac{d_2 - d_0}{2\Delta t}$

Repetir 5,6,7 para obter deslocamento, aceleração e velocidade nos próximos passos de tempo.





# INTEGRAÇÃO EXPLÍCITA

A integração explícita é condicionalmente estável, isto é, estável para  $\Delta t$  menor que um valor crítico,

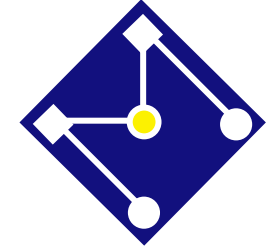
$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}}$$

onde  $\det(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) = 0$ , i é,  $\omega_{max}$  é a frequência natural mais alta.

Intervalo crítico é o tempo necessário para uma onda se propagar dentro do elemento:

$$\Delta t_{cr} = \frac{L_{mesh}}{c} = \frac{L_{mesh}}{\sqrt{E/\rho}}$$

Barra 1D



# ANSYS/LS-DYNA Time Step Size

- ANSYS/LS-DYNA checks all elements when calculating the required time step. For stability reasons a scale factor 0.9 (default) is used to decrease the time step:

$$\Delta t = 0.9 \frac{l}{c}$$

- The characteristic length  $l$  and the wave propagation velocity  $c$  is dependent on element type:
  - Beam elements:

$l = \text{length of the element}$

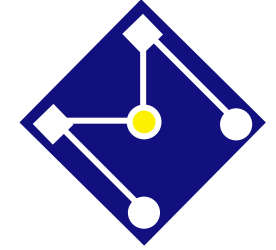
$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- Shell elements:

$$l = \frac{A}{\max(l_1, l_2, l_3, l_4)}, \text{ for triangular shells: } l = \frac{2A}{\max(l_1, l_2, l_3)}$$

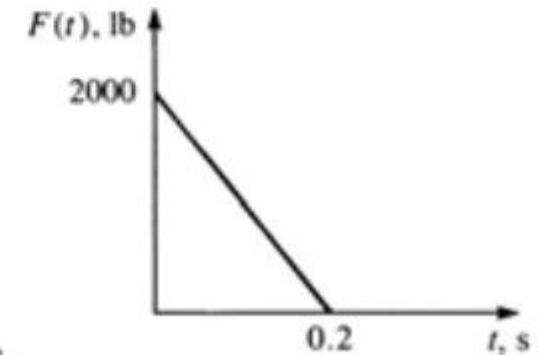
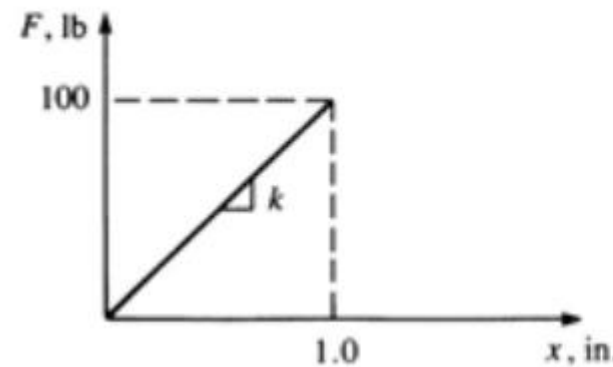
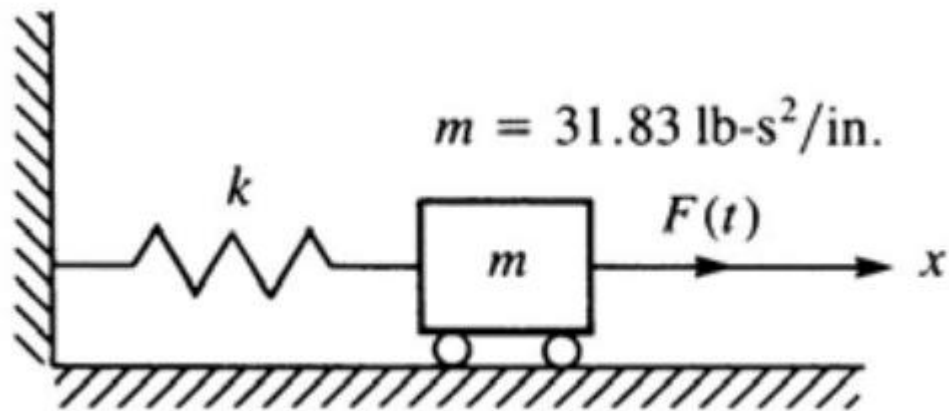
$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho(1-\nu^2)}}$$

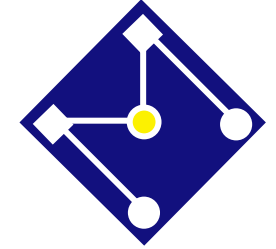




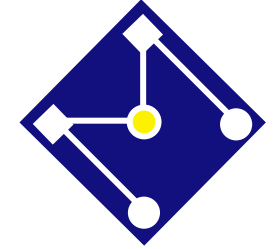
# EXEMPLO

- Determine o deslocamento, aceleração e velocidade em 0,05 segundos, com intervalos de tempo de até 0,2 segundos, para o sistema de massa de mola unidimensional mostrado na figura abaixo.

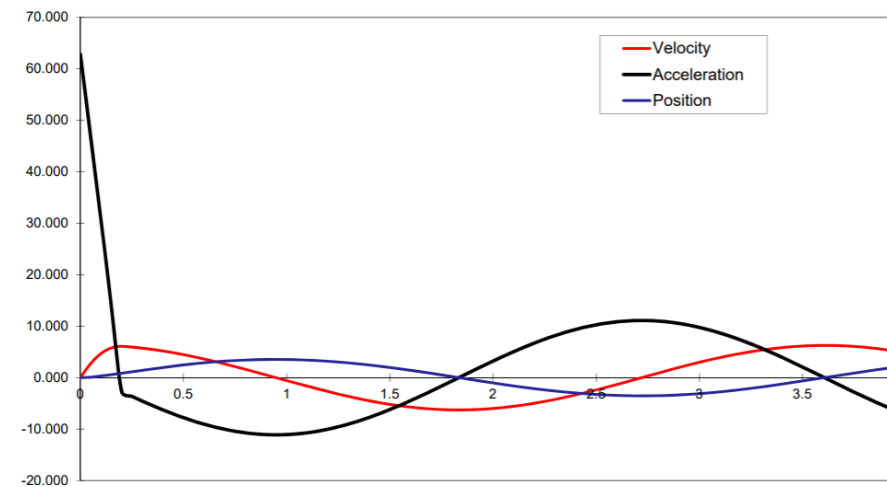


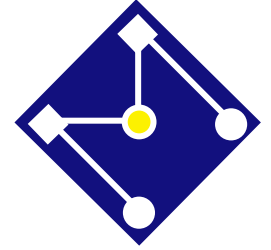


1.  $d_0 = \dot{d}_0 = 0, F_0 = 2000$
2.  $\ddot{d}_0 = M^{-1}[F_0 - Kd_0 - C\dot{d}_0] = \frac{1}{31.83} [2000 - 100 \times 0] = 62.83 \text{ in/s}^2$
3.  $d_{-1} = d_0 - \Delta t \dot{d}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{d}_0 = 0 - 0.05 \times 0 + \frac{0.05^2}{2} 62.83 = 0.0785 \text{ in}$
4.  $d_1 = \left( \frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right)^{-1} \left[ F_0 - Kd_0 + \frac{1}{\Delta t^2} M(2d_0 - d_{-1}) + \frac{1}{2\Delta t} C d_{-1} \right]$   
 $d_1 = \left( \frac{1}{0.05^2} 31.83 \right)^{-1} \left[ 2000 - 100 \times 0 + \frac{1}{0.05^2} 31.83(2 \times 0 - 0.0785) \right] = 0.0786 \text{ in}$
5.  $d_2 = \left( \frac{1}{\Delta t^2} M + \frac{1}{2\Delta t} C \right)^{-1} \left[ F_1 - Kd_1 + \frac{1}{\Delta t^2} M(2d_1 - d_0) + \frac{1}{2\Delta t} C d_0 \right]$   
 $d_2 = \left( \frac{1}{0.05^2} 31.83 \right)^{-1} \left[ 1500 - 100 \times 0.0786 + \frac{1}{0.05^2} 31.83(2 \times 0.0786 - 0) \right] = 0.274 \text{ in}$
6.  $\ddot{d}_1 = M^{-1}[F_1 - Kd_1 - C\dot{d}_1] = 31.83^{-1}[1500 - 100 \times 0.0784] = 46.88 \text{ in/s}^2$
7.  $\dot{d}_1 = \frac{d_2 - d_0}{2\Delta t} = \frac{0.274 - 0}{2 \times 0.05} = 2.74 \text{ in/s}$



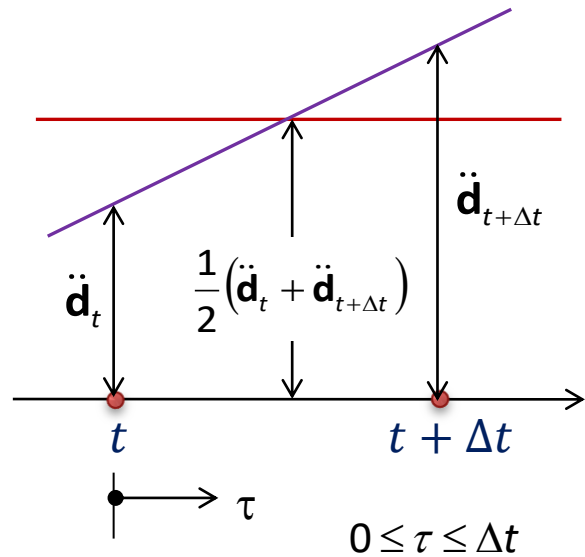
$t$ (s)	$F(t)$ (lb)	$\ddot{d}_i$ (in/s <sup>2</sup> )	$\dot{d}_i$ (in/s)	$d_i$ (in)	$d_i$ (exact)
0.00	2,000	62.8338	0.0000	0.0000	0.0000
0.05	1,500	46.8786	2.7428	0.0785	0.0718
0.10	1,000	30.5552	4.6787	0.2743	0.2603
0.15	500	13.9918	5.7923	0.5464	0.5252
0.20	0	-2.6815	6.0751	0.8535	0.8250
0.25	0	-3.6252	5.9174	1.1539	1.132





# MÉTODOS IMPLÍCITOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA

- A maioria dos métodos implícitos é incondicionalmente estável: grandes intervalos de tempo mantêm a solução estável, apesar de comprometer a precisão da solução.



Método da  
aceleração linear

$$\ddot{\mathbf{d}}(\tau) = \ddot{\mathbf{d}}_t + \frac{\tau}{\Delta t} [\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{d}}_t]$$

$$\dot{\mathbf{d}}(\tau) = \dot{\mathbf{d}}_t + \tau \ddot{\mathbf{d}}_t + \frac{\tau^2}{2\Delta t} [\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{d}}_t]$$

$$\mathbf{d}(\tau) = \mathbf{d}_t + \tau \dot{\mathbf{d}}_t + \frac{\tau^2}{2} \ddot{\mathbf{d}}_t + \frac{\tau^3}{6\Delta t} [\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{d}}_t]$$

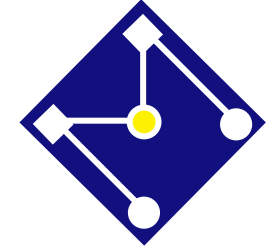
Método da  
aceleração  
média

$$\ddot{\mathbf{d}}(\tau) = \frac{1}{2} [\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{d}}_t]$$

$$\dot{\mathbf{d}}(\tau) = \dot{\mathbf{d}}_t + \frac{\tau}{2} [\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{d}}_t]$$

$$\mathbf{d}(\tau) = \mathbf{d}_t + \tau \dot{\mathbf{d}}_t + \frac{\tau^2}{4\Delta t} [\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} - \ddot{\mathbf{d}}_t]$$





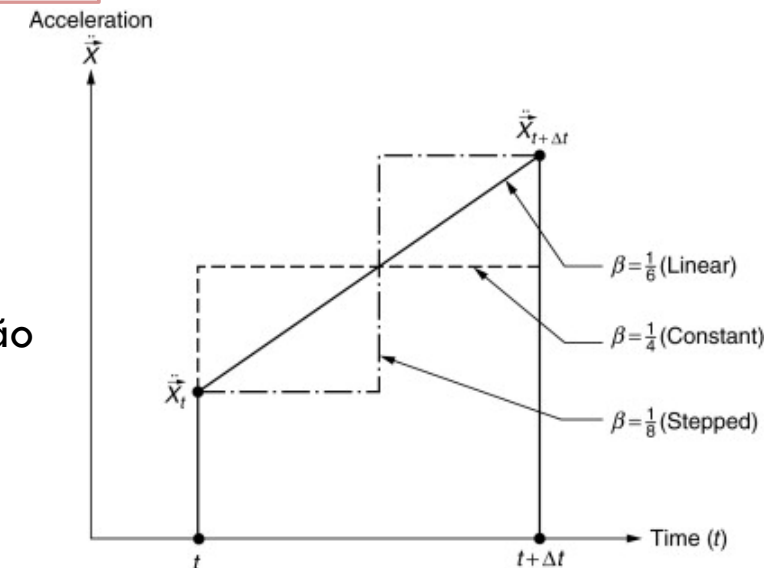
# MÉTODO IMPLÍCITO (NEWMARK)

$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{d}}_t + [(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{d}}_t + \gamma\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}]\Delta t \quad (1)$$

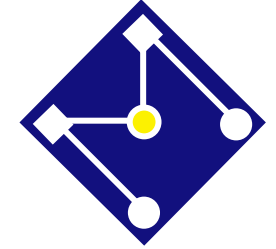
$$\mathbf{d}_{t+\Delta t} = \mathbf{d}_t + \dot{\mathbf{d}}_t\Delta t + [(1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{d}}_t + 2\beta\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}]\frac{\Delta t^2}{2} \quad (2)$$

Um sistema não amortecido ( $C = 0$ ) é condicionalmente estável se  $\gamma \geq 1/2$  e incondicionalmente estável se  $\gamma \geq 1/2$  e  $\beta \geq 1/4 (\gamma + 1/2)^2$ . No entanto,  $\gamma > 1/2$  introduz um amortecimento artificial na solução. Daí justifica-se a escolha para solução incondicionalmente estável  $\gamma = 1/2$  e  $\beta = 1/4$  (levando à aproximação de aceleração média). Se  $\beta$  for escolhido como  $1/6$ , o método será chamado de método de aceleração linear, apenas condicionalmente estável. Em geral, para  $\beta \leq 1/2$  e  $\gamma \geq 1/2$ ,

$$\Delta t \leq \frac{1}{\omega_{max} \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}}$$



$\beta = 0$  only if  $\ddot{\mathbf{x}}_t = \ddot{\mathbf{x}}_{t+\Delta t} = \text{constant}$  in between  $t$  and  $t + \Delta t$



# ASPECTOS COMPUTACIONAIS

De **2**:  
em **1**  
Resulta:

$$\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}_{t+\Delta t} - \mathbf{d}_t - \dot{\mathbf{d}}_t \Delta t) - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{d}}_t$$

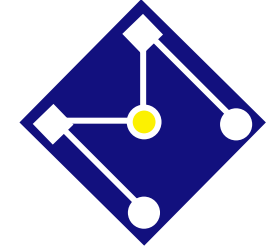
$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{d}}_t + [(1 - \gamma)\dot{\mathbf{d}}_t + \gamma \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}] \Delta t$$

$$(1) \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{d}}_t + [(1 - \gamma)\dot{\mathbf{d}}_t + \gamma \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}] \Delta t$$

$$(2) \mathbf{d}_{t+\Delta t} = \mathbf{d}_t + \dot{\mathbf{d}}_t \Delta t + [(1 - 2\beta)\dot{\mathbf{d}}_t + 2\beta \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}] \frac{\Delta t^2}{2}$$

$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{d}_{t+\Delta t} - \mathbf{d}_t) - \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{d}}_t - \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{d}}_t$$

Nas equações acima tem-se  $\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}$  e  $\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}$  em função de valores de deslocamento no instante  $t + \Delta t$  e velocidades e acelerações no instante  $t$ .



$$\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (\mathbf{d}_{t+\Delta t} - \mathbf{d}_t - \dot{\mathbf{d}}_t \Delta t) - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{d}}_t$$

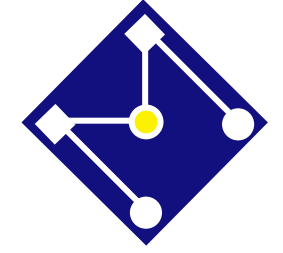
$$\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} (\mathbf{d}_{t+\Delta t} - \mathbf{d}_t) - \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{d}}_t - \Delta t \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{d}}_t$$

Das equações anteriores, substitui-se  $\dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}$  e  $\ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t}$  em,

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K} \mathbf{d}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t}$$

Problema implícito:

$$(\mathbf{M} + \beta \Delta t^2 \mathbf{K} + \gamma \Delta t \mathbf{C}) \mathbf{d}_{t+\Delta t} = \beta \Delta t^2 \mathbf{F}_{t+\Delta t} + (\mathbf{M} + \gamma \Delta t \mathbf{C}) \mathbf{d}_t + [\Delta t \mathbf{M} + (\gamma - \beta) \Delta t^2 \mathbf{C}] \dot{\mathbf{d}}_t + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \mathbf{M} + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2} - \beta \right) \mathbf{C} \right] \ddot{\mathbf{d}}_t$$



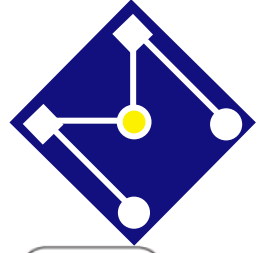
$$(\mathbf{M} + \beta\Delta t^2\mathbf{K} + \gamma\Delta t\mathbf{C})\mathbf{d}_{t+\Delta t} = \beta\Delta t^2\mathbf{F}_{t+\Delta t} + (\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C})\mathbf{d}_t + [\Delta t\mathbf{M} + (\gamma - \beta)\Delta t^2\mathbf{C}]\dot{\mathbf{d}}_t + \Delta t^2 \left[ \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\mathbf{M} + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)\mathbf{C} \right]\ddot{\mathbf{d}}_t$$



$$\mathbf{K}'\mathbf{d}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}'_{t+\Delta t}$$

$$\mathbf{K}' = \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \mathbf{K} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C}$$

$$\mathbf{F}'_{t+\Delta t} = \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{M} + \gamma\Delta t\mathbf{C})\mathbf{d}_t + \left[ \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{M} + \frac{(\gamma - \beta)}{\beta}\mathbf{C} \right]\dot{\mathbf{d}}_t + \frac{1}{\beta} \left[ \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\mathbf{M} + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)\mathbf{C} \right]\ddot{\mathbf{d}}_t$$



START

Input the boundary and initial conditions  $\{d_0\}$  and  $\{\dot{d}_0\}$ , the number of time steps, the size of the time step or increment  $\Delta t$ , and the values of  $\beta$  and  $\gamma$

Evaluate the initial acceleration from  $\{\ddot{d}_0\} = [M]^{-1}(\{F_0\} - [K]\{d_0\})$

DO  $i = 1$ , Total number of time steps

Solve Eq. (16.3.13) for  $\{d_{i+1}\}$ ; that is, solve  $[K']\{d_{i+1}\} = \{F'_{i+1}\}$

Solve Eqs. (16.3.10) and (16.3.9) for  $\{\dot{d}_{i+1}\}$  and  $\{\ddot{d}_{i+1}\}$

Output the displacements  $\{d_i\}$ , velocities  $\{\dot{d}_i\}$ , and accelerations  $\{\ddot{d}_i\}$  for a given time step  $i$

END

# ALGORITMO

1.  $d_0, \dot{d}_0, F_0$

2.  $\ddot{d}_0 = M^{-1}[F_0 - Kd_0 - C\dot{d}_0]$

3.  $K'd_1 = F'_1$

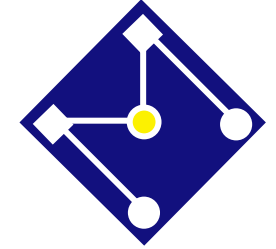
- $K' = \frac{1}{\beta\Delta t^2}M + K + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}C$

- $F'_1 = F_1 + \frac{1}{\beta\Delta t^2}(M + \gamma\Delta tC)d_0 + \left[\frac{1}{\beta\Delta t}M + \frac{(\gamma-\beta)}{\beta}C\right]\dot{d}_0 + \frac{1}{\beta}\left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)M + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)C\right]\ddot{d}_0$

4.  $\ddot{d}_1 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(d_1 - d_0 - \dot{d}_0\Delta t) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{d}_0$

5.  $\dot{d}_1 = \dot{d}_0 + [(1 - \gamma)\ddot{d}_0 + \gamma\ddot{d}_1]\Delta t$

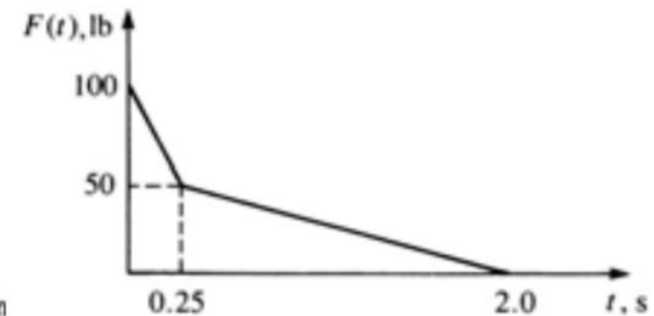
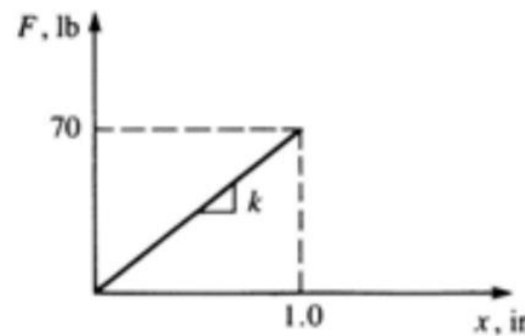
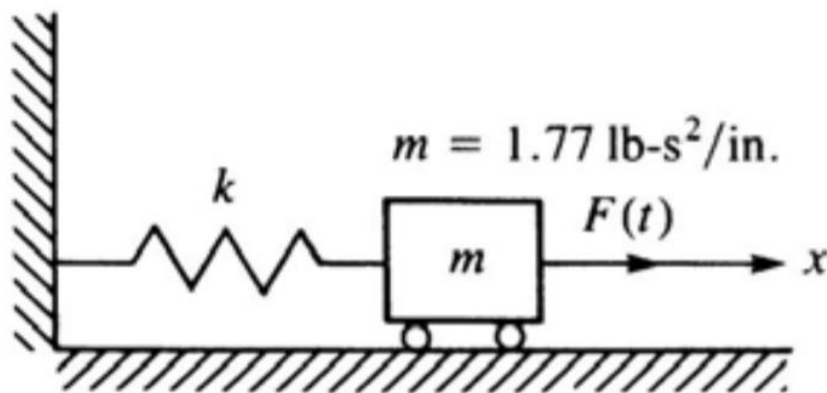
Repetir 3,4,5 para obter deslocamento, aceleração e velocidade nos próximos passos de tempo.

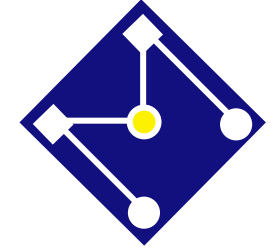


# EXEMPLO

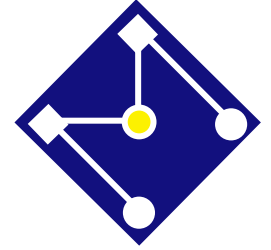
Determine o deslocamento, aceleração e velocidade em 0,1 segundos, intervalos de tempo de até 0,5 segundos, para o sistema de massa elástica unidimensional mostrado na figura abaixo.

Use o método da Newmark com  $\beta = 1/6$  e  $\beta = 1/2$ .





1.  $d_0 = 0, \dot{d}_0 = 0, F_0 = 100$
2.  $\ddot{d}_0 = M^{-1}[F_0 - Kd_0] = 1.77^{-1}[100 - 70 \times 0] = 56.5 \text{ in/s}^2$
3.  $K'd_1 = F'_1 \rightarrow d_1 = \frac{280}{1.132} = 0.248 \text{ in}$ 
  - $K' = \frac{1}{\beta\Delta t^2}M + K + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}C = \frac{1}{\frac{1}{6}0.1^2}1.77 + 70 = 1.132 \text{ lb/in}$
  - $F'_1 = F_1 + \frac{1}{\beta\Delta t^2}(M + \gamma\Delta tC)d_0 + \left[\frac{1}{\beta\Delta t}M + \frac{(\gamma-\beta)}{\beta}C\right]\dot{d}_0 + \frac{1}{\beta}\left[\left(\frac{1}{2} - \beta\right)M + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2} - \beta\right)C\right]\ddot{d}_0$   
 $= 80 + \frac{1}{\frac{1}{6}0.1^2}1.77 \times 0 + \left[\frac{1}{\frac{1}{6}0.1}1.77\right]0 + 6\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)1.77\right]56.5 = 280 \text{ lb}$
4.  $\ddot{d}_1 = \frac{1}{\beta\Delta t^2}(d_1 - d_0 - \dot{d}_0\Delta t) - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{d}_0 = \frac{1}{\frac{1}{6}0.1^2}(0.248 - 0 - 0 \times 0.1) - \left(\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{6}} - 1\right)56.5 = 35.4 \text{ in/s}^2$
5.  $\dot{d}_1 = \dot{d}_0 + \left[(1 - \gamma)\ddot{d}_0 + \gamma\ddot{d}_1\right]\Delta t = 0 + \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right)56.5 + \frac{1}{2}35.4\right]0.1 = 4.59 \text{ in/s}$



## Repetir 3,4,5:

$$3. \quad K' d_2 = F'_2 \rightarrow d_2 = \frac{934}{1.132} = 0.825 \text{ in}$$

$$\bullet \quad K' = \frac{1}{\beta \Delta t^2} M + K + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C = \frac{1}{\frac{1}{6} 0.1^2} 1.77 + 70 = 1.132 \text{ lb/in}$$

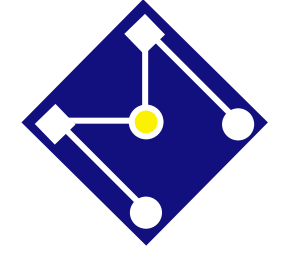
$$\bullet \quad F'_2 = F_2 + \frac{1}{\beta \Delta t^2} (M + \gamma \Delta t C) d_1 + \left[ \frac{1}{\beta \Delta t} M + \frac{(\gamma - \beta)}{\beta} C \right] \dot{d}_1 + \frac{1}{\beta} \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) M + \Delta t \left( \frac{\gamma}{2} - \beta \right) C \right] \ddot{d}_1$$

$$= 80 + \frac{1}{\frac{1}{6} 0.1^2} 1.77 \times 0.248 + \left[ \frac{1}{\frac{1}{6} 0.1} 1.77 \right] 4.59 + 6 \left[ \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) 1.77 \right] 35.4 = 934 \text{ lb}$$

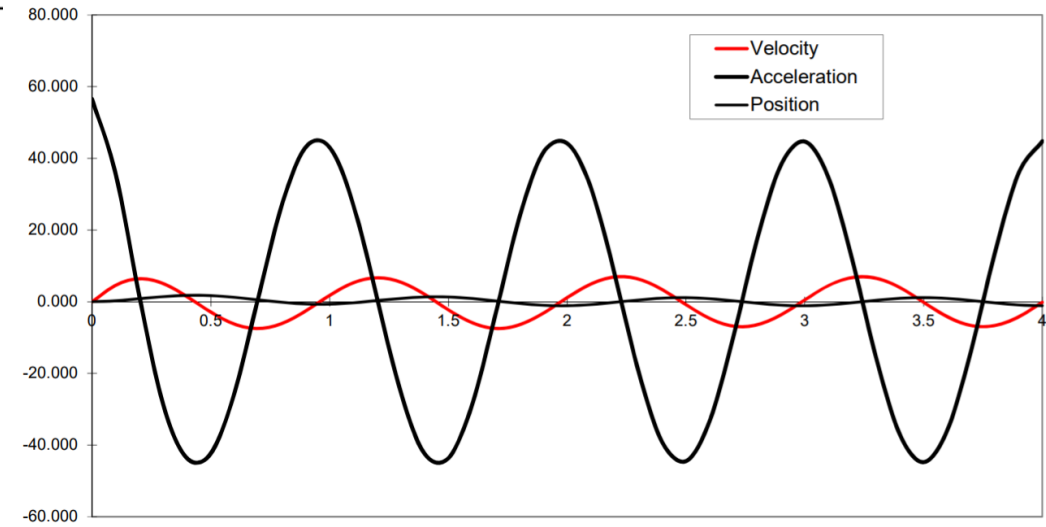
$$4. \quad \ddot{d}_2 = \frac{1}{\beta \Delta t^2} (d_2 - d_1 - \dot{d}_1 \Delta t) - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{d}_1 = \frac{1}{\frac{1}{6} 0.1^2} (0.825 - 0.248 - 4.59 \times 0.1) - \left( \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{6}} - 1 \right) 35.4 = 1.27 \text{ in/s}^2$$

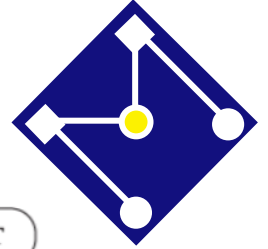
$$5. \quad \dot{d}_2 = \dot{d}_1 + \left[ (1 - \gamma) \ddot{d}_1 + \gamma \ddot{d}_2 \right] \Delta t = 4.59 + \left[ \left( 1 - \frac{1}{2} \right) 35.4 + \frac{1}{2} 1.27 \right] 0.1 = 6.42 \text{ in/s}$$



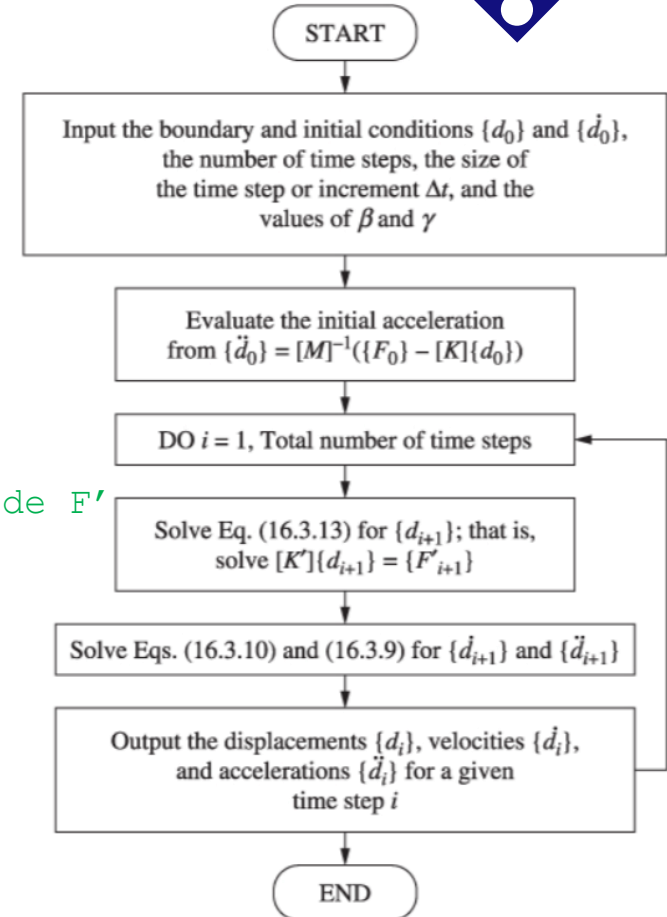


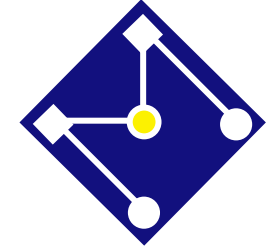
$t$ (s)	$F(t)$ lb	$\ddot{d}_i$ (in/s <sup>2</sup> )	$\dot{d}_i$ (in/s)	$d_i$ (in)
0.0	100	56.4972	0.0000	0.0000
0.1	80	35.4155	4.5956	0.2473
0.2	60	1.1939	6.4261	0.8270
0.3	48.5714	-28.9276	5.0394	1.4253
0.4	45.7143	-43.7731	1.4044	1.7599
0.5	42.8571	-42.3776	-2.9031	1.6838





```
function [tp,x] = newmark(M,C,K,F,tspan,n,x0,xd0)
% M, C, K matrizes de massa, amortecimento e rigidez
% (multiplicam xddot, xdot e x, respectivamente)
% F é o vetor coluna de forças externas. x0, xd0 são valores iniciais de x e xdot
% tspan = [t_initial t_final]; n é tspan/t_increment
dt = (tspan(2)-tspan(1))/n;
tp(1) = tspan(1);
x(:,1) = x0';
xd(:,1) = xd0';
gamma = 1/2; beta = 1/4;
A = (1/(beta*dt^2))*M+(gamma/(beta*dt))*C+K; % cálculo de K'
invA = inv(A);
xdd(:,1) = inv(M) * (F(:,1)-C*xd(:,1)-K*x(:,1));
for i = 1:n
    B = (F(:,i+1)+...
        M*((1/(beta*dt^2))*x(:,i)+(1/(beta*dt))*xd(:,i)+ ...
        (1/(2*beta)-1)*xdd(:,i))+C*((gamma/(beta*dt))*x(:,i)+...
        (gamma/beta-1)*xd(:,i)+(gamma/beta-2)*(dt/2)*xdd(:,i))); % cálculo de F'
    x(:,i+1) = invA*B;
    xdd(:,i+1) = (1/(beta*dt^2))*(x(:,i+1)-x(:,i))...
        -(1/(beta*dt))*xd(:,i)-((1/(2*beta))-1)*xdd(:,i);
    xd(:,i+1) = xd(:,i)+(1-gamma)*dt*xdd(:,i)+gamma*dt*xdd(:,i+1);
    tp(i+1) = tp(i)+dt;
end
x = x';
```





# EXEMPLO

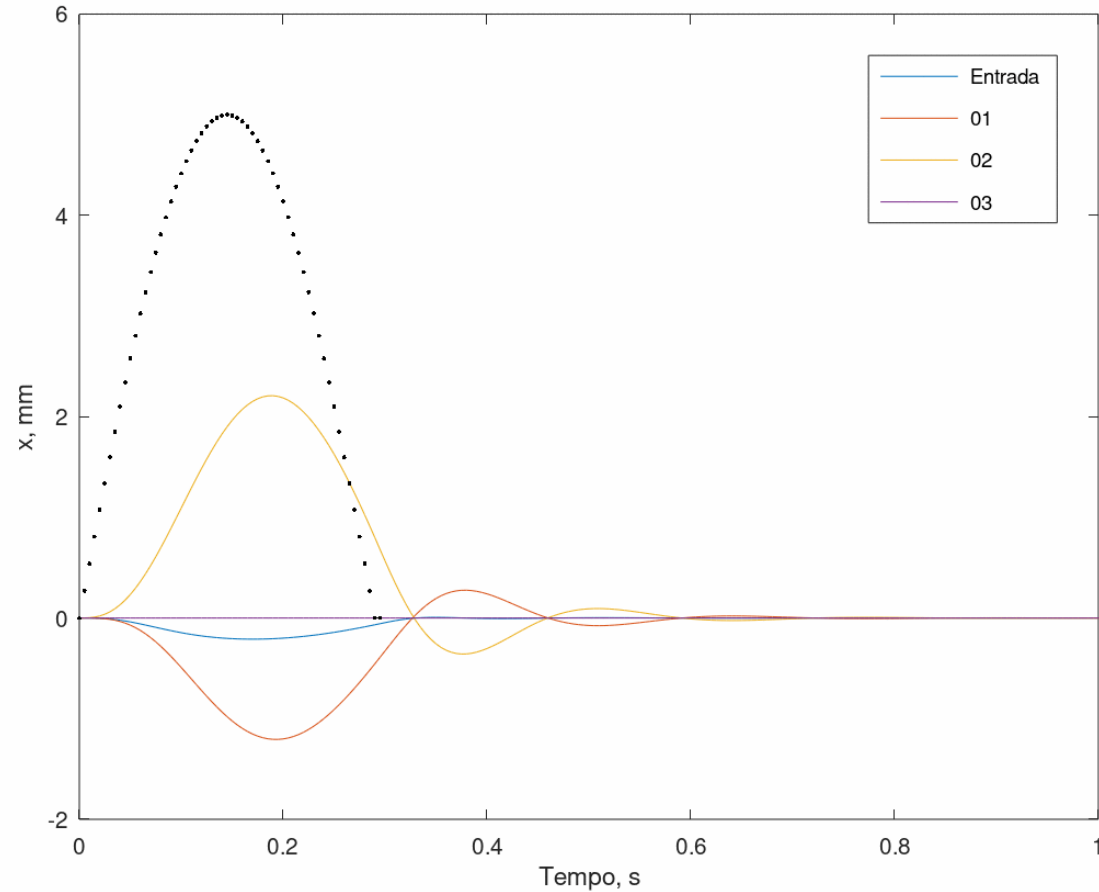
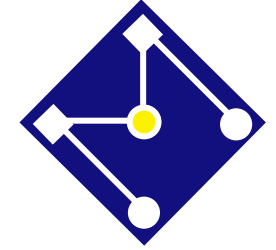
$$M = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 30 \end{bmatrix} kg$$

$$K = \begin{bmatrix} 45 & 20 & 15 \\ 20 & 45 & 25 \\ 15 & 25 & 40 \end{bmatrix} kN/m$$

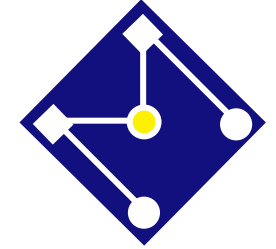
$$C = 3 \times 10^{-2} K$$

Aplica-se meio pulso senoidal de 0,29s de duração com um valor de pico de 50 N

```
clear all;close all; clc
t_init = 0; t_final = 3;
t_incr = 0.005;
n = (t_final-t_init)/t_incr;
tt = t_init:t_incr:t_final;
trange = [t_init t_final];
P = 50;
T = 0.29;
M = [10 0 0;0 20 0;0 0 30];
K = 1e3*[45 20 15;20 45 25;15 25 40];
C = 3e-2*K;
F(1,:) = 0*tt;
F(2,:) = 0*tt;
omega = pi/T;
F(3,:) = P*sin(omega*tt);
for j = 1:n
    pulse(j) = sin(omega*tt(j));
    if tt(j) > pi/omega
        pulse(j) = 0;
    end
end
end
```



```
F(3,1:n) = P*pulse;
x0 = [0 0 0];
xd0= [0 0 0];
[tp,x1] = newmark(M,C,K,F,trange,n,x0,xd0);
x1 = 1000.*x1;
figure(1),
plot(tp,x1(:,1),tp,x1(:,2),tp,x1(:,3),tp,0*tp)
figure(1)
xlabel('Tempo, s')
ylabel('x, mm')
legend('Entrada','01','02','03')
axis([0 1 -2 6])
plot(tt(1:60),5*pulse(1:60),'.k')
```

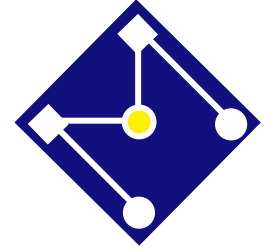


### Método explícito

- Condicionalmente estável ( $\Delta t$  crítico não deve ser excedido para evitar instabilidade)
- Matrizes podem ser modeladas diagonais (desacoplamento)
- Baixo custo computacional mas muitos passos
- Como o intervalo é muito pequeno, método explícito é eficiente somente para análises transientes de curta duração. Por exemplo, problemas de propagação de ondas:
  - Cargas de explosão ou impacto. Modos de alta frequência são importantes.

### Método implícito

- Incondicionalmente estável (independente de  $\Delta t$ , porém, a precisão pode ser afetada para intervalos muito grandes)
- Matrizes não podem ser modeladas diagonais (acoplamento)
- Alto custo computacional mas poucos passos
- Problemas de dinâmica estrutural:
  - Resposta dominada por modos de frequência mais baixos, por exemplo, vibração de uma estrutura, terremoto.



# MATRIZ DE MASSA

Matriz de massa global é montada da mesma forma que a matriz de rigidez

- Matriz de massa concentrada

$$M^e = \begin{bmatrix} \frac{m}{n} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{m}{n} \end{bmatrix}$$

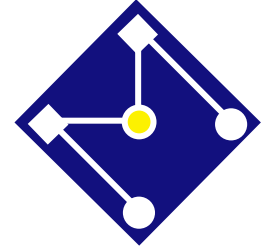
$e$ : número do elemento

$m$ : massa do elemento

$n$ : número de nós do elemento

- Matriz de massa consistente

$$M^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t(r, s) \rho^e \mathbf{B}^{eT} \mathbf{B}^e dr ds$$



# AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH

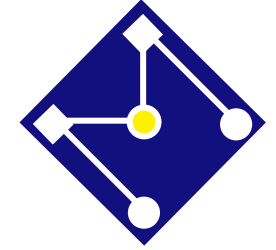
- O amortecimento clássico de Rayleigh resulta em diferentes taxas de amortecimento para diferentes frequências de resposta, de acordo com a equação

$$\zeta_m = \frac{1}{2} \left( \frac{a_M}{\omega_m} + a_K \omega_m \right)$$

$\omega_m$  é a frequência em *rad/s*,  $a_M$  e  $a_K$  são escalares com unidades  $1/s$  e  $s$ , respectivamente.

Para dois modos de vibração (correspondendo aos modos  $i$  e  $j$ ) e amortecimento relativamente constante entre as duas frequências, então:

$$a_M = \zeta \frac{2\omega_i\omega_j}{(\omega_i+\omega_j)} \quad a_K = \zeta \frac{2}{(\omega_i+\omega_j)}$$

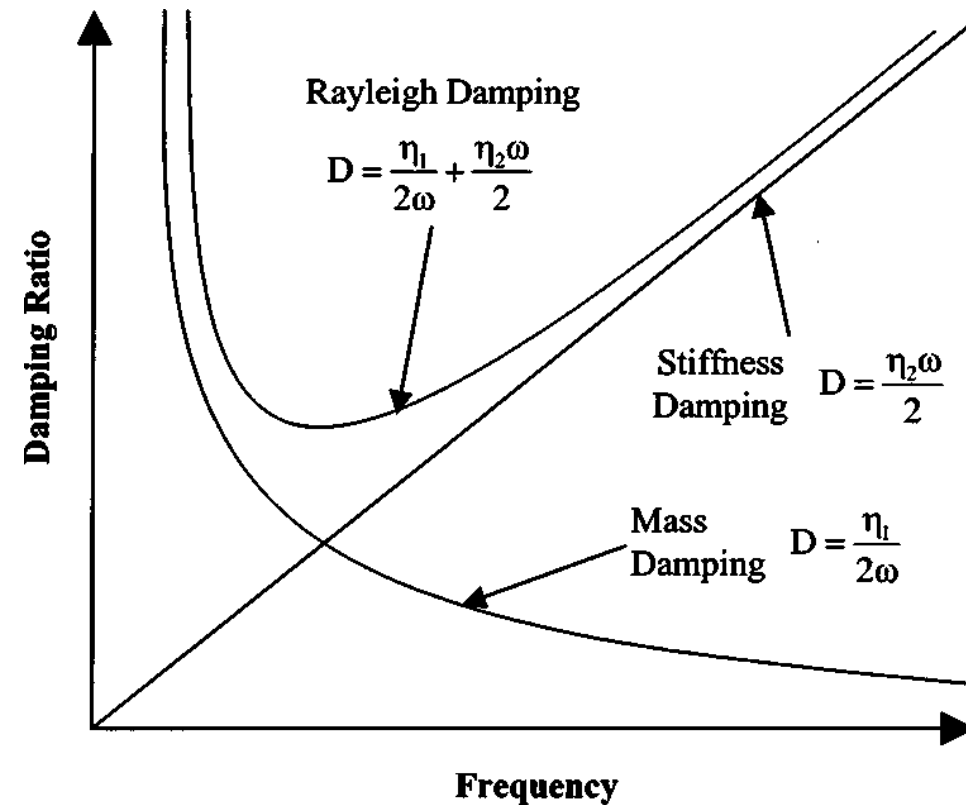


# MATRIZ DE AMORTECIMENTO

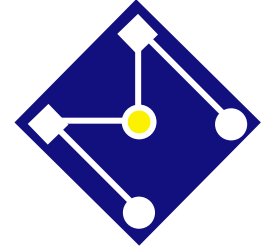
A matriz de amortecimento proporcional é dada por,

$$C^e = a_M M^e + a_K K^e$$

onde  $a_M$  e  $a_K$  são as constantes de proporcionalidade para as matrizes de massa e rigidez.





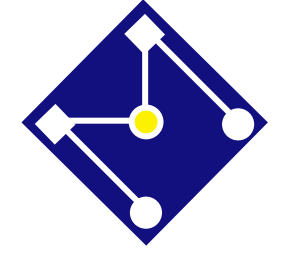


# IMPLEMENTAÇÃO

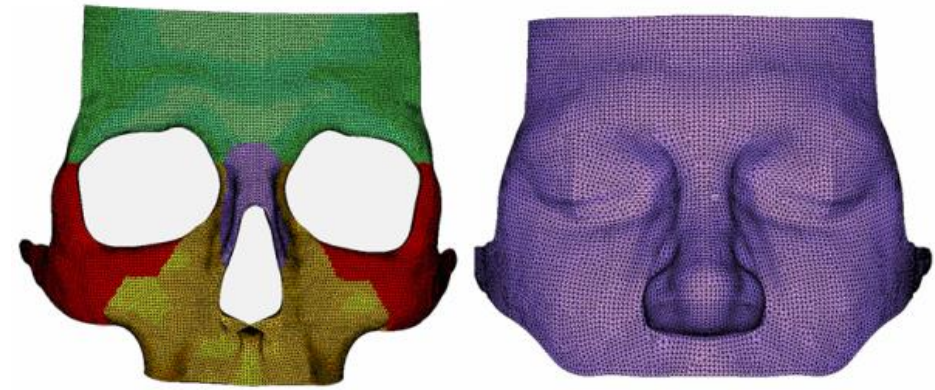
- Você deverá implementar Newmark em seu programa de elementos finitos isoparamétrico.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS NO CURSO DE MEF



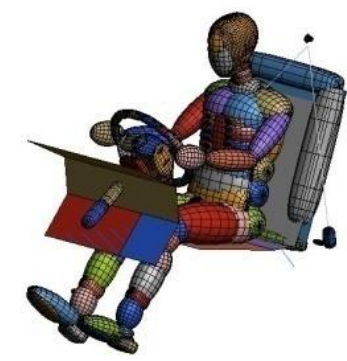


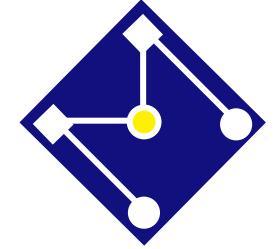
# M.E.F.



O método dos elementos finitos é uma técnica de análise numérica para a obtenção de soluções aproximadas para uma ampla variedade de problemas de engenharia.

Embora originalmente desenvolvido para o estudo de tensões em estruturas complexas de aeronaves, desde então tem sido estendida e aplicada ao amplo campo, não só da engenharia, mas da medicina, odontologia, etc... Devido à sua diversidade e flexibilidade, é a principal ferramenta de análise estrutural utilizada na indústria atualmente.

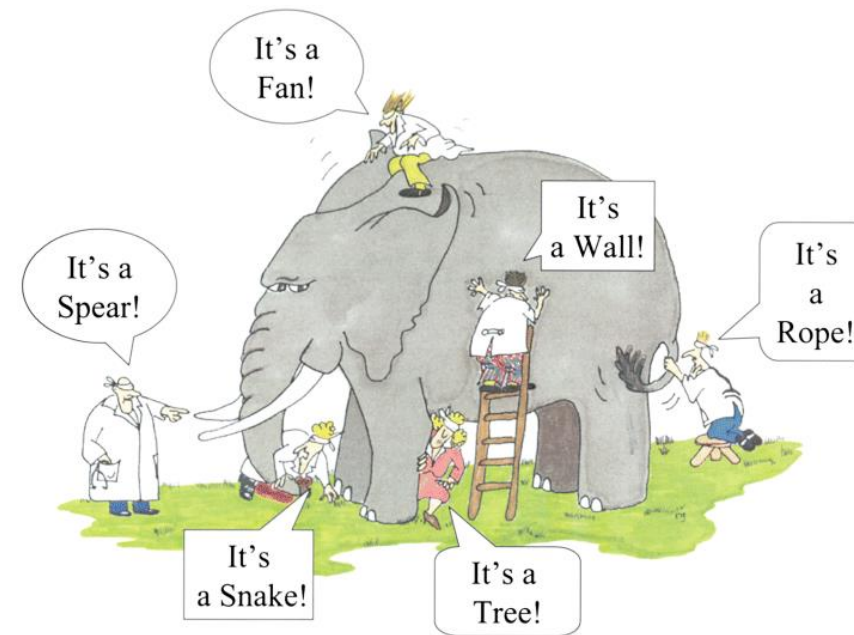




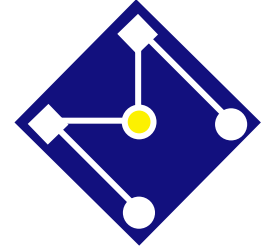
# THE BLIND MEN AND THE ELEPHANT

And so these men of Indostan,  
Disputed loud and long,  
Each in his own opinion,  
Exceeding stiff and strong,  
Though each was partly in the right,  
And all were in the wrong!

*John Godfrey Saxe (1816-1887)*

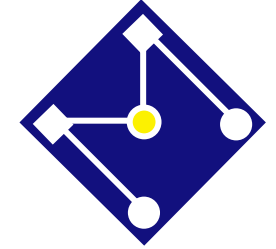


The blind men and the elephant. Poem by John Godfrey Saxe  
(Cartoon originally copyrighted by the authors; G. Renee Guzlas,  
artist).



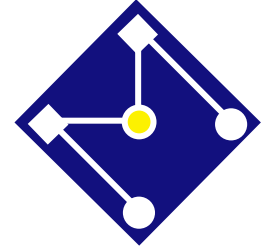
# CODE GUIDANCE ON USING FEA

- ASME VIII Div2 2007:
  - “The Committee recognizes that tools and techniques used for design and analysis change as technology progresses and expects engineers to use good judgement in the application of these tools...”
  - **“... The Code neither requires nor prohibits the use of computers. However, designers and engineers using computer programs for design or analysis are cautioned that they are responsible for all technical assumptions inherent in the programs they use and they are responsible for the application of these programs to their design.”**



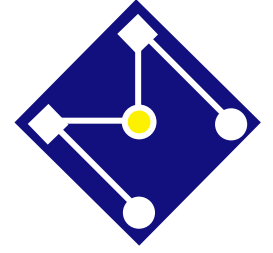
# VANTAGENS DO MEF

- Aplicação a qualquer problema de campo:
  - Tensões, transferência de calor, percolação, etc.
- Não há restrições sobre o carregamento e as condições de contorno do problema.
- O material pode variar de elemento para elemento.
- Não há restrição quanto a geometria do problema.
- Geometrias precisas.
- Um mesmo modelo pode incluir componentes com diferentes comportamentos:
  - Barras, vigas, placas, cascas, sólidos, etc.



# PORÉM...

- **Erros de dados** – geometria (uso de opções default do software – espessura da casca, atrito, etc...), propriedades do material (às vezes, somente erros em unidades!), condições de contorno (esquecimento de algum suporte), etc...
- **Erros de modelamento** incluem elemento com formulação inadequada, malha “pobre” e erro numérico.
- **Erros de fundamento:** a falta de fundamentos (seja da teoria da ferramenta de elementos finitos ou de análise estrutural) impede o conhecimento das restrições contidas na análise.

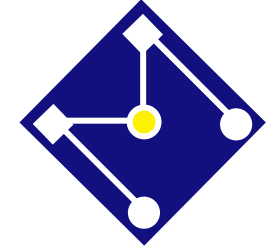


# ENFIM,

- MEF não é uma caixa preta; é uma ferramenta que não se deve abusar...
- É uma aproximação!
- Cuidado no modelamento e análise e interpretação de resultados!

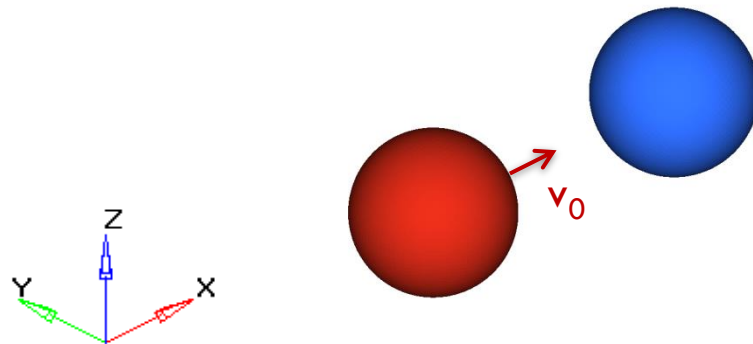


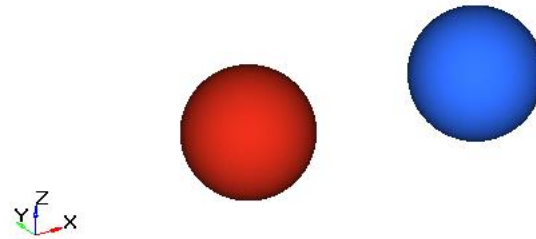
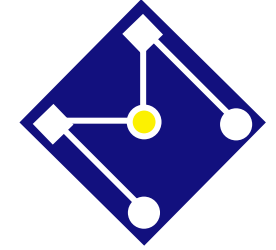




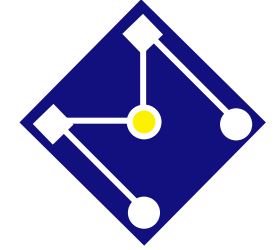
# IMPACTO DE DUAS ESFERAS DE ALUMÍNIO CONT.

As esferas azul e vermelha são de aço, e possuem o mesmo diâmetro  $D=10\text{mm}$ . Impõe-se uma velocidade inicial de  $v_0=10\text{m/s}$  na direção  $x$  à esfera vermelha.



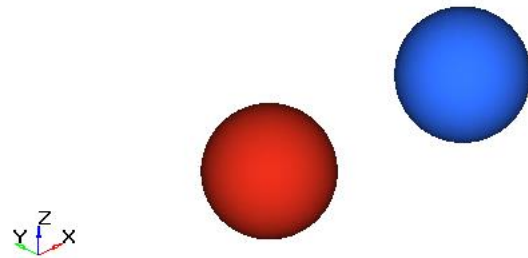


O filme mostra como se comportam as esferas quando a modelagem está correta....

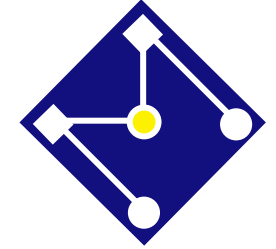
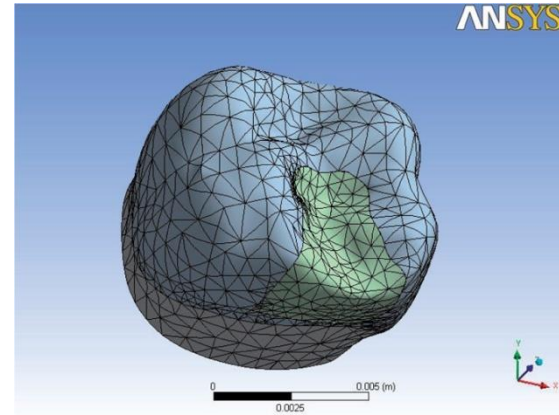
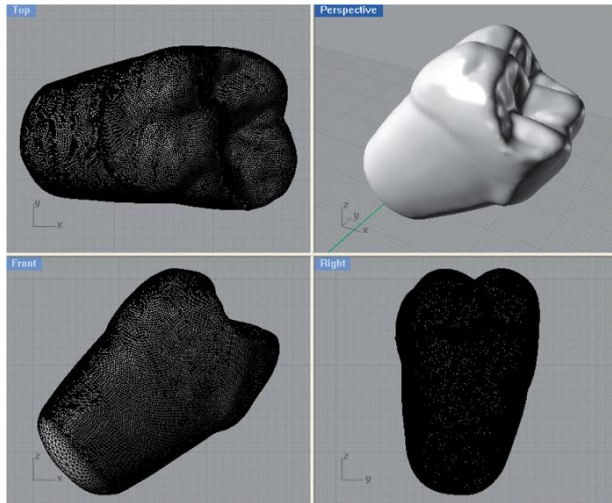


**GARBAGE IN...**

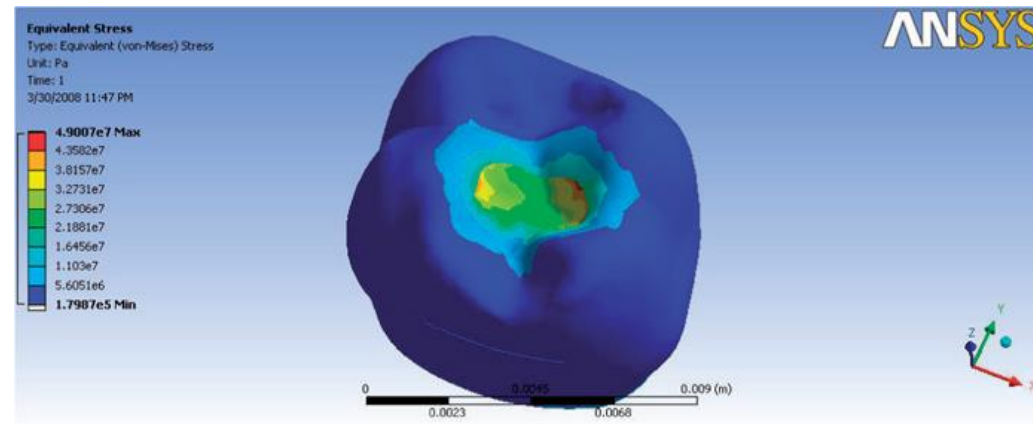
**GARBAGE OUT...**



Onde está o erro????

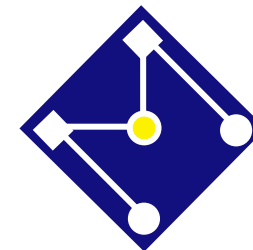


Von Mises em  
cerâmica????



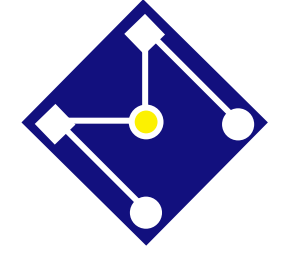
FLORIN I.TOPALA, LILIANA SANDU, SORIN POROJAN, NICOLAE FAUR 3D Modeling and Simulation of Inlay Restored Posterior Teeth, *Timisoara Medical Journal*, n. 1, 2010.

Acessado em 17/05/2011, [http://www.tmj.ro/pdf/2010\\_number\\_1\\_6795718540128562.pdf](http://www.tmj.ro/pdf/2010_number_1_6795718540128562.pdf).



Para um engenheiro, não existe “um pequeno erro de projeto”.

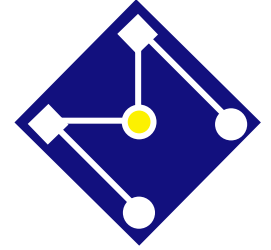
[http://www.designnews.com/blog/Made\\_by\\_Monkeys/index.php](http://www.designnews.com/blog/Made_by_Monkeys/index.php)



~~You aren't a real  
engineer until you  
make one  
\$50000  
mistake!!!!~~

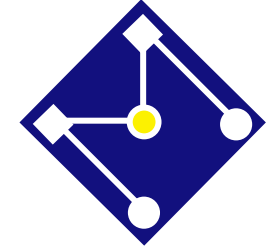


Como se pode prevenir  
erros?



# REQUISITOS PARA SE FAZER UMA ANÁLISE EM EF

- **A obtenção de resultados confiáveis requer conhecimento teórico estrutural!**
  - Conhecimento da área (estrutural, térmica, etc.);
  - Do entendimento físico do problema e habilidade para resolver uma versão simplificada via métodos analíticos;
  - Conhecimento das limitações e aproximações utilizadas no software – inclui entendimento do comportamento dos elementos para selecionar o elemento correto, o número de elementos e sua distribuição na malha;
  - Avaliar os resultados criticamente a fazer modificações no modelo para melhorar a precisão.

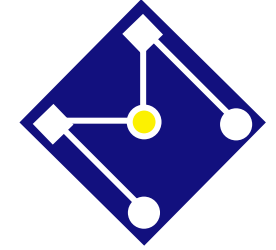


# “BEST PRACTICES”

- Um comitê para direcionar a tendência de análise estrutural pelo MEF, ASME PTC 60, publicou um guia, em 2006, para “V&V” (Verification and Validation), intitulado *Guide for Verification and Validation in Computational Mechanics*.
- Oferece à comunidade de mecânica estrutural uma linguagem comum (glossário de termos), uma estrutura conceitual e orientação geral para a execução de V & V, com discussões sobre os fatores que devem ser considerados.

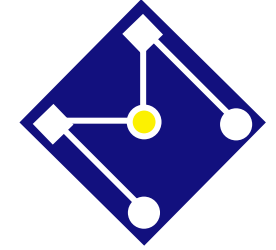
**NÃO é um guia passo-a-passo!**





# “BEST PRACTICES”

- Planejamento da análise
- Modelo do material
- Modelo da geometria
  - Elemento
  - Malha
  - Simplificações
- Apoios e carregamentos
- Verificação



# PLANEJAMENTO DA ANÁLISE



Quais são os objetivos do projeto?



O que você precisa saber: tensões, deslocamentos, frequência, temperatura, deformação?



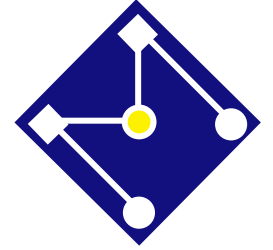
Por que você está fazendo análise em EF?



Qual é o critério de projeto?

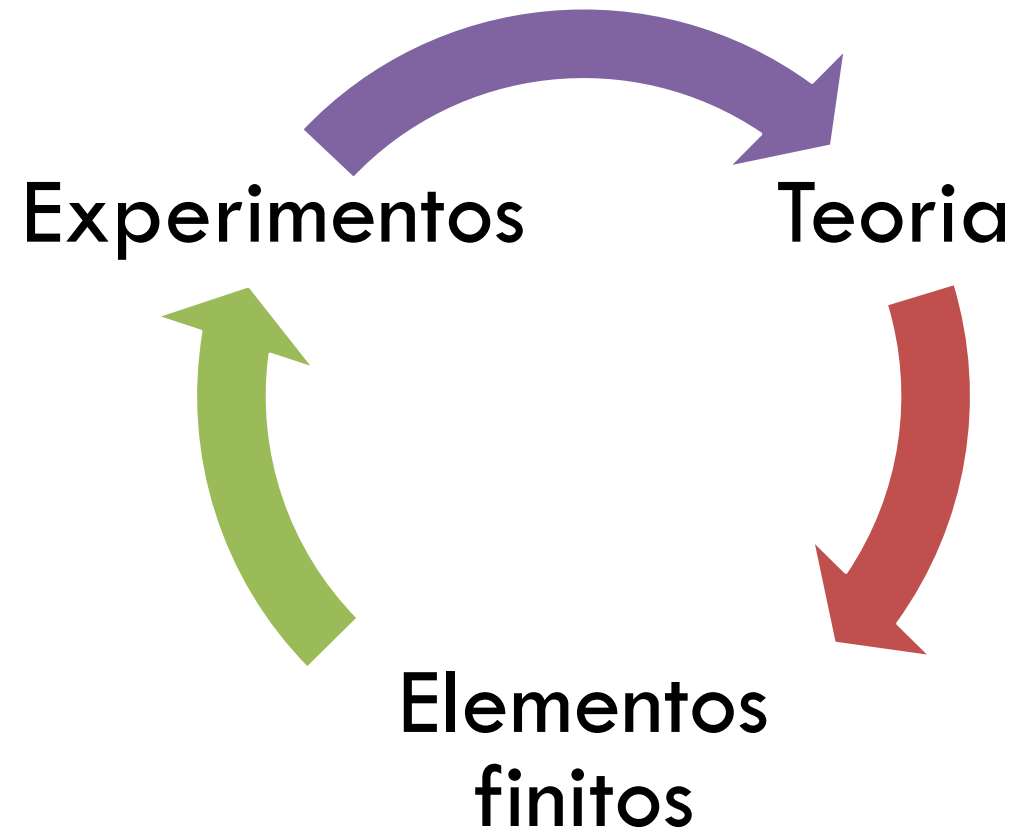


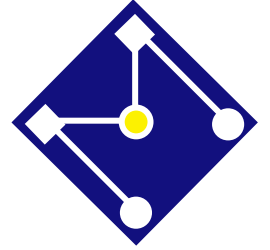
Quais são as condições de contorno e de carregamento?



# A TRÍADE

Obter dados da estimativa através de soluções analíticas ou experimentais, então você tem uma idéia de como a estrutura irá se comportar e quais os números são razoáveis.





# COMO DEFINIR O MELHOR MODELO DE EF?

**As perguntas em análise/modelamento em EF que não querem calar:**

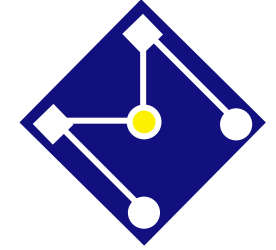
Faço análise estática ou dinâmica?

Faço análise estrutural, térmica ou acoplo as duas?

Faço análise linear ou não linear?

Que elementos eu uso??

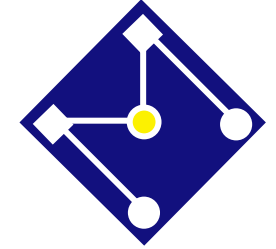




# A resposta NÃO é SIMPLES.

O que define o modelo de análise a ser utilizado é:

1. Geometria da estrutura
2. Cinemática: Deslocamentos e rotações.
3. Comportamento dos materiais: lei constitutiva
4. Carregamento: intensidade, velocidade de aplicação.
5. Condições de contorno: apoios



# TIPOS DE ANÁLISE

- Estática ou dinâmica?
  - As cargas atuantes são periódicas ou impulsivas ?
  - A frequência do carregamento é próxima a frequência natural da estrutura ?
  - A resposta do material depende da taxa de deformação? O comportamento do material é dependente do tempo?
- Acoplada ou desacoplada?
  - Termo-mecânico.
  - Fluido-estrutura.
  - Piezoelétrico.
- Linear ou não-linear?

- O material sofre deformações permanentes ?
- Existe a formação de trincas ?
- A lei constitutiva é linear ?

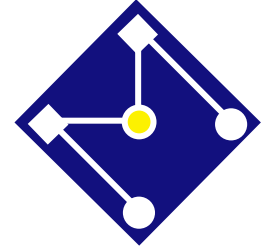
Material

- Os deslocamentos/rotações são grandes ?
- Qual a magnitude das deformações ?

Geometria

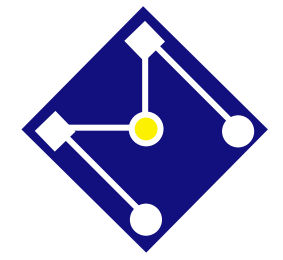
- A região apoiada depende da deformação ?

Contorno

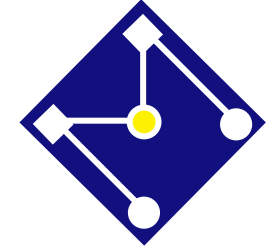


# A ANÁLISE É REALMENTE ESTÁTICA?

- A análise estática supõe que os efeitos de inércia e amortecimento são insignificantes.
- Você pode usar dependência no tempo das cargas como uma maneira de escolher entre a análise estática e dinâmica.
  - Se a carga é constante ao longo de um período de tempo relativamente longo, escolha uma análise estática.
  - Em geral, se a frequência de excitação é inferior a  $1/3$  da menor frequência natural da estrutura, uma análise estática pode ser aceitável;
  - Necessidade de análise transiente.







# ELEMENTO FINITO

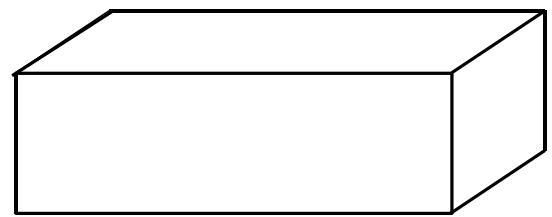
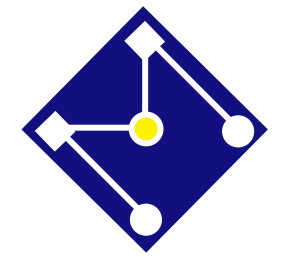
Através do entendimento de como o projeto original **DEVE** se comportar sob condições de carregamento/contorno/material, e como o elemento selecionado **É CAPAZ** de simular esse comportamento.

## Contínuo ou sólido:

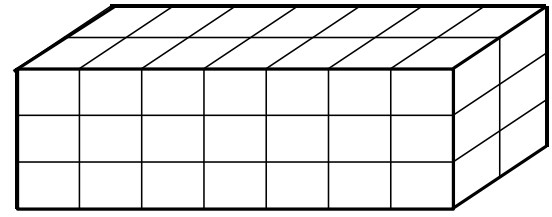
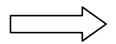
- Barra (1D).
- Estado Plano de Tensão.
- Estado Plano de Deformação.
- Sólido axissimétrico.
- Sólido 3D

## Estrutural:

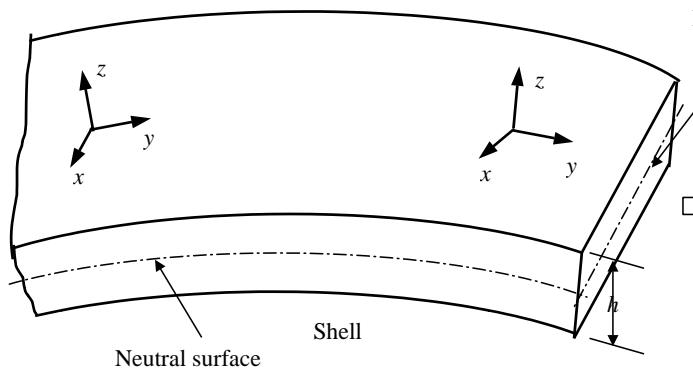
- Vigas
- Pórticos
- Placas
- Cascas



Bulky solids

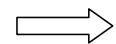


3-D solid element mesh

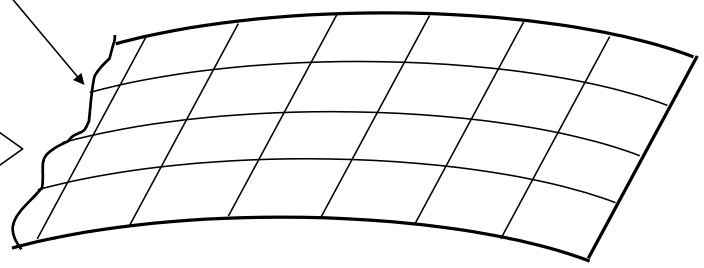


Neutral surface

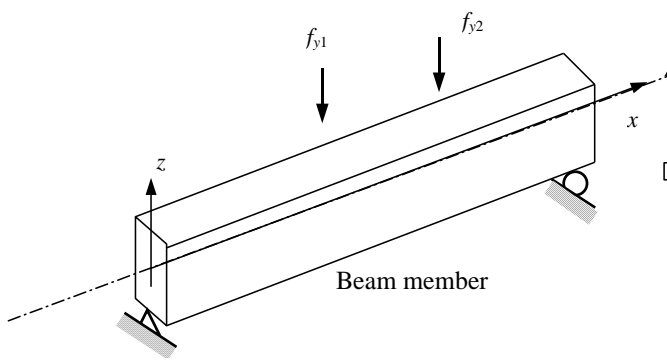
Shell



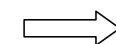
Neutral surface



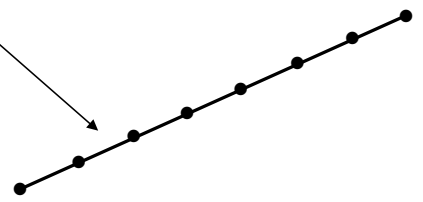
2-D shell element mesh



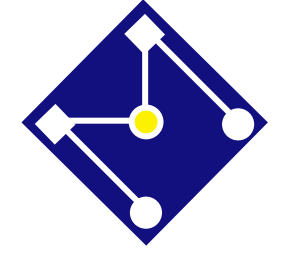
Beam member



Centroid



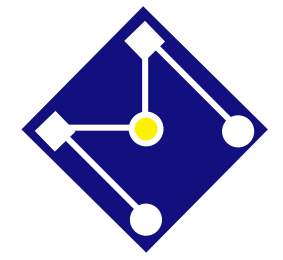
1-D beam element mesh



**TABLE 6.14-2. STRESSES AND DEFLECTIONS IN TWO-ELEMENT CANTILEVER BEAMS OF CONSTANT THICKNESS UNDER TRANSVERSE TIP LOAD  $P$ . LENGTH = 100, DEPTH = 10,  $\nu = 0.30$ . VALUES BY BEAM THEORY = 1.000 (IN WHICH THE TRANSVERSE-SHEAR CONTRIBUTION TO  $v_A$  IS NEGLECTED). SKETCHES ARE NOT TO SCALE.**

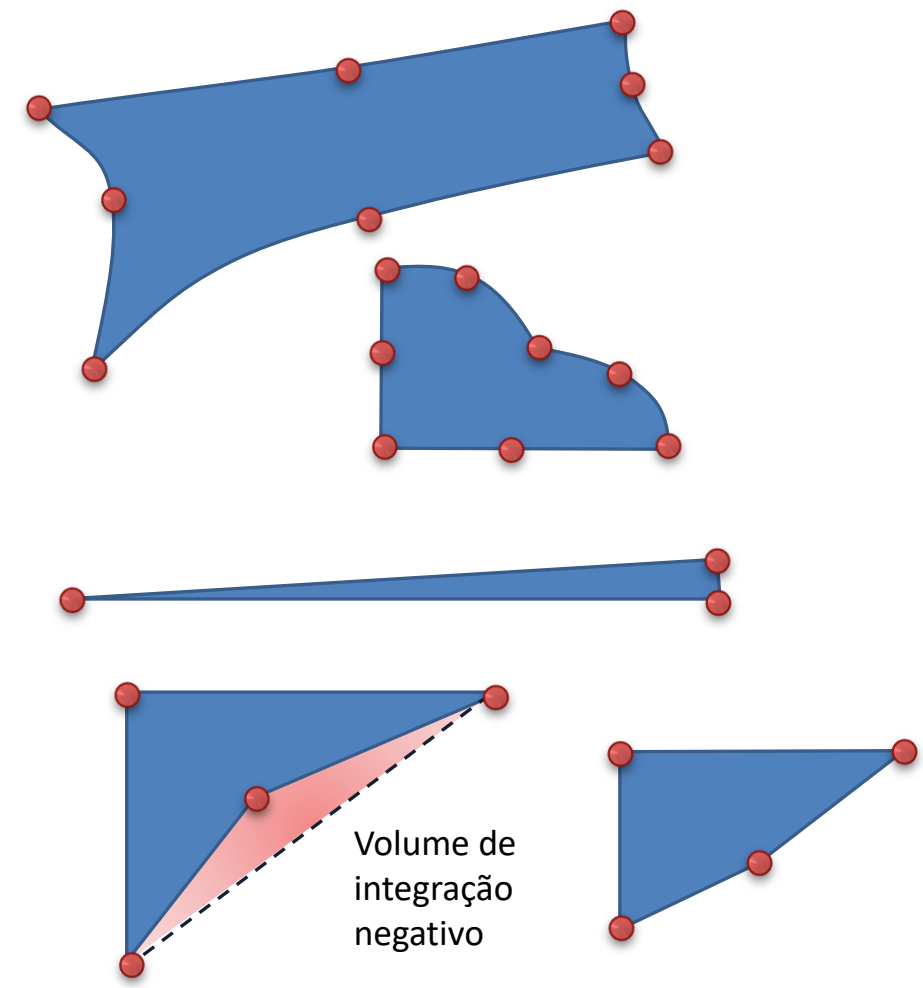
Element Type	Gauss Rule	Element 1 (Left)		Element 2 (Right)		Element 3 (Right)	
		$\sigma_{xB}$	$v_A$	$\sigma_{xB}$	$v_A$	$\sigma_{xB}$	$v_A$
8 node	$2 \times 2$	1.000	0.968	0.051	0.362	-0.048	0.430
8 node	$3 \times 3$	1.129	0.930	0.048	0.161	0.050	0.221
9 node	$2 \times 2$	1.000	1.006	1.125	1.109	0.958	0.955
9 node	$3 \times 3$	1.141	0.954	0.687	0.791	0.705	0.737

[Cook]

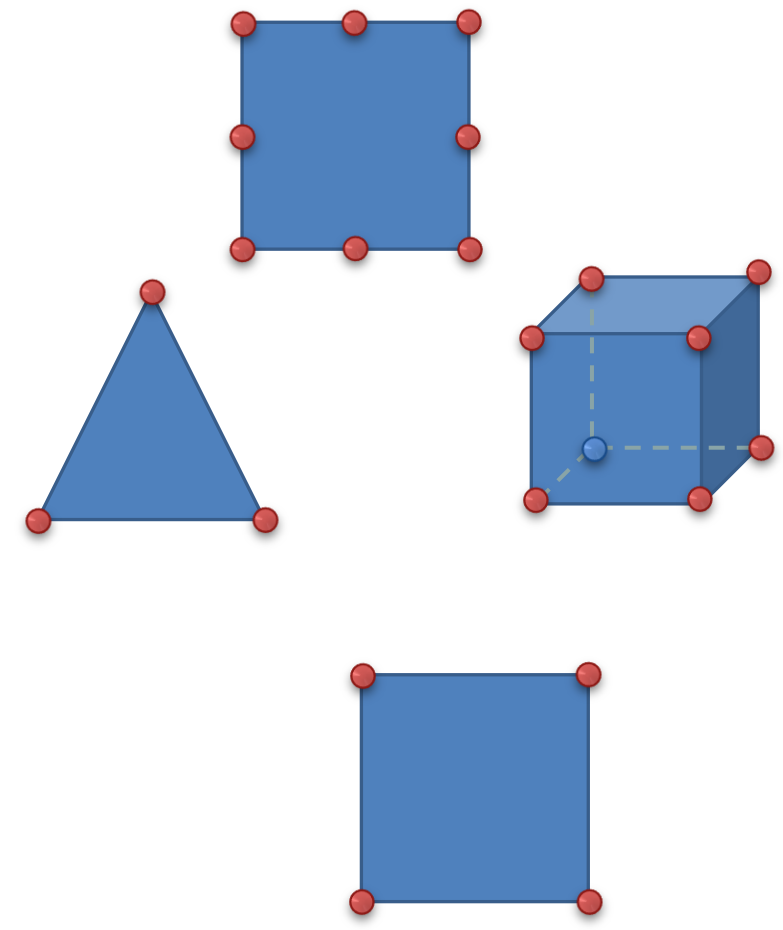


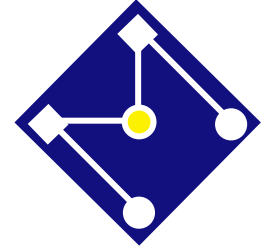
# CUIDADO COM AS DISTORÇÕES,

Malhas ruins!



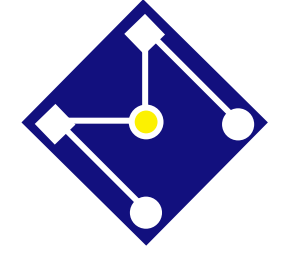
Referências...



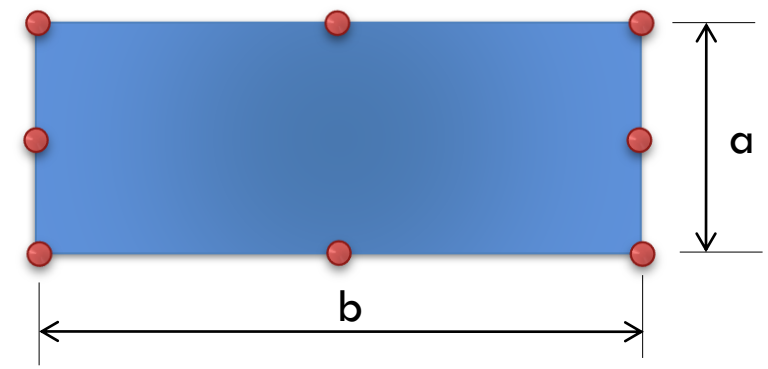


# VOCÊ CONSEGUE ENTENDER MELHOR...

- Uso de elementos distorcidos em geometrias complexas é muito comum. Mas essas distorções têm limite!!!
- Elementos distorcidos de sua forma básica podem ser menos precisos – quanto maior a distorção menos precisa a resposta!
- Como você estudou jacobiano e Gauss, já sabe que as distorções são medidas em relação à forma básica em coordenadas naturais do elemento. Por exemplo, o elemento quadrilátero será distorcido em relação ao quadrado; o elemento sólido hexaédrico, em relação ao cubo, etc.



# LIMITES DE DISTORÇÃO

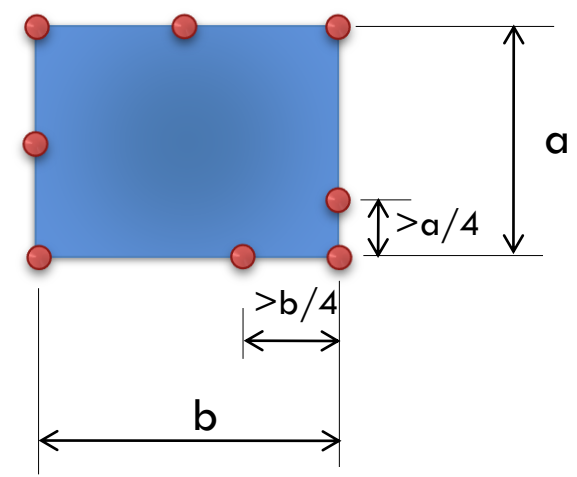


$a < b,$

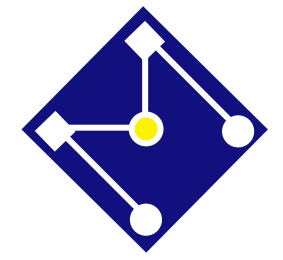
*Regra de pai para filho...*

$\frac{b}{a} \leq 3$  análise de tensões

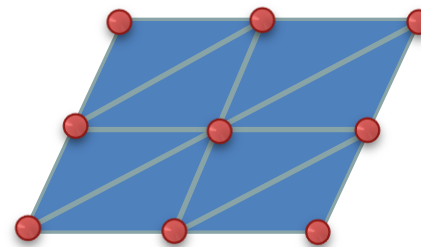
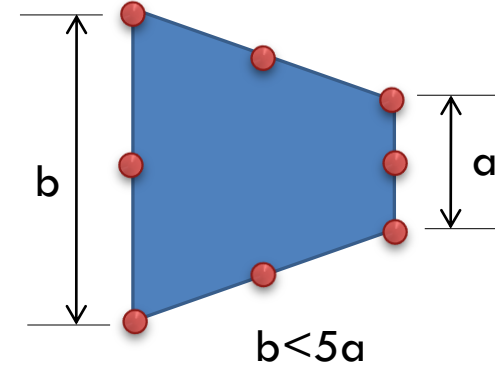
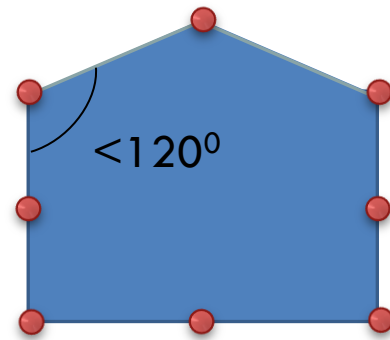
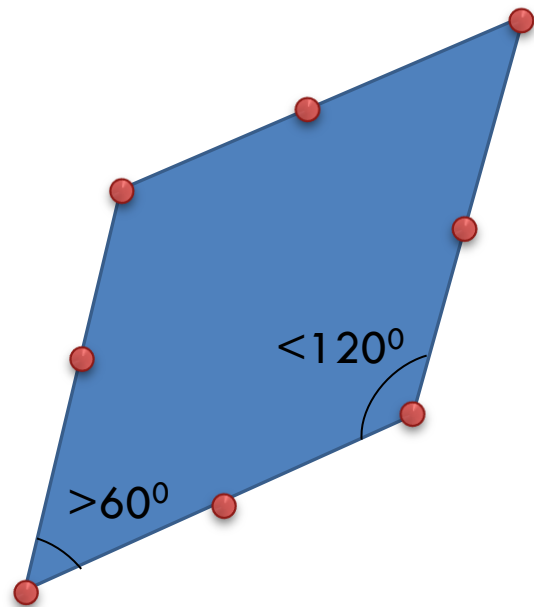
$\frac{b}{a} \leq 10$  análise de deslocamentos



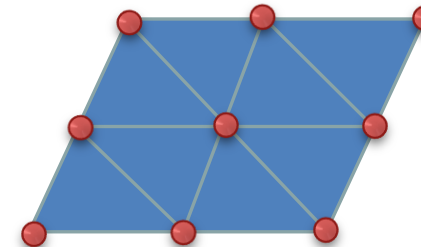
Nós internos que não respeitam esse limite resultam em campo de tensões singular.



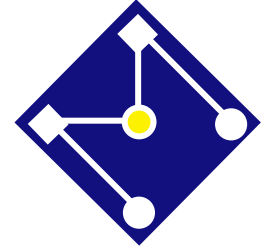
- *Distorção angular*: Ângulos entre os lados do elemento não deve se aproximar de  $0^\circ$  ou  $180^\circ$



Malha ruim...



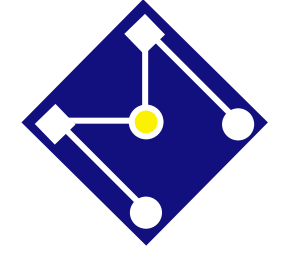
Melhorou...



# DISTORÇÃO DA MALHA

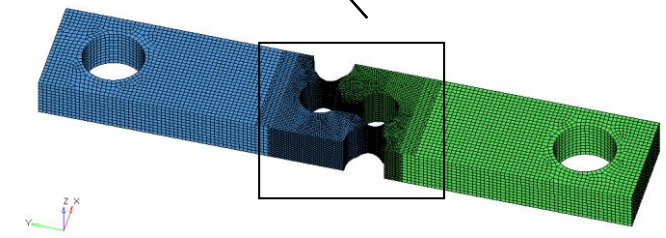
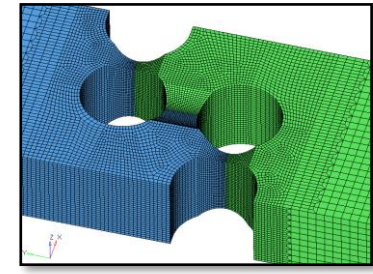
- A maioria dos programas de elementos finitos tem checagem de distorção dos elementos e avisa se algum elemento excedeu o limite.
- Muitos programas de pré processamento permitem cálculo do *Jacobiano* da malha.
- Os limites de distorção são subjetivos, e um elemento *ruim* não dá necessariamente um resultado ruim e vice-versa.





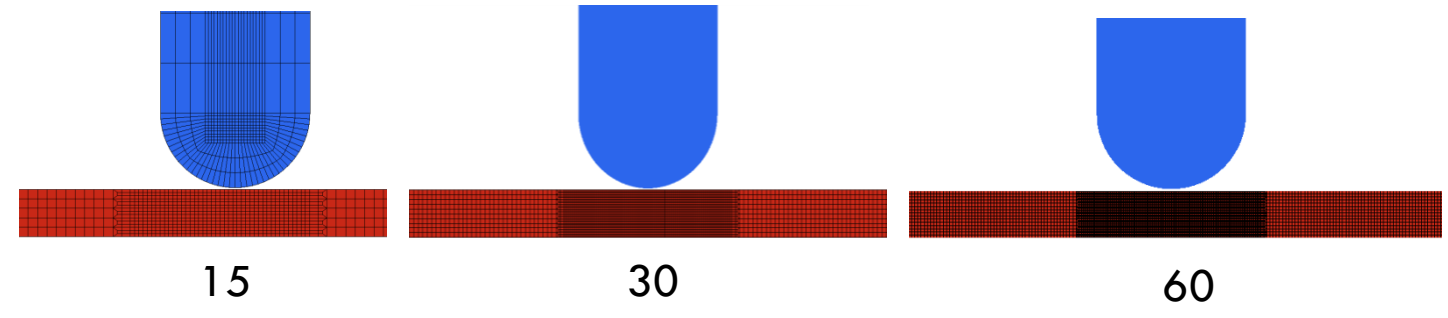
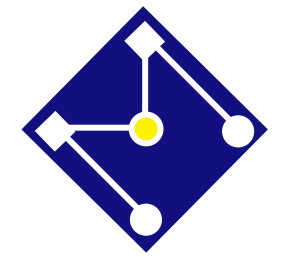
# MALHA

- Para uma comparação simples, pode-se usar malha pouco refinada.
- Para precisão no valor das tensões, uma malha mais refinada deve ser utilizada.
- Análise de fadiga também necessita de malha refinada.

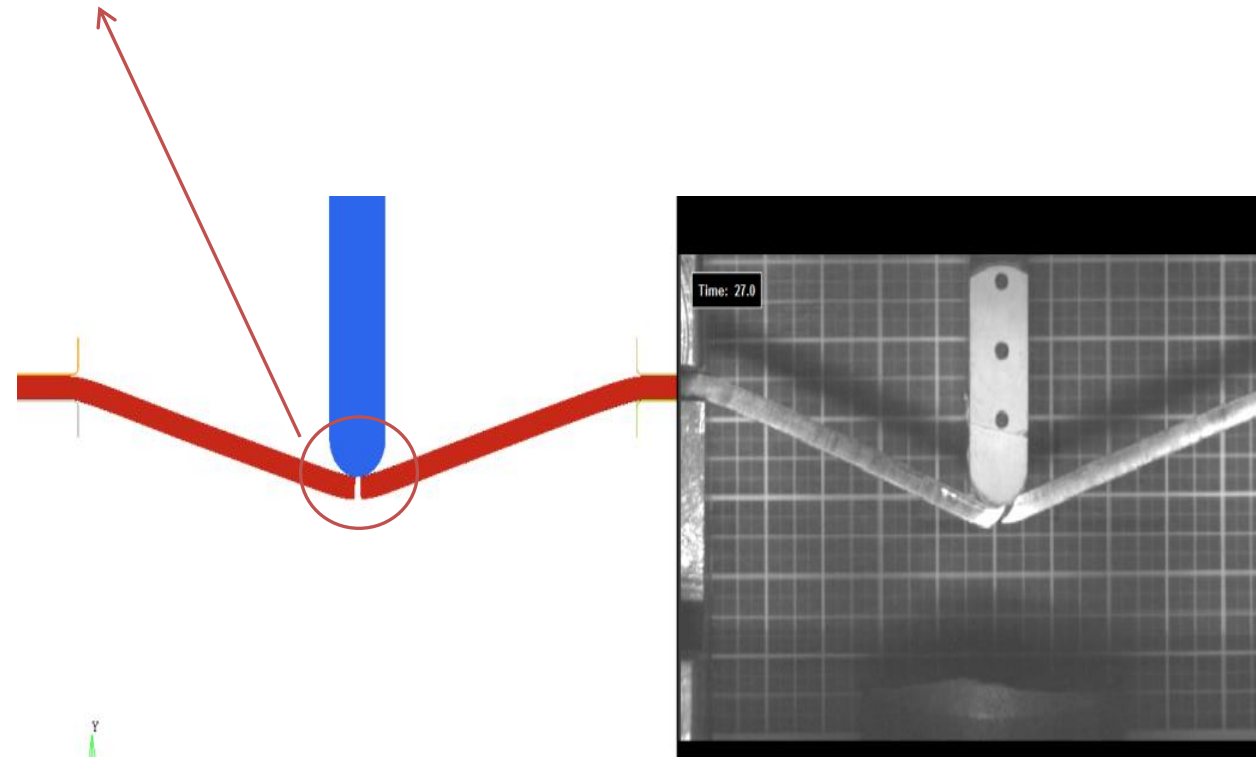


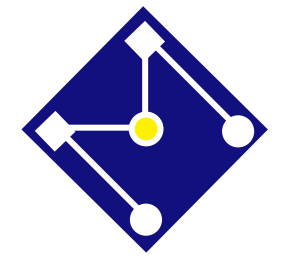
- Invista em elementos nos pontos de interesse. Porque ...

**...Good mesh need resolve physics, not follow the CAD model.**



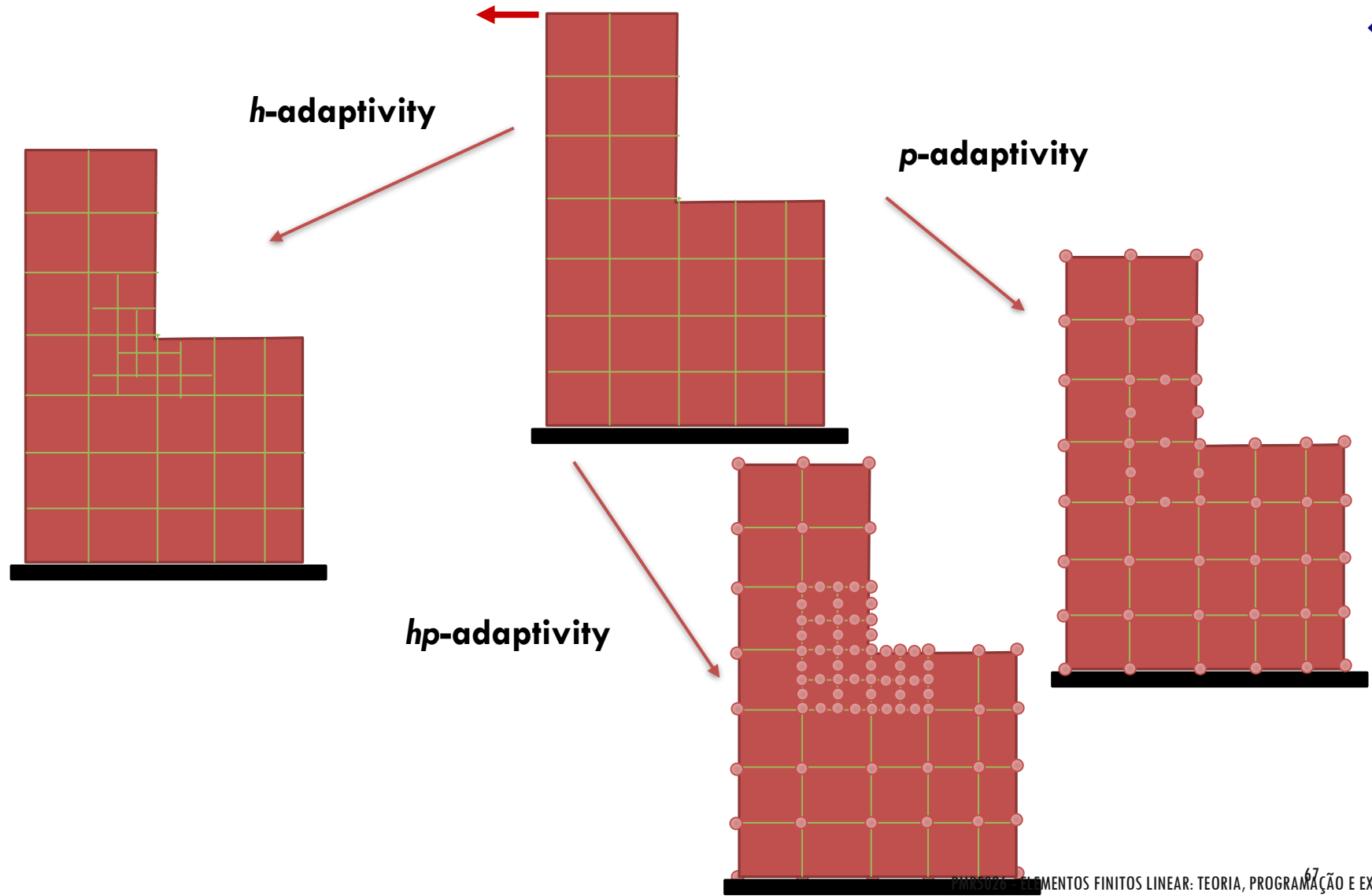
Cuidado com a diferença entre o maior e menor elemento de sua malha!

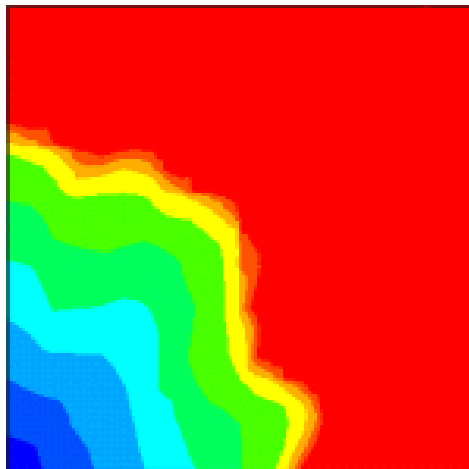
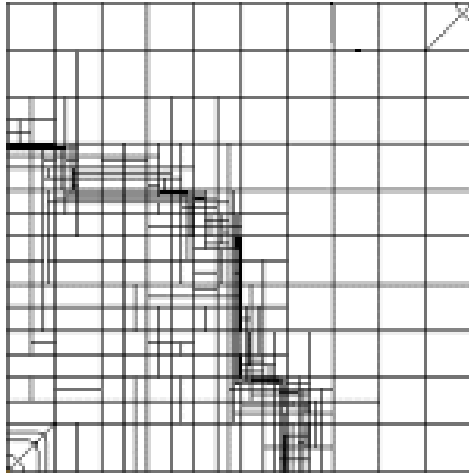
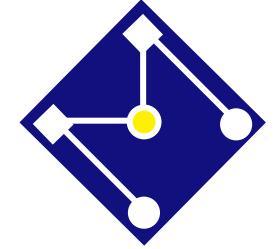




Pode-se *refinar* o problema na região crítica:

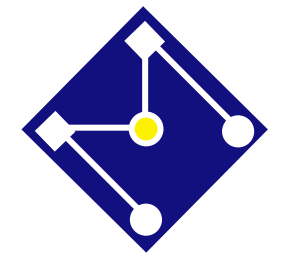
1. reduzindo  $h$  (refinamento de malha):  $h$ -adaptivity
2. aumentando  $p$  (elementos de mais alta ordem):  $p$ -adaptivity
3. combinando os dois métodos:  $hp$ -adaptivity



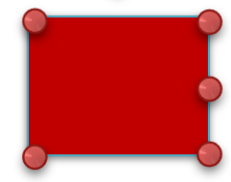
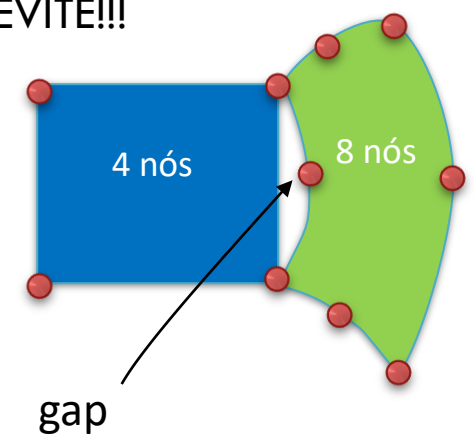


Extraído de:  
<http://www.tx.altair.com/technology/technology.html>

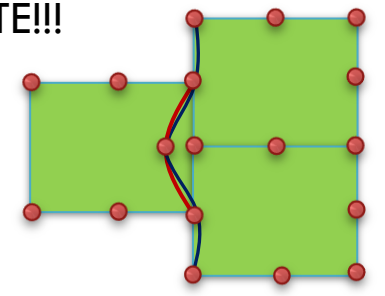
h-adaptive mesh refinement following a water saturation front (blue-water, red-oil).



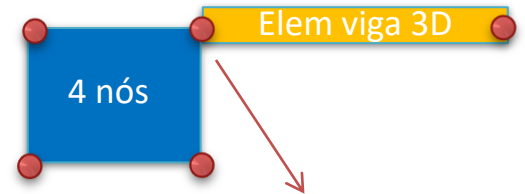
EVITE!!!



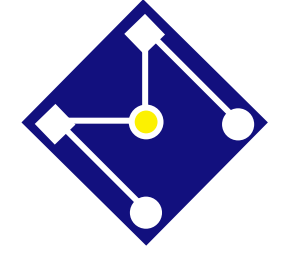
EVITE!!!



EVITE!!!



Elementos com diferente número de graus de liberdade por nó não devem compartilhar o mesmo grau de liberdade global.



# LINEAR VS. QUADRÁTICO

Quando você escolhe um tipo de elemento, você está implicitamente escolhendo e aceitando a função de forma assumida para esse tipo de elemento!

**Linear**

**Quadrático**

Grande número de elementos.

Variação linear de deslocamentos.

Sensíveis a distorção.

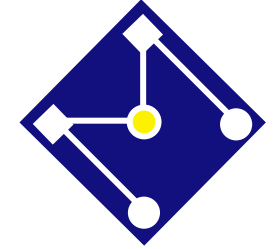
Cálculos mais precisos de tensões.

Menos sensível a distorções.

Geometrias curvas mais precisas.

Variação quadrática do deslocamento.

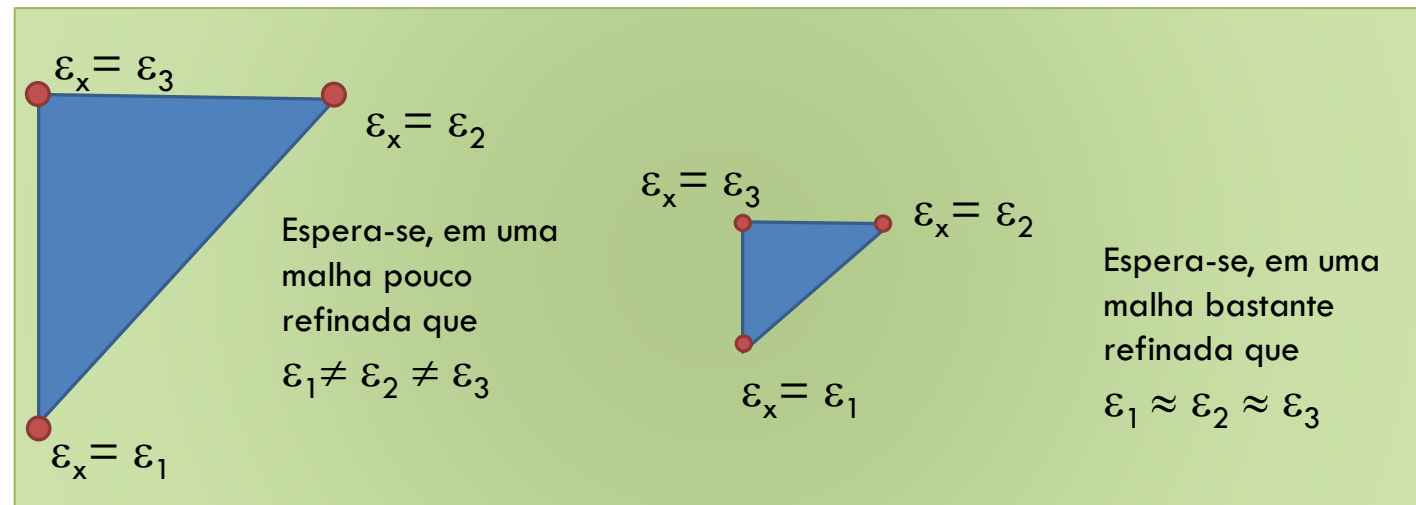
Para os elementos de casca, a diferença entre linear e quadrático não é tão dramática quanto para elementos sólidos. Obviamente, portanto, prefere-se elementos de casca lineares. Elemento linear é usado em crash tests.



# CONVERGÊNCIA DE MALHA

- É sempre válido: a medida que a malha se torna mais refinada, o resultado se torna mais próximo do real. Se a solução aproximada não se comporta dessa maneira, você está com problemas de convergência!
- Faça uma primeira malha, resolva, refine e resolva novamente – se o resultado não muda significativamente, a malha convergiu. Caso contrário, refine e resolva novamente.

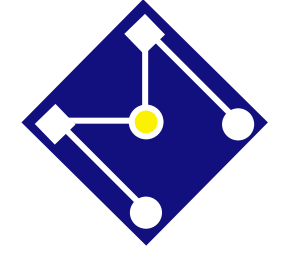
Deslocamentos convergem mais rápido que tensões. Cheque tensões ou deformações.



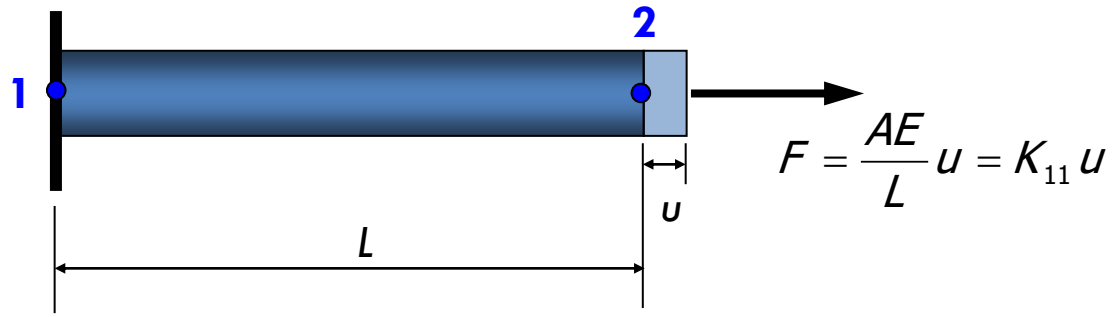
# PROBLEMA LINEAR VS. NÃO LINEAR







# PROBLEMAS NÃO LINEARES

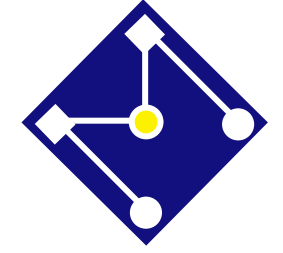


$$[F] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}; \quad [u] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$[F] = [K][u]$$

Rigidez de um elemento de treliça unidimensional



$$K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$u = K^{-1}F$$



$$\epsilon = Bu$$

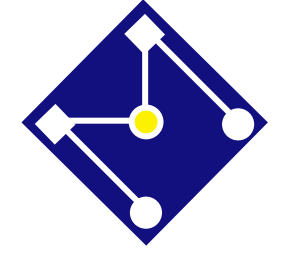


$$\sigma = E\epsilon$$

$\sigma$  depende de  $\epsilon$   
que depende de  $u$   
que é calculado  
através da matriz  
de rigidez  $K...$



$K$  depende dos parâmetros  
do material ( $E$ ) e da  
geometria ( $A, L$ )



PROBLEMA LINEAR

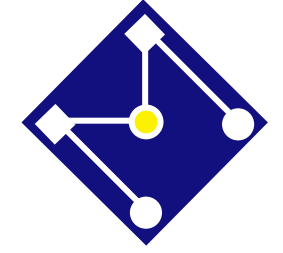
$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}$$

Constantes! Não dependem dos deslocamentos!

PROBLEMA NÃO LINEAR

$$[\mathbf{K}(\mathbf{u})] \mathbf{u} = [\mathbf{F}(\mathbf{u})]$$

Rigidez e/ou forças são em função dos deslocamentos!



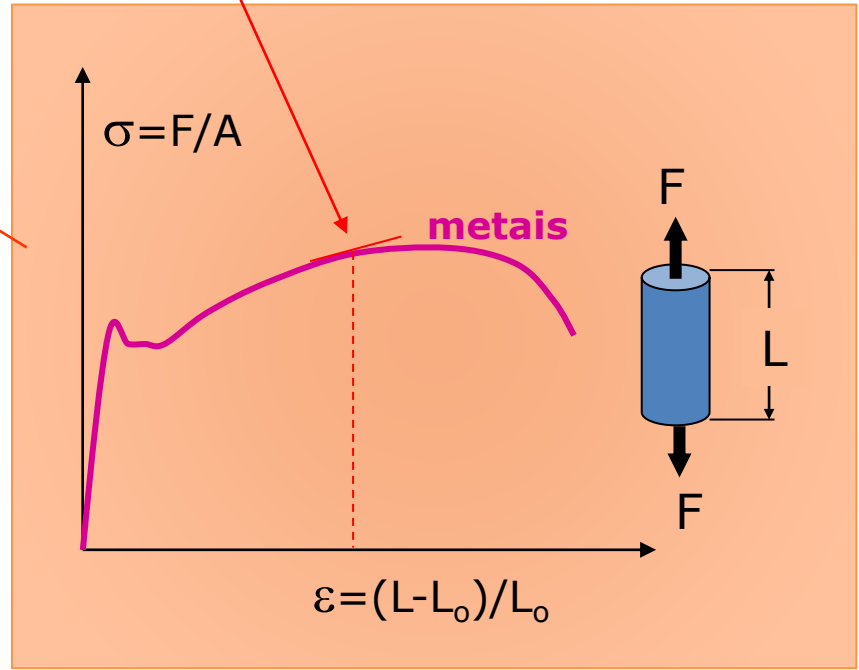
# MATERIAL

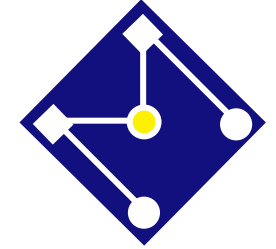
$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

***K** depende de **E**, que depende de  $\epsilon$ , que depende de **u** e...*

$$...[u] = [K]^{-1}[F]...$$

... **u** depende de **K**

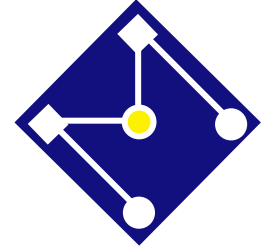




# PROPRIEDADES DOS MATERIAIS

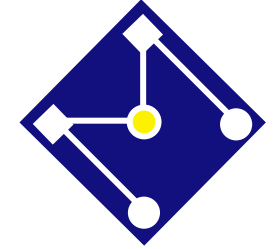
- Os programas de E.F. apresentam uma biblioteca de modelos de materiais – o Dyna e o Abaqus têm mais de 100 modelos diferentes para escolher.
- Cada modelo necessita de parâmetros, que são características do material extraídas de ensaios experimentais...
  - Modelo elástico linear, por exemplo, necessita dos parâmetros: módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e densidade.
  - Modelos mais sofisticados requerem parâmetros que nem sempre podem ser obtidos de ensaios de tração uniaxial simples.

**A dificuldade está em encontrar valores relevantes para os parâmetros requeridos pelo modelo.**



# MODELO ELÁSTICO LINEAR

- Por definição, o material elástico apresenta as seguintes características,
  - Relação tensão deformação é linear;
  - O comportamento do material é completamente reversível: isto é, se você impõe uma dada temperatura fixa ou previne a troca de calor com o ambiente, e submete o material a um ciclo fechado de deformação (i.é, começa e termina no mesmo ponto), o trabalho feito no material é nulo;
  - A tensão em um ponto depende apenas da medida de deformação total naquele ponto;
  - Deformações são pequenas.



Lei de Hooke

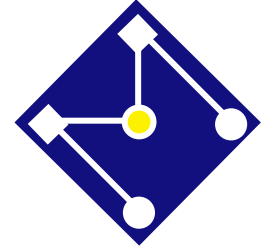
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Material elástico linear isotrópico:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Rigidez:  $\mathbf{D}$

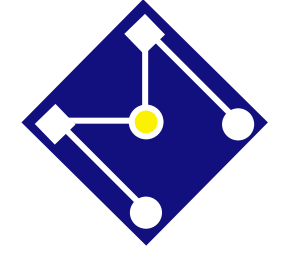
Flexibilidade =  $\mathbf{D}^{-1}$



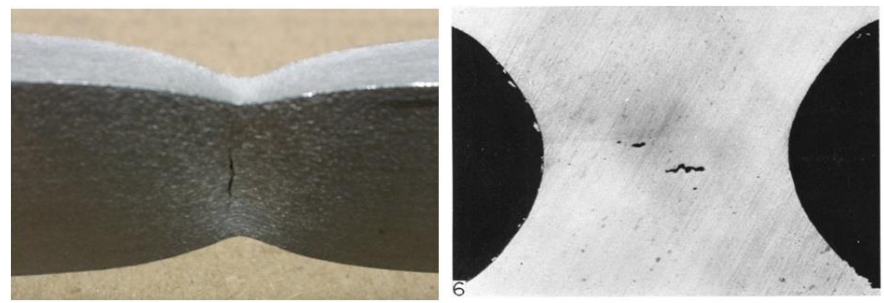
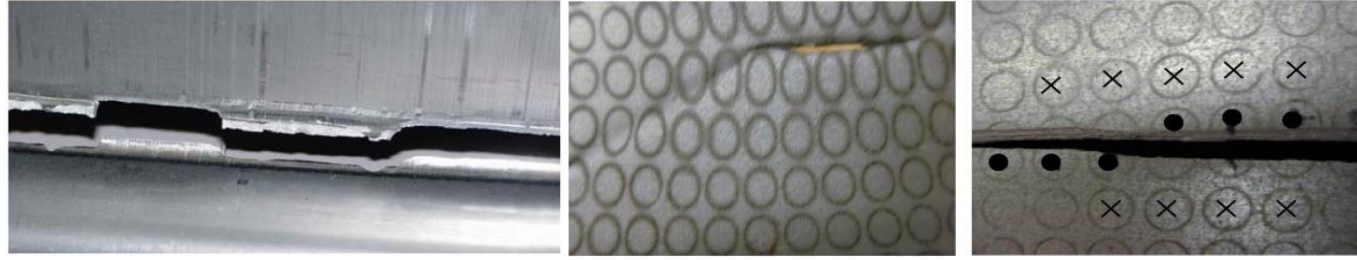
# MATERIAIS MAIS COMPLICADOS

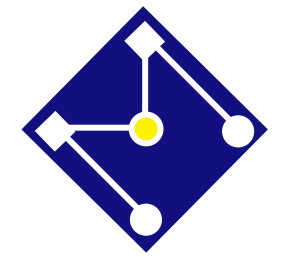
- Além do modelo de material elástico linear, tem-se :
  - material não linear (elástico ou não)
  - resposta dependente do tempo
  - resposta dependente da temperatura
  - dano do material com perda de rigidez...
  
- Em princípio, estes representam a realidade encontrada
  
- Esses modelos, entretanto, requerem, algumas vezes, complicados parâmetros de entrada...



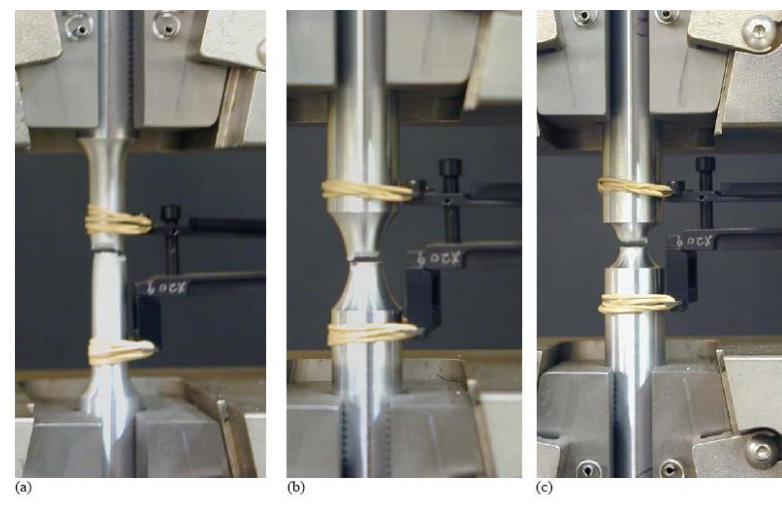
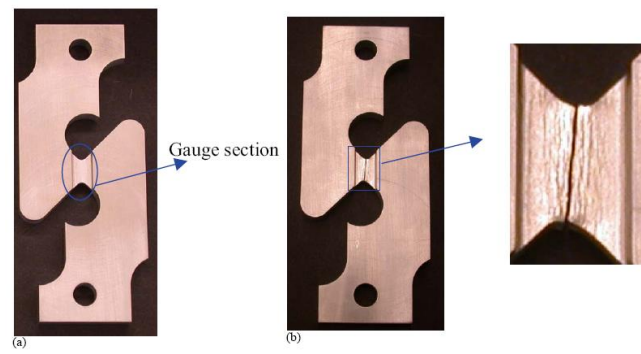
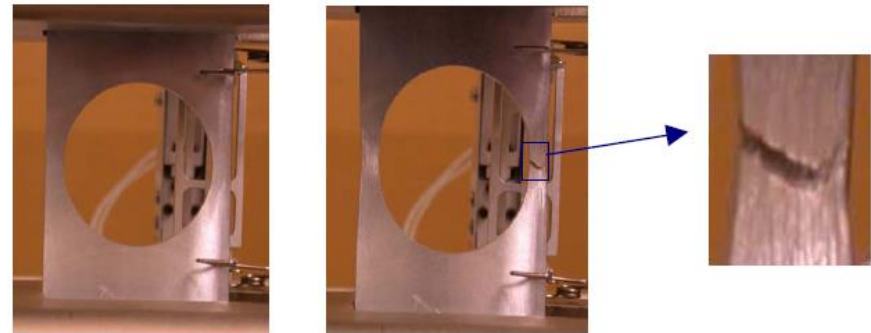
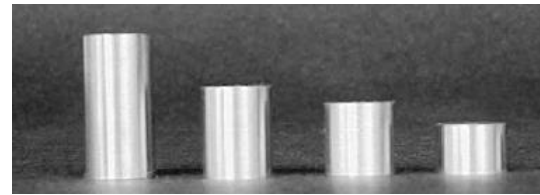


# FALHA: UM UNIVERSO

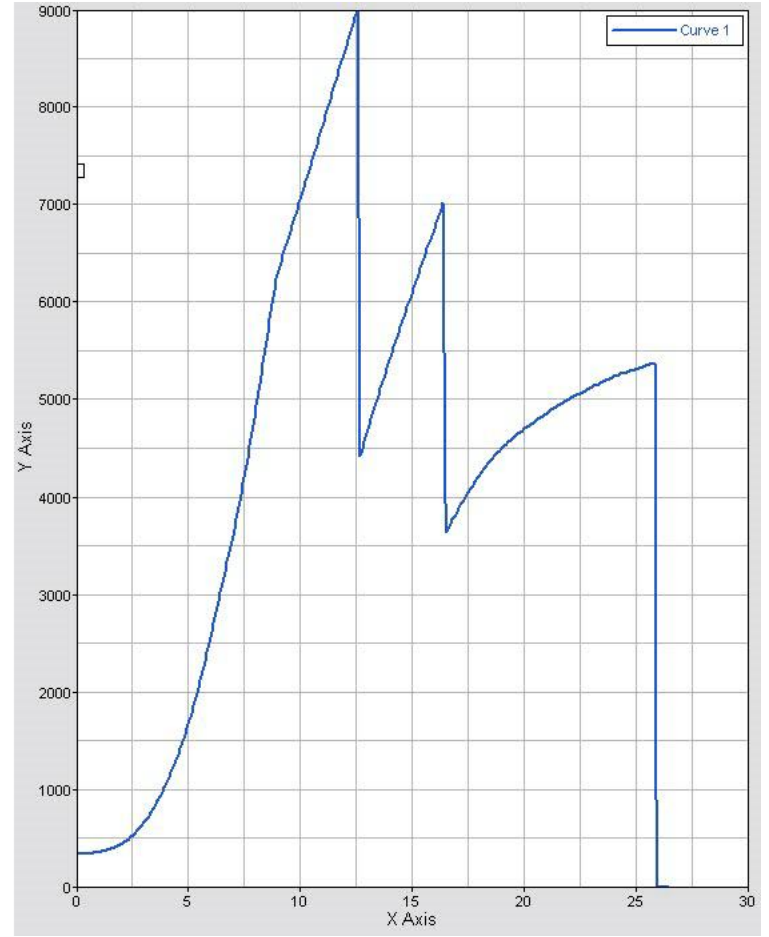
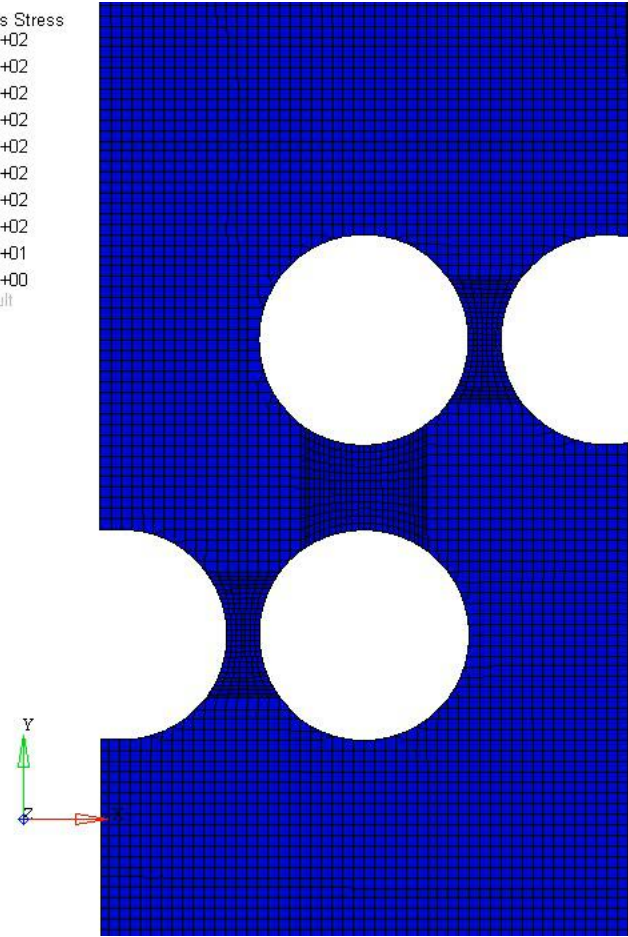
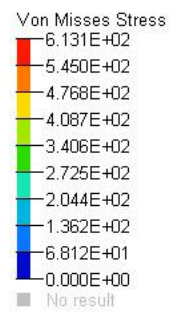
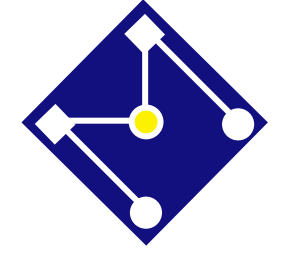


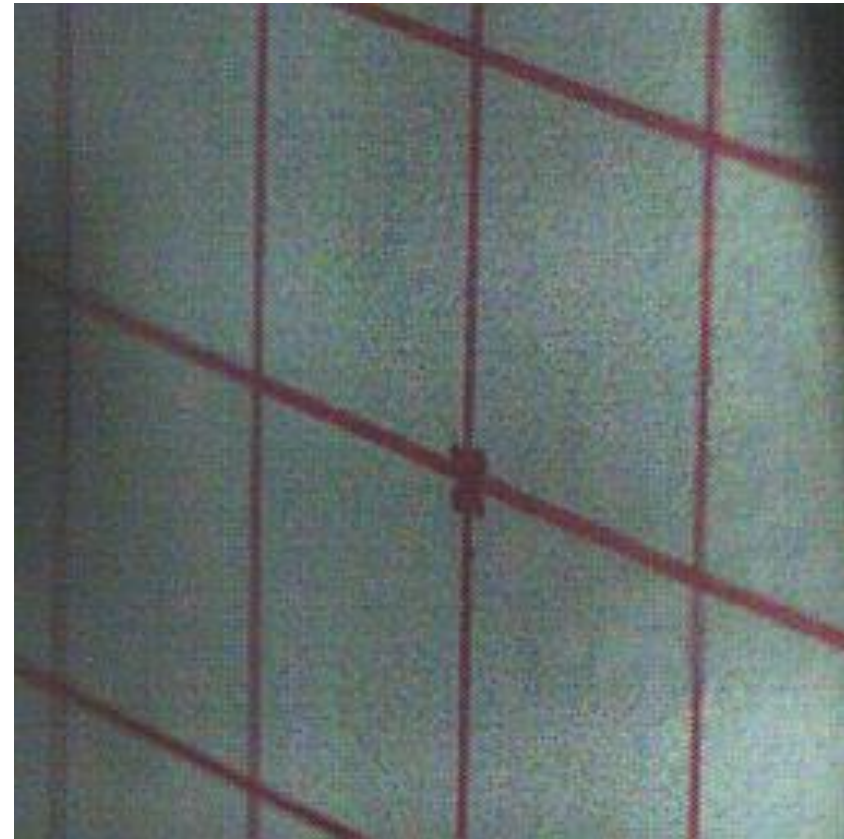
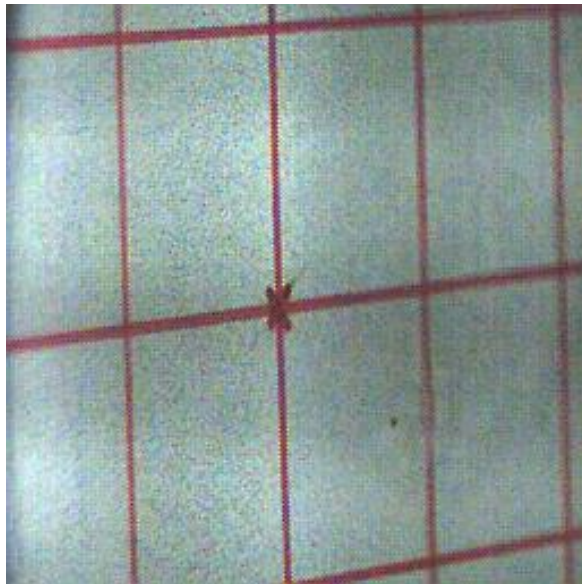
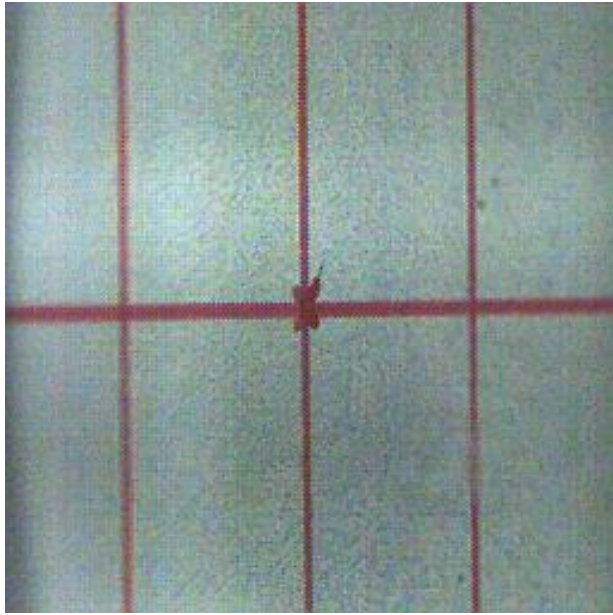


# ENSAIOS DE CARACTERIZAÇÃO

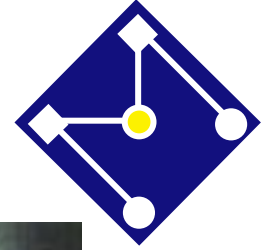


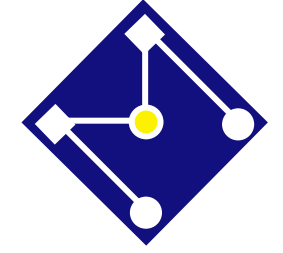
Yingbin Bao, Tomasz Wierzbicki. On fracture locus in the equivalent strain and stress triaxiality space, *International Journal of Mechanical Sciences* 46 (2004) 81–98.



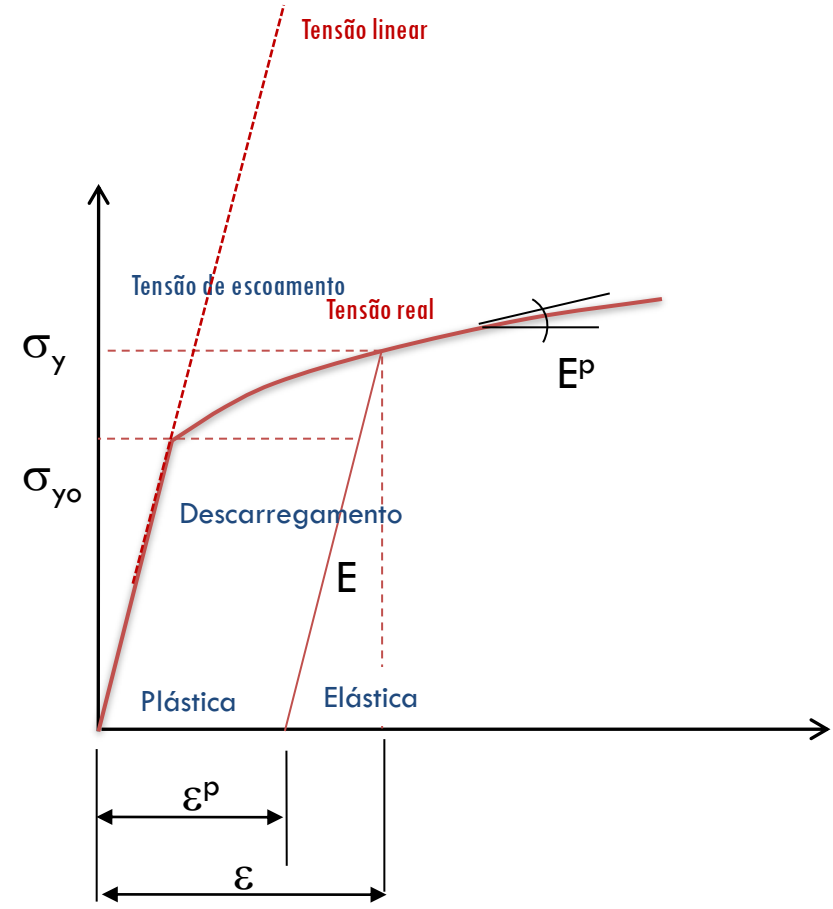


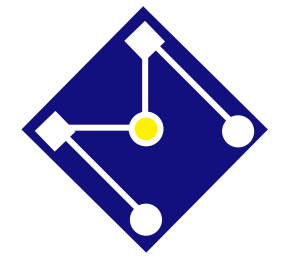
**POLI** USP



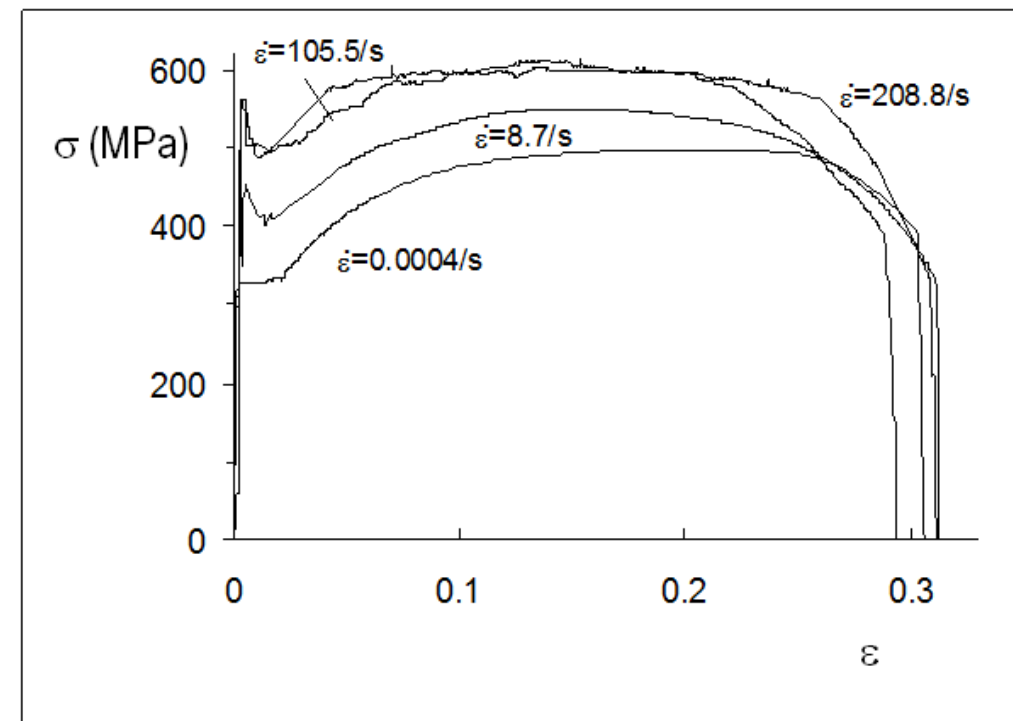


# PLASTICIDADE

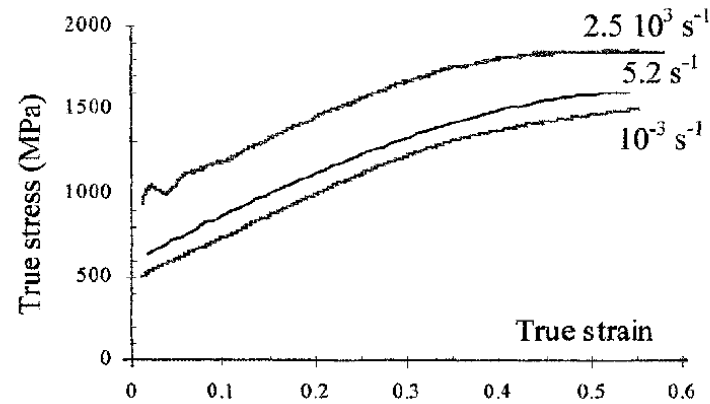
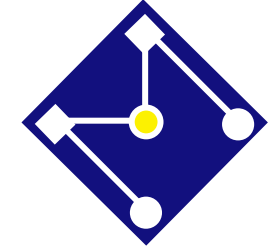




# MATERIAL DEPENDENTE DA TAXA DE DEFORMAÇÃO E TEMPERATURA

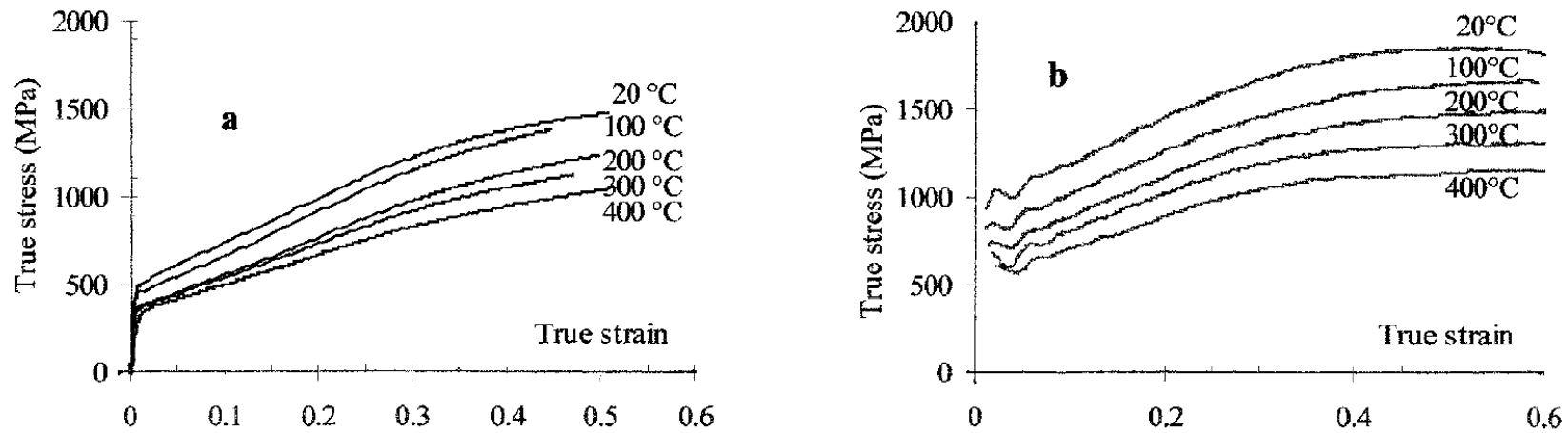


aço



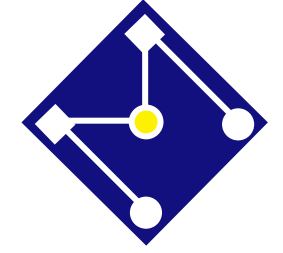
**Figure 1:** Stress-strain curves of Uranus B66\* at different strain rates at room temperature

\* nitrogen austenitic stainless steel



**Figure 2:** Stress-strain curves of Uranus B66 at different temperatures: a) at  $10^{-3} \text{ s}^{-1}$  and b) at  $2.5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$

S. Fréchar, A. Lichtenberger, F. Rondot, N. Fader, A. Redjaïmia and M. Adoum *A new constitutive model for nitrogen austenitic stainless steel* J. Phys. France 110 (2003)



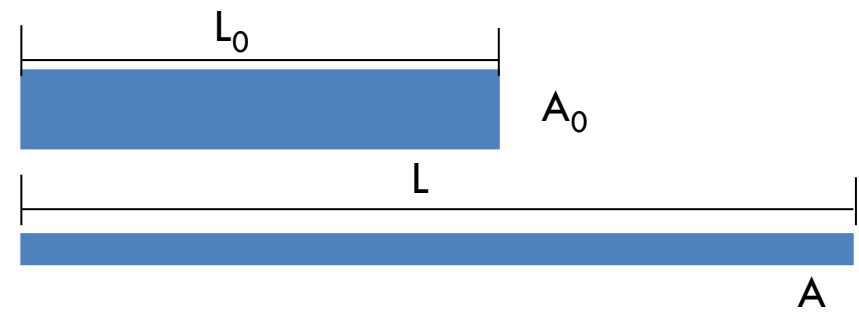
# GEOMETRIA

$$[K] = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

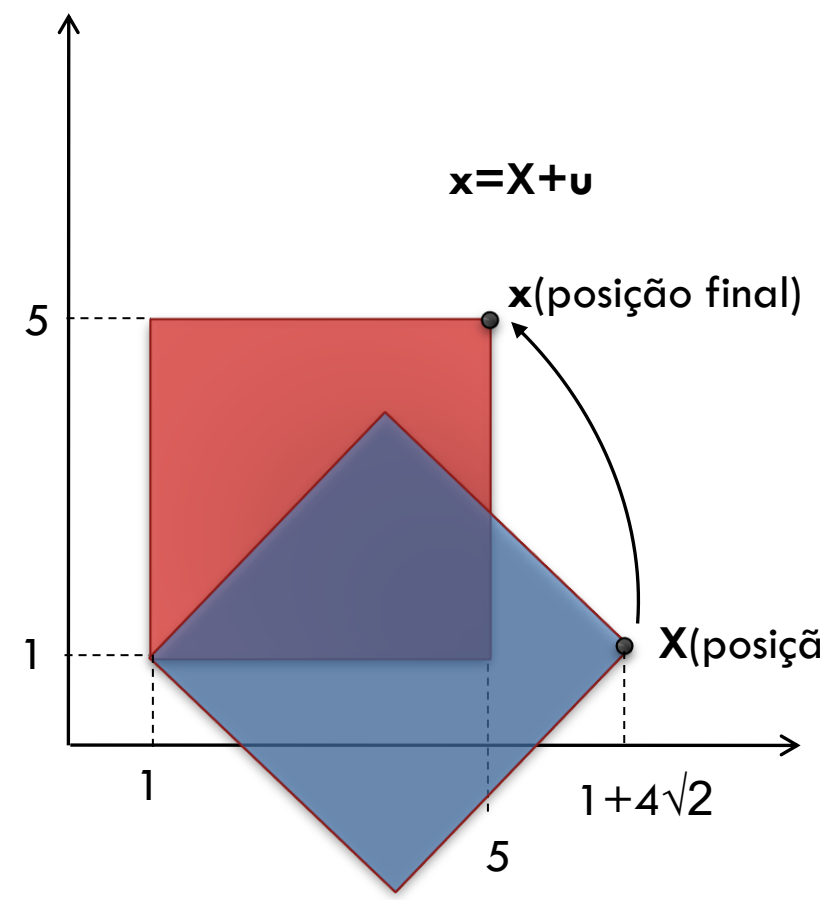
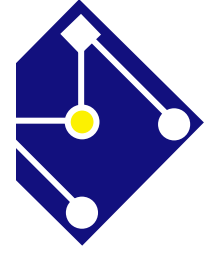
***K** depende de **A** e **L**,  
que dependem de **u**  
e...*

$$...[u] = [K]^{-1}[F]...$$

*... **u** depende de **K***







$$u = x - X$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y - X = 1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y$$

$$v = y - Y$$

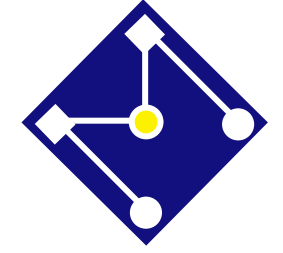
$$= 1 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y - Y = 1 - \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}X + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)Y$$

$$x = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}X - \frac{\sqrt{2}}{2}Y$$

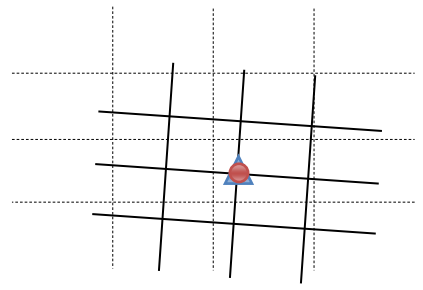
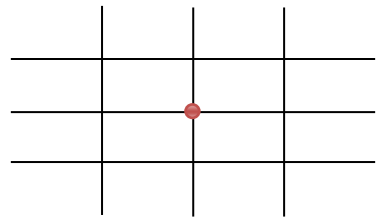
$$y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}X + \frac{\sqrt{2}}{2}Y - \sqrt{2}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} \\ \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial v}{\partial X} \end{bmatrix} \neq \mathbf{0}$$

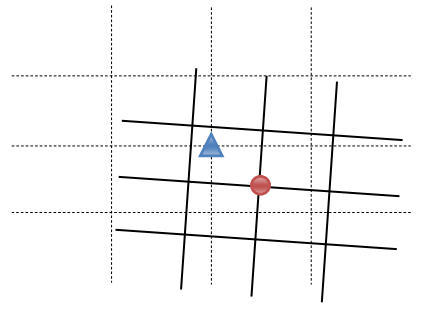
• A idéia básica da *OBJETIVIDADE* é que rotações de corpo rígido não induzam deformação ao material.



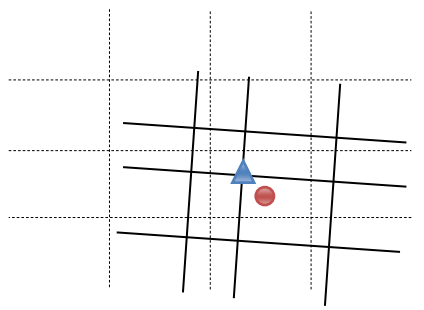
# ADAPTAÇÃO DE MALHA



Malha Lagrangiana

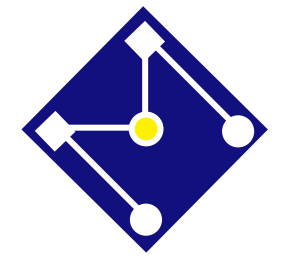


Malha Euleriana

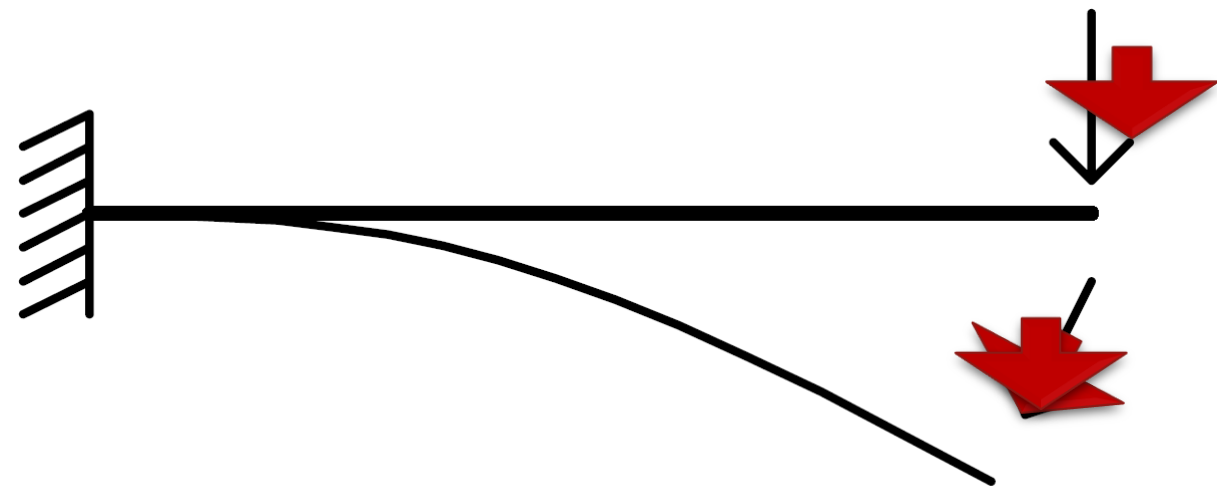


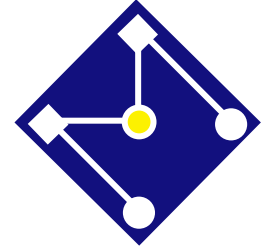
Malha ALE – Lagrangiana Euleriana arbitrária

▲ Ponto material sendo analisado  
● Posição original do ponto material



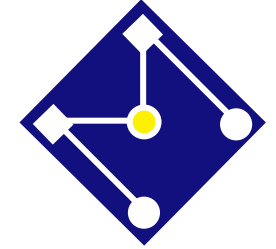
# GRANDES DESLOCAMENTOS — PENSE SOBRE O CARREGAMENTO...





# HIPERELASTICIDADE

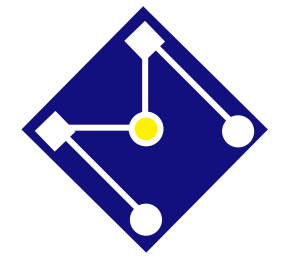
- Inclui não linearidade geométrica e do material.
- Com a hiperelasticidade é possível modelar, por exemplo, borracha, espumas elásticas, tecido humano, etc...



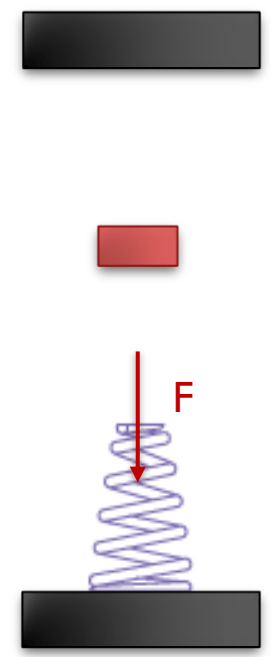
# MELHORES MODELOS DE HIPERELASTICIDADE

Neo-hookean	9.26%
Arruda-Boyce	19.91%
Mooney-Rivlin	25.00%
Ogden	13.43%
Marlow	6.02%
Polynomial	4.17%
Yeoh	9.72%
Wan der Waals	0.46%
Flory	0.93%
My own model	5.56%
Hyperelasticity is not good enough	5.56%

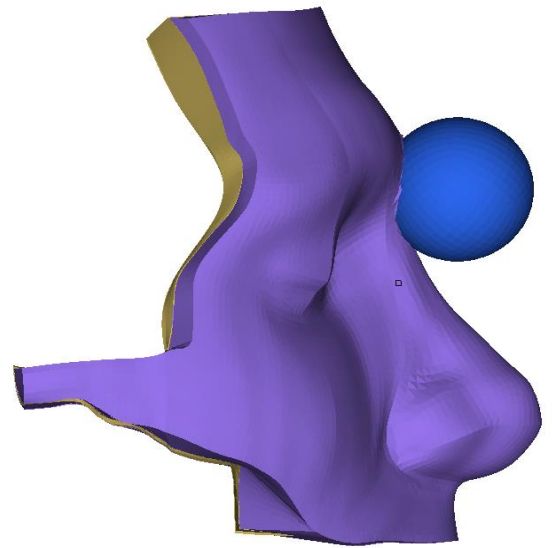
Total Votes: 216  
<http://polymerfem.com>



# CONTORNO



As condições de contorno dependem de **U**...

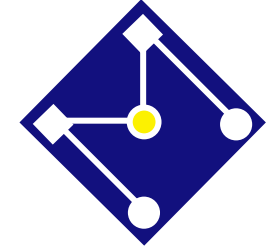


$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

... Mas elas são impostas em **K** para calcular **U**

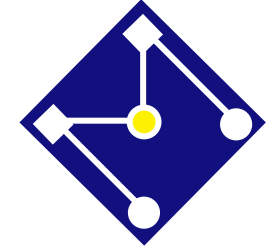


# TODOS OS TIPOS DE NÃO LINEARIDADE



# TODOS OS TIPOS DE NÃO LINEARIDADE





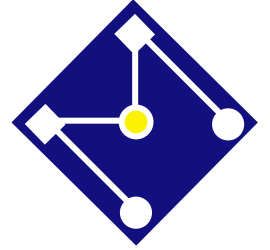
# SISTEMAS DE UNIDADES CONSISTENTE

A maioria dos códigos de EF permitem que o usuário insira um conjunto qualquer de unidades coerentes. Verifique se as forças, os deslocamentos, propriedades dos materiais têm as mesmas unidades. **Caso use MPa para pressão, cuidado com a densidade!!!**

<b>Massa</b>	kg	kg	t	lbf-s <sup>2</sup> /in	slug
<b>Comprimento</b>	m	mm	mm	in	ft
<b>Tempo</b>	s	s	s	s	s
<b>Constante gravitacional</b>	9,807	9807	9,807	386	32.2
<b>Força</b>	N	mN	N	lbf	lbf
<b>Pressão/ Módulo de elasticidade</b>	Pa	kPa	MPa	psi	psf
<b>Densidade</b>	kg/m <sup>3</sup>	kg/mm <sup>3</sup>	t/mm <sup>3</sup>	lbf-s <sup>2</sup> /in <sup>4</sup>	slug/ft <sup>3</sup>
<b>Módulo Elasticidade Aço</b>	210e12	210e6	210e3	30e6	4,32e9
<b>Densidade do aço</b>	7860	7,86E-6	7,86E-9	7,5e-4	15,2

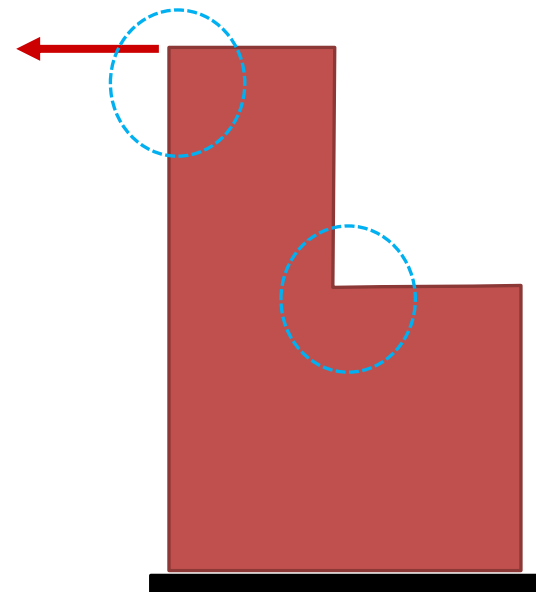
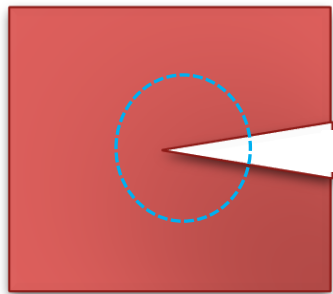
# SIMPLIFICAÇÕES DE MODELO

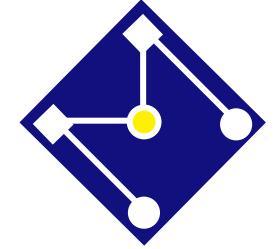




# TOME CUIDADO COM AS SIMPLIFICAÇÕES!

- Arredondamentos previnem singularidades;
- Carregamentos concentrados em pontos restritos isolados geram singularidades.



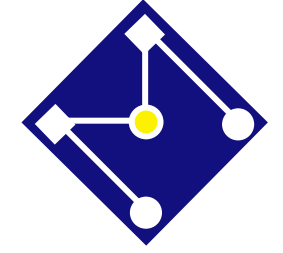


## E A SIMETRIA?

- Simetria é uma poderosa ferramenta do método. Simetria é fácil de criar e permite o uso de malhas mais refinadas com um tempo de processamento menor. Reduz também erros numéricos.
- Use simetria quando : pode-se usar quando geometria, modelo de material, carregamento e condições de contorno são simétricas a respeito do mesmo plano.

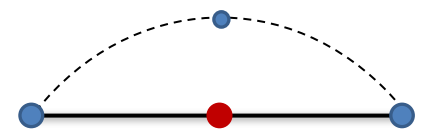
Não se usa simetria para análise modal, pois os modos não são sempre simétricos.

**IMPORTANTE:** Quando a simetria é usada, deve-se tomar cuidado com o carregamento. Essa é uma comum fonte de erro em pré processamento!

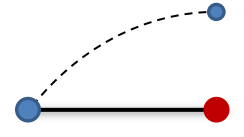


# VEJA QUE...

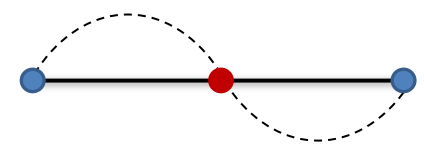
- Exemplo de uma viga bi apoiada – dois primeiros modos de vibrar,



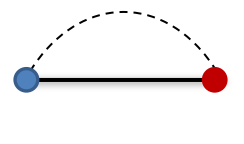
Movimento **simétrico** em relação ao nó central



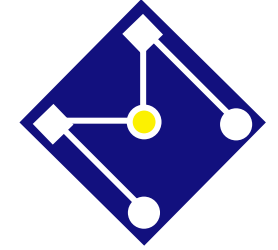
Rotação do nó central deve ser impedida



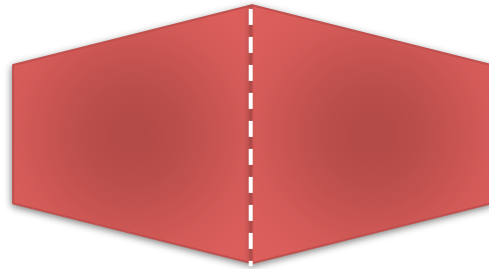
Movimento **antissimétrico** em relação ao nó central



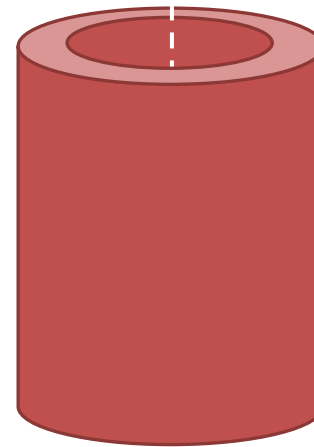
Translação do nó central deve ser impedida



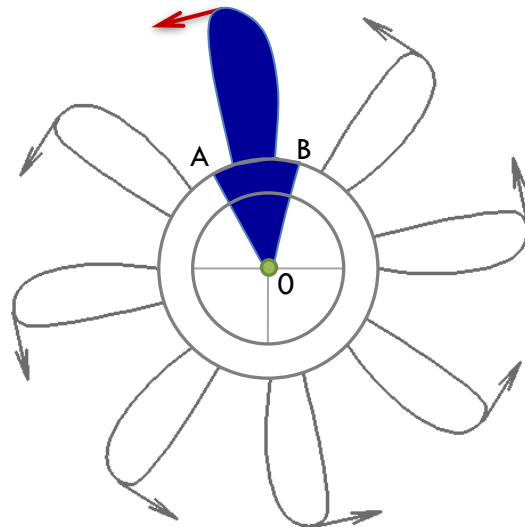
# DIFERENTES TIPOS DE SIMETRIA



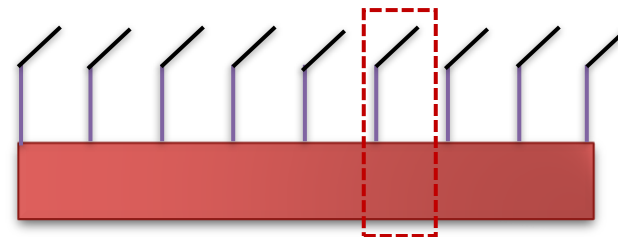
*Simetria espelhada*



*Axissimetria*

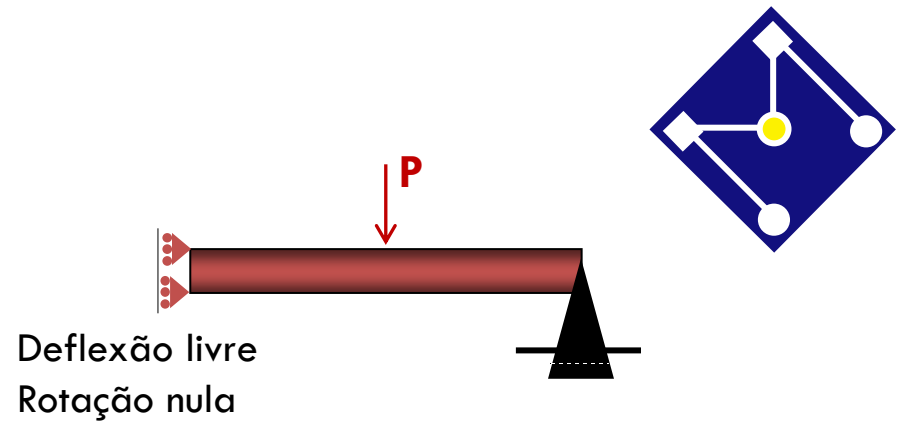
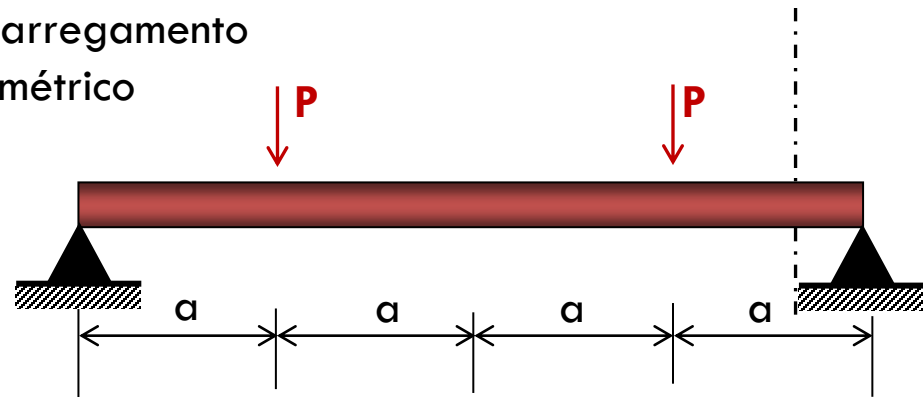


*Simetria cíclica*



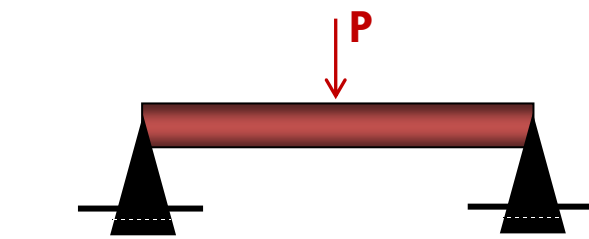
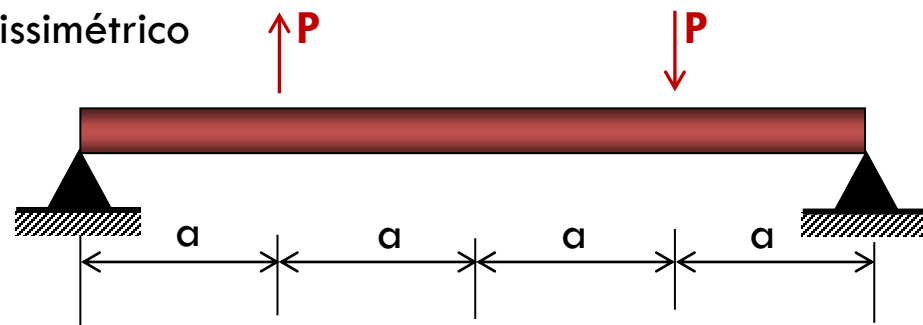
*Simetria repetitiva*

Carregamento simétrico

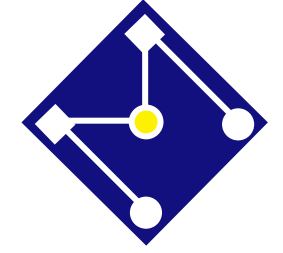


Deflexão livre  
Rotação nula

Carregamento antissimétrico



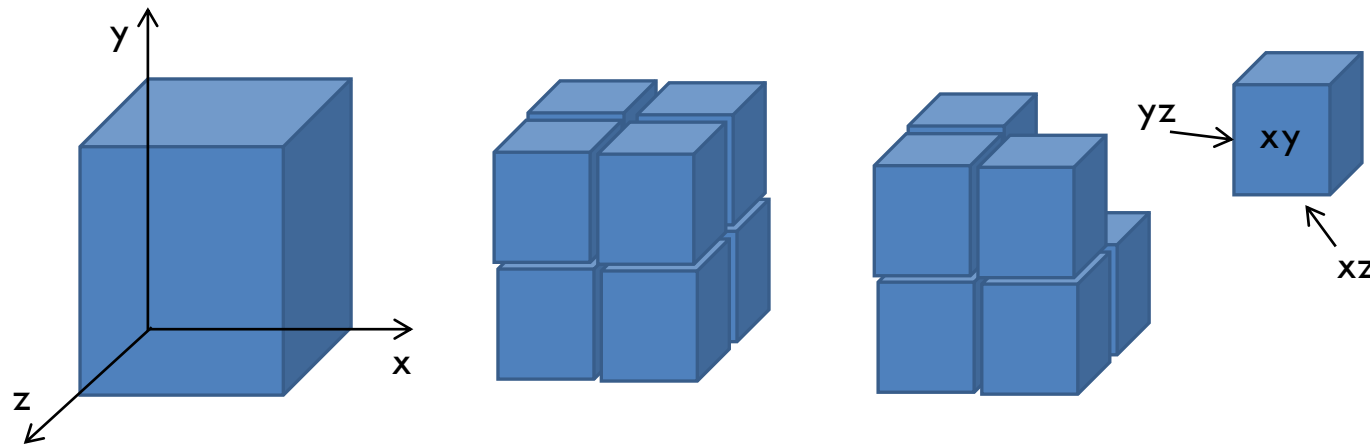
Deflexão nula  
Rotação livre



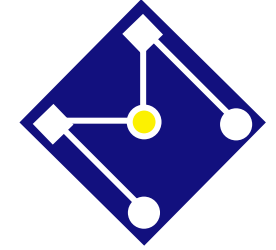
Simétrico

- Impede-se deslocamentos normais ao plano de simetria ;
- Impede-se rotações nos eixos paralelos ao plano de simetria.

Plano de simetria	u	v	w	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$
xy	0	0	1	1	1	0
yz	1	0	0	0	1	1
xz	0	1	0	1	0	1



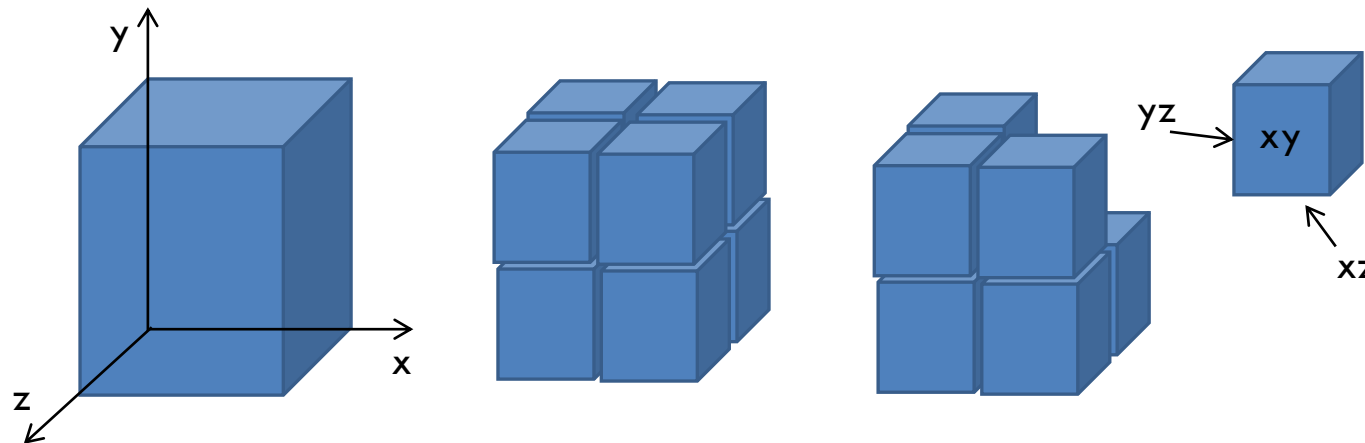


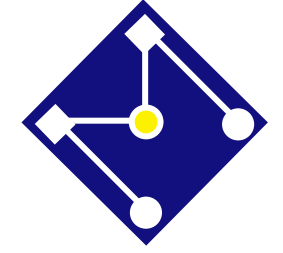


Antissimétrico

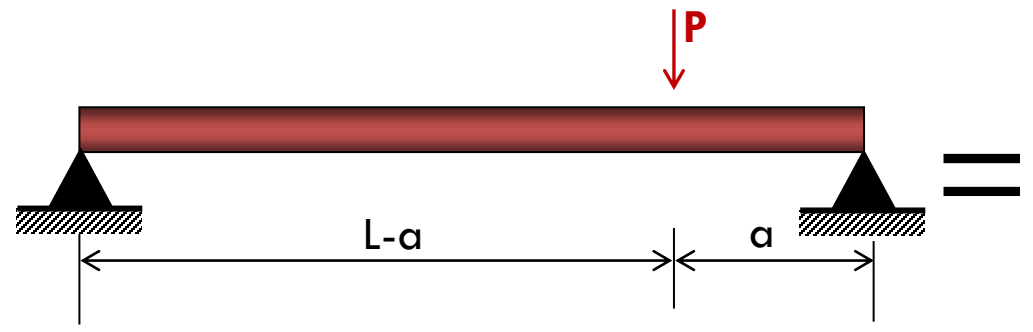
- Impede-se deslocamentos paralelos ao plano de simetria ;
- Impede-se rotações nos eixos normais ao plano de simetria.

Plano de simetria	u	v	w	$\theta_x$	$\theta_y$	$\theta_z$
xy	1	1	0	0	0	1
yz	0	1	1	1	0	0
xz	1	0	1	0	1	0

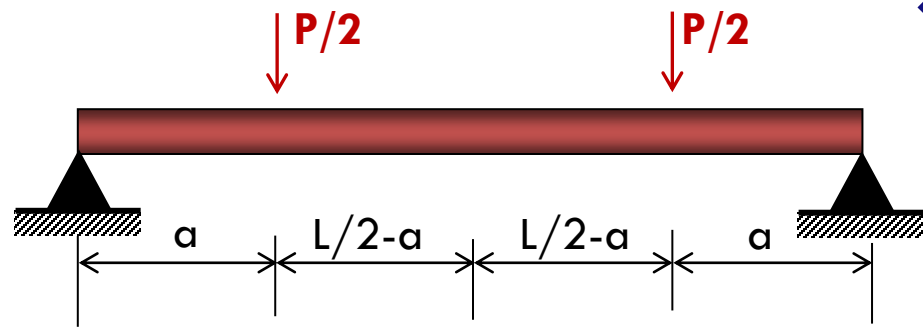




Em algumas situações é vantajoso transformar um carregamento na soma de um simétrico com um antissimétrico. É sempre possível, quando a geometria é simétrica.

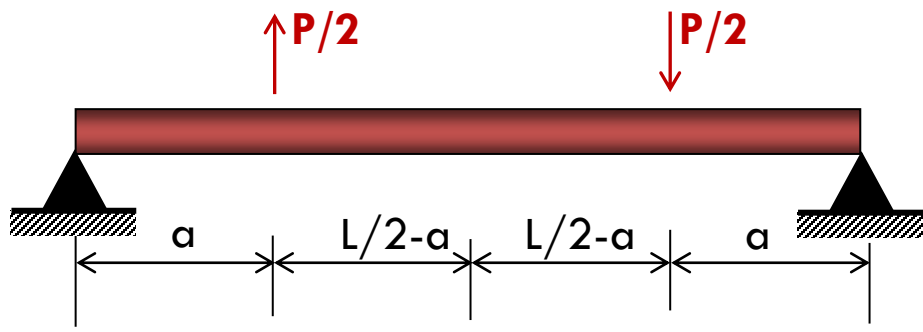


=



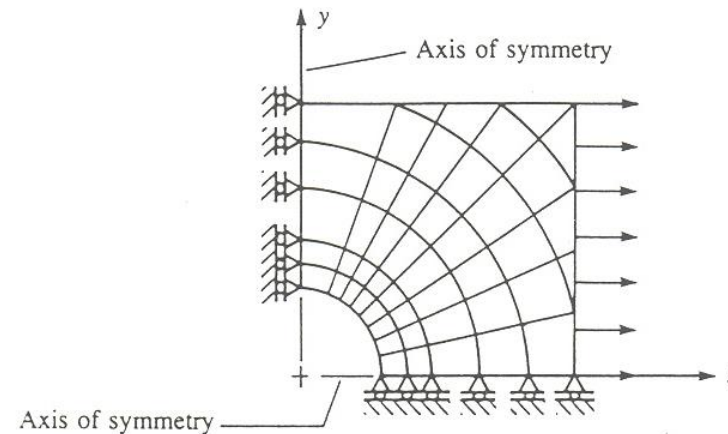
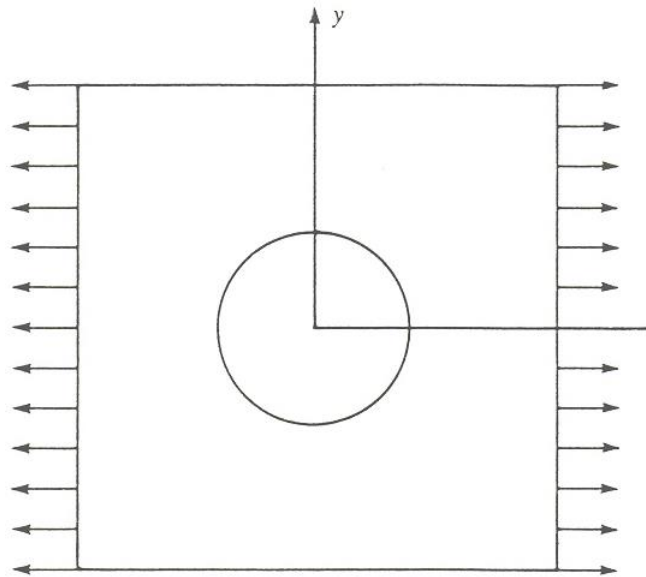
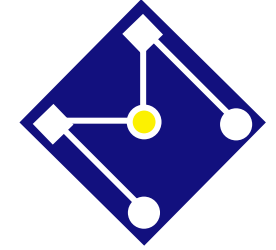
Carregamento simétrico

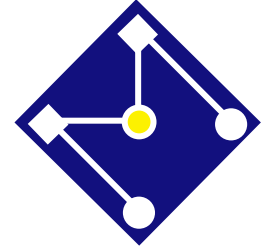
+



Carregamento antissimétrico

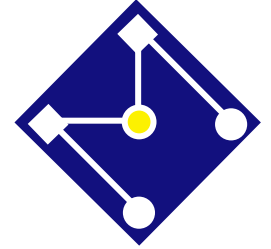
# EXEMPLO QUE VOCÊS PODEM MODELAR COM O PROGRAMA ISOPARAMÉTRICO DE VOCÊS...





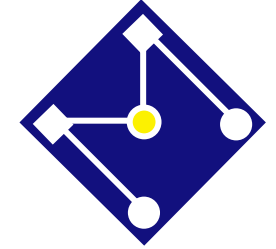
# CONDIÇÕES DE CONTORNO

- **Modelar qualquer condição de contorno é possível desde que se saiba como ela é!!!** As condições de contorno devem estar o mais próximo possível da realidade, o que é uma tarefa difícil. Por exemplo, não existe um único ponto restrito, isso é uma aproximação grosseira, na realidade, uma pequena área deve estar restrita;
- Se a deformação dos suportes não é desprezível, estes devem ser modelados também;
- Quando uma estrutura é esticada, ela se contrai na direção perpendicular (Poisson). Essa deformação, se for impedida pelas condições de contorno, gera singularidade.
- **Cuidado com as condições de contorno de simetria!!!**



# CARREGAMENTO

- **Modelar qualquer carregamento é possível desde que se saiba como ele é!!!**  
O carregamento deve estar o mais próximo possível da realidade, o que é uma tarefa difícil. Por exemplo, não existe um único ponto de carregamento, isso é uma aproximação grosseira, na realidade, uma pequena área está carregada;
- Investigue todas combinações de carregamento possíveis, dentro de um intervalo de valores;
- Cheque se a soma das reações bate com o carregamento total aplicado;
- Tenha em mente o caminho do carregamento através da estrutura ao analisar a resposta;
- Cheque flambagem, quando for o caso.



# ALÉM DISSO...

- Se o problema envolve qualquer não linearidade, anisotropia, efeitos térmicos e dinâmicos – analise primeiramente o modelo mais simples e que permite uma “previsão” da resposta: modelo linear isotrópico e estático. Deve-se, sempre, iniciar com um modelo simples e adicionar complexidades aos poucos. Encontre as armadilhas que você caiu antes de executar um modelo por vários dias ...
- Verifique sempre **MAIS DE UMA VEZ** a entrada de dados (geometria, condições de contorno e material)... Problemas nos dados de entrada podem, por exemplo, gerar uma relação entre os coeficientes de rigidez máxima e mínima dos elementos superior a  $1E8$ .

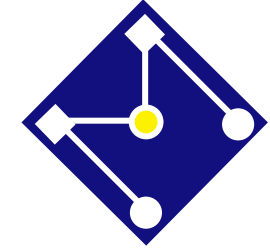
- Quando importar modelo, nunca assuma que os dados estão corretos!

```

Range of element maximum matrix coefficients in global coordinates
Maximum= 287420016 at element 978.
Minimum= 4.418766981E-03 at element 1677.

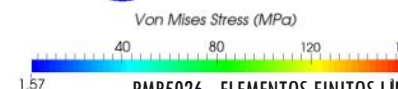
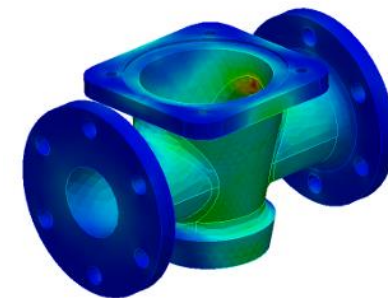
*** WARNING ***                      CP=      4.727    TIME= 15:02:27
Coefficient ratio exceeds 1.0e8 - Check results.
    
```

- Além disso, utilizar diferentes condições de contorno em vez de uma única pode ajudar a indicar problemas de **sensibilidade do projeto!**
- Tenha certeza do comportamento do material que você está modelando.



# PÓS PROCESSAMENTO

- Avalie os resultados sempre com uma certa dose de ceticismo...
- Os resultados devem ser interpretados à luz da finalidade da análise e das possíveis implicações dos resultados no projeto.
- Bom senso e julgamento de um bom engenheiro são muuuito mais importantes que os resultados do computador.
- Use resultados experimentais e cálculos feitos a mão.
- Discuta modelo e resultados com seus colegas.
- Se o engenheiro não sabe modelar o problema sem ter o computador, ele não deve fazê-lo tendo o computador!



*Fancy, colorful contours can be produced by any model, good or bad!!!!*

# Sanity Check: Peer Review

ANSYS®

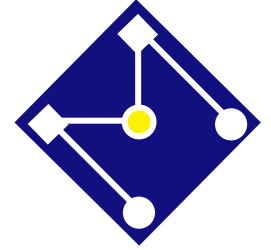


**Having a fellow engineer review your analysis can help you catch problems in the model.**

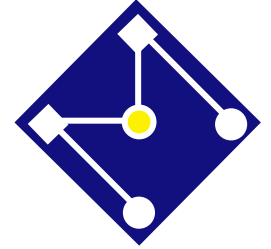
**Can be informal, one-on-one, or a formal review, with a team looking over the analysis.**

**Either way, it's better to be embarrassed in front of your colleagues, than in front of your customer!**

**POLI** USP

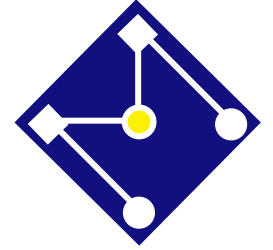






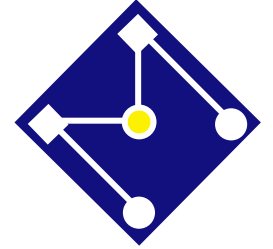
# DOCUMENTE SEU TRABALHO!

- Detalhe todas as decisões tomadas e simplificações assumidas
- Justifique carregamentos e condições de contorno consideradas
- Documente os dados do material
- Documente testes experimentais e analíticos
- Documente os resultados de maneira clara: reações, deslocamentos, tensões.



# FILOSOFIA DO CURSO...

- Um erro muito comum atualmente é a confusão entre *conhecimento de análise estrutural* com *conhecimento de manuseio de software de elementos finitos*.
- Segundo *Avelino Alves Filho*,
  - **SE O ENGENHEIRO NÃO SABE MODELAR O PROBLEMA SEM TER O COMPUTADOR, ELE NÃO DEVE FAZÊ-LO TENDO O COMPUTADOR!**



“ Finite Element Analysis makes a *good* engineer *great*,

and a *bad* engineer *dangerous* !”

Robert D. Cook, Professor of Mechanical Engineering  
University of Wisconsin, Madison

FIM

---

Fim do curso.

