# Algumas soluções - Lista 2

Cálculo - FAU

Monitora - Juliane Trianon Fraga

*Exercício 1:*

Dados vetores não-nulos $\vec{u} = (u_0, u_1, u_2)$ e $\vec{v} = (v_0, v_1, v_2)$, vale que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$, em que $\theta$ é o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (o menor deles). Como também sabemos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_0v_0 + u_1v_1 + u_2v_2$, conclui-se $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$.

(a) Basta aplicarmos a fórmula mostrada acima, sabendo que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 = -1$, $\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}$ e $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Ficamos com $\cos\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{13 \cdot 3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{39}}$.

*Exercício 2:*

(a) Para que $\vec{u}$ seja perpendicular a $\vec{v}$, deve valer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Então:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4x + x^2 + 4 = 0,$$

ou seja, $(x+2)^2 = 0$. A única solução é $x = -2$.

*Exercício 3:*

Para que $\vec{u} = (u_0, u_1, u_2)$ seja ortogonal a $\vec{v}$ e a $\vec{w}$, deve valer que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$. Então:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 4u_0 - u_1 + 5u_2 = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{w} = u_0 - 2u_1 + 3u_2 = 0.$$

Por último, o enunciado diz que

$$\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = u_0 + u_1 + u_2 = -1.$$

Resolvendo o sistema de três equações e três incógnitas acima, obtemos $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ e $u_2 = -1$, e assim $\vec{u} = (1, -1, -1)$.

*Exercício 4:*

Seja $\vec{u} = (u_0, u_1, u_2)$. Pelas informações do enunciado,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{2},$$

$$\vec{u} \cdot (1, -1, 0) = \|\vec{u}\| \|(1, -1, 0)\| \cos 45^o,$$

$$\vec{u} \cdot (1, 1, 0) = 0.$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos

$$u_0 - u_1 = \sqrt{2}\sqrt{1+1}\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Da terceira equação,

$$u_0 + u_1 = 0.$$

Temos, portanto, um sistema nas duas equações anteriores, que resulta em $u_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $u_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Agora, novamente usando que $\|\vec{u}\| = \sqrt{u_0^2 + u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{2}$, podemos encontrar $u_2$:

$$2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + u_2^2,$$

ou seja, $u_2 = \pm 1$. Logo, há duas respostas possíveis, $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ ou $\vec{u} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -1\right)$.

*Exercício 5:*

Seja $\theta$ o ângulo entre $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$. Sabemos que

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u} + \vec{v}\| \|\vec{u} - \vec{v}\| \cos \theta. \tag{1}$$

Nossa estratégia será calcular todos os termos da equação acima para encontrar o ângulo $\theta$. Primeiramente, sabemos que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{5}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Pelas propriedades do produto escalar, também temos

$$\begin{aligned}||\vec{u}+\vec{v}||^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= ||\vec{u}||^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2\\ &= 5+\sqrt{10}+1\\ &= 6+\sqrt{10}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}||\vec{u}-\vec{v}||^2 &= (\vec{u}-\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v})\\ &= \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= ||\vec{u}||^2-2\vec{u}\cdot\vec{v}+||\vec{v}||^2\\ &= 5-\sqrt{10}+1\\ &= 6-\sqrt{10}.\end{aligned}$$

Pelo mesmo raciocínio,

$$\begin{aligned}(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}-\vec{v}) &= \vec{u}\cdot\vec{u}-\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}\\ &= ||\vec{u}||^2-||\vec{v}||^2=4.\end{aligned}$$

Substituindo todos os valores encontrados na equação (1), obtemos

$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{6+\sqrt{10}}\sqrt{6-\sqrt{10}}} = \frac{4}{\sqrt{26}}.$$

*Exercício 6:*

A projeção $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{w}$ de um vetor $\vec{w}$ na direção de um vetor não-nulo $\vec{v}$ é dada por:

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{w} = \frac{\vec{w}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.$$

Então, por exemplo:

(a)

$$\vec{w}\cdot\vec{v} = 1\cdot 3+(-1)\cdot(-1)+2\cdot 1 = 6,$$
$$\|\vec{v}\|^2 = 3^2+(-1)^2+(1)^2 = 11$$

e portanto $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{w} = \dfrac{6}{11}(3,-1,1)$.

*Exercício 7:*

A norma do produto vetorial $\vec{u} \wedge \vec{v}$ de dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pode ser relacionada com ângulo $\theta$ entre eles da seguinte forma:

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \operatorname{sen} \theta.$$

Portanto, para os vetores do enunciado temos que

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 1 \cdot 7 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = \frac{7}{2}.$$

Agora, pelas propriedades do produto vetorial e de norma,

$$\begin{aligned} \|\frac{1}{3}\vec{u} \wedge \frac{3}{4}\vec{v}\| &= \|(\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4})\vec{u} \wedge \vec{v}\| \\ &= |\frac{1}{4}|\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \frac{7}{8}. \end{aligned}$$

*Exercício 8:*

A área de um parelelogramo formado por representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ (com o mesmo ponto inicial) é numericamente igual à norma do produto vetorial, $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$. Note que se $ABCD$ é um paralelogramo, ele é formado pelos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$, mas também por outros pares, como $\vec{BC}$ e $\vec{BA}$ (faça um desenho e isso ficará claro). Entretanto, o paralelogramo formado pelos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AD}$ não é o mesmo, uma vez que o ponto $D$ não é adjacente ao ponto $A$. Porém, a sua área será igual à do paralelogramo $ABCD$ (novamente, o desenho ajuda a entender o motivo).

Pela observação acima, a área do paralelogramo $ABCD$ do problema será numericamente igual à norma do produto vetorial de $\vec{AB}$ e $\vec{AD}$. Como

$$\vec{AB} \wedge \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = (5, -6, -1),$$

a área de $ABCD$ é $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\| = \sqrt{5^2 + (-6)^2 + (-1)^2} = \sqrt{62}$.

*Exercício 9:*

A área do triângulo $ABC$ é metade da área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$. Logo, será numericamente igual a $\dfrac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{2}$ (vide problema anterior). Assim,

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-3, -3, 1),$$

e a área do triângulo é $\dfrac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{2} = \dfrac{\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (1)^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$.

*Exercício 10:*

O volume de um paralelepípedo formado por representantes dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ (com o mesmo ponto inicial) é numericamente igual ao módulo do produto misto, $|\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w}|$. Logo, como

$$\vec{u} \cdot \vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

o volume do paralepípedo do problema é $V = |-2| = 2$.