Algumas soluções - Lista 1

Cálculo - FAU

Monitora - Juliane Trianon Fraga

Exercício 6:

Calculamos o produto escalar de $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ da seguinte forma:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2.$$

Então:

(d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-3) + 6 \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 0.$

Exercício 7:

Calculamos o produto escalar de $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ da seguinte forma:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Então:

(a) $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & -2 & -4 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-2-8)\vec{i} + (4-6)\vec{j} + (-12-2)\vec{k} = (-10, -2, -14)$

Exercício 8:

(a) Se $A = (0, 2)$ e $B = (1, 0)$, $B = A + \vec{AB}$ e portanto $\vec{AB} = (1, 0) - (0, 2) = (1, -2)$ é vetor diretor da reta procurada e a equação vetorial fica

$$(x, y) = (0, 2) + t(1, -2), \ t \in \mathbf{R}.$$

A equação paramétrica,

$$\begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \end{cases}, \ t \in \mathbf{R}.$$

(b) Se $A = (1,0,1)$ e $B = (0,1,0)$, $B = A + \vec{AB}$ e portanto $\vec{AB} = (0,1,0) - (1,0,1) = (-1,1,-1)$ é vetor diretor da reta procurada e a equação vetorial fica

$$(x,y,z) = (1,0,1) + t(-1,1,-1), \ t \in \mathbf{R}.$$

A equação paramétrica,

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 - t \end{cases}, \ t \in \mathbf{R}.$$

(c) Como o vetor $\vec{v}$ deve ser paralelo à reta procurada, ele é um possível vetor diretor dela. Portanto, a equação vetorial fica

$$(x,y) = (1,2) + t(-1,1), \ t \in \mathbf{R}.$$

A equação paramétrica,

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \end{cases}, \ t \in \mathbf{R}.$$

(d) Vamos inicialmente encontrar um vetor diretor da reta $3x + 2y = 2$. Para isso basta encontrarmos dois pontos que obedecem à equação, por exemplo, $A = (0,1)$ e $B = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$, e

$$\vec{AB} = \left(\frac{2}{3}, 0\right) - (0,1) = \left(\frac{2}{3}, -1\right)$$

é vetor diretor. Agora, digamos que $\vec{u} = (a,b)$ seja um vetor diretor da reta procurada. Como ela deve ser perpendicular à $3x + 2y = 2$, o produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{AB}$ deve ser nulo:

$$\vec{u} \cdot \vec{AB} = \frac{2a}{3} - b = 0,$$

e assim $b = \frac{2a}{3}$. Então $\vec{u} = (a, \frac{2a}{3})$. Note que existe liberdade para a. De fato, qualquer múltiplo **não-nulo** de um vetor diretor de alguma reta, também é um vetor diretor. Podemos assim escolher qualquer $a \in \mathbf{R}$ diferente de 0. Por exemplo, $a = 3$. Portanto, a equação vetorial fica

$$(x,y) = (1,-1) + t(3,2), \ t \in \mathbf{R}.$$

A equação paramétrica,

$$\begin{cases} x = 1 \ + \ 3t \\ y = -1 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

(e) Nesse item é importante lembrar de uma propriedade importante do produto vetorial: $\vec{u} \times \vec{v}$ é sempre perpendicular a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Portanto, $\vec{u} \times \vec{v}$ será um vetor diretor da reta procurada. Como

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (1+2)\vec{i} + (1-1)\vec{j} + (-2-1)\vec{k} = (3, 0, -3),$$

a equação vetorial fica

$$(x, y) = (1, 2, -1) + t(3, 0, -3), \ \ t \in \mathbf{R}.$$

A equação paramétrica,

$$\begin{cases} x = 1 \ + \ 3t \\ y = 2 \\ z = -1 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Observe que poderíamos ter substituído o vetor diretor $(3, 0, -3)$ por $(1, 0, -1)$, pois múltiplos não-nulos de vetores diretores de uma reta também o são.

Exercício 9:

(a) Como os vetores $\vec{v} = (1, 1, 1)$ e $\vec{u} = (0, 2, 3)$ são paralelos ao plano, $\vec{u} \times \vec{v}$ é vetor normal. Obtemos então que

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = (3-2)\vec{i} + (0-3)\vec{j} + (2-0)\vec{k} = (1, -3, 2)$$

é vetor normal. Logo, dado um ponto arbitrário $B = (x, y, z)$ do plano e um ponto fixo do mesmo, por exemplo, $A = (1, 2, 3)$, o produto escalar do vetor $\vec{AB} = (x-1, y-2, z-3)$ por $(1, -3, 2)$ deve ser nulo:

$$(1, -3, 2) \cdot (x-1, y-2, z-3) = (x-1) - 3(y-2) + 2(z-3) = x - 3y + 2z - 1 = 0.$$

A expressão acima é a equação geral do plano.

Exercício 10:

(c) *Primeiro Método:*

Vamos encontrar três pontos não-colineares do plano em questão. Mas como saber se os três pontos encontrados satisfarão essa propriedade? Os pontos A, B e C serão não-colineares se os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AC}$ não forem paralelos, isto é, se um não é múltiplo do outro. Se escolhêssemos, por exemplo, os pontos $A = (0,0,0)$, $B = (1,-1,0)$ e $C = (2,-2,0)$, obteríamos $\vec{AB} = (1,-1,0)$ e $\vec{AC} = (2,-2,0)$, que são múltiplos um do outro. Portanto, eles, junto com um ponto, não formam um plano, mas sim uma reta. Para consertar isso, podemos por exemplo substituir o ponto C por $C' = (0,0,1)$. Nesse caso, $\vec{AC'} = (0,0,1)$, que não é múltiplo de $\vec{AB}$. A equação vetorial fica

$$(x,y,z) = (0,0,0) + t(1,-1,0) + s(0,0,1), \ \ s,t \in \mathbf{R}.$$

Segundo Método:

Nesse método, consideramos x, y ou z os próprios parâmetros s e t do plano. Nesse caso, por exemplo, vamos impor

$$\begin{cases} x = t \\ z = s \end{cases}, \ \ s,t \in \mathbf{R}.$$

Substituindo na equação do plano, obtemos que $y = -t$. Então

$$(x,y,z) = (t,-t,s) = (0,0,0) + t(1,-1,0) + s(0,0,1), \ \ s,t \in \mathbf{R}.$$

é a equação vetorial do plano. Esse método em geral é mais rápido e melhor que o anterior, o único cuidado a se tomar é que não temos sempre liberdade para escolher quais das variáveis usaremos como parâmetro. Nesse caso, por exemplo, não daria para impor $x = t$ e $y = s$. De fato, esses parâmetros possuem liberdade para variar nos reais, de forma que a equação $x+y = 0$ nem sempre seria satisfeita. Como regra geral, sempre que quisermos que x, y ou z sejam os parâmetros do plano, e uma (ou duas) variáveis não aparecerem na equação, ela (ou ambas) deverão obrigatoriamente ser parâmetros do plano. Por exemplo, no caso da equação $y = 0$, x e z deverão ser s e t.

Exercício 11:

(a) Se $A = (1,0,1)$, $B = (2,1,-1)$ e $C = (1,-1,0)$, temos que $\vec{AB} = (1,1,-2)$ e $\vec{AC} = (0,-1,-1)$. Então a equação vetorial do plano fica

$$(x,y,z) = (1,0,1) + t(1,1,-2) + s(0,-1,-1), \ \ s,t \in \mathbf{R}.$$

Para passar para a equação geral, utilize o método do exercício 9.

(b) Como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos ao plano procurado e não são paralelos entre si, tratam-se de dois vetores diretores que formam o plano, junto com um ponto:

$$(x, y, z) = (-3, -7, 1) + t(1, 1, 1) + s(-1, 1, 0), \ \ s, t \in \mathbf{R}.$$

(c) Primeiramente, vamos encontrar a reta que é a intersecção dos planos dados no enunciado. Lembremos que se um plano é escrito com equação geral $ax+by+cz = d$, o vetor (a, b, c) é normal ao plano. Portanto, para os planos $x+y-z = 2$ e $2x-y+3z = 1$, temos que os vetores $(1, 1, -1)$ e $(2, -1, 3)$ são, respectivamente, vetores normais a cada um deles. Dessa forma, o vetor

$$(1, 1, -1) \times (2, -1, 3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (2, -5, -3)$$

é paralelo simultaneamente aos dois planos, sendo assim um vetor diretor da reta dada pela intersecção dos dois. Fazendo $x = 0$ nas equações dos planos, obtemos $y = \dfrac{7}{2}$ e $z = \dfrac{3}{2}$, ou seja, o ponto $\left(0, \dfrac{7}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ pertence à reta. Assim, uma equação vetorial dela é:

$$(x, y, z) = \left(0, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right) + t(2, -5, -3), \ \ t \in \mathbf{R}.$$

Como o plano procurado contém a reta acima, em particular ele conterá o ponto $\left(0, \dfrac{7}{2}, \dfrac{3}{2}\right)$ e $(2, -5, -3)$ será um vetor diretor. Pelo enunciado, também contém o ponto $(-1, 2, 1)$, e portanto o vetor $(-1, 2, 1) - \left(0, \dfrac{7}{2}, \dfrac{3}{2}\right) = \left(-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ também é diretor. Já podemos escrever a equação vetorial do plano em questão:

$$(x, y, z) = (-1, 2, 1) + t(2, -5, -3) + s\left(-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \ \ s, t \in \mathbf{R}.$$

(d) Se o plano é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (1, 1, -1)$, isso significa que ele é um vetor normal ao plano. Assim, a sua equação geral tem a forma $x + y - z = d$, para algum $d \in \mathbf{R}$. Para descobrir d substituímos na equação o ponto $(1, -1, 1)$, que sabemos pertencer ao plano:

$$1 - 1 - 1 = d, \text{isto é}, \ d = -1.$$

Sendo assim, a equação geral do plano é x+y-z=-1. Para passar para a equação vetorial, utilize o método do exercício 10.

(e) Dois planos serem paralelos é equivalente a possuírem os mesmos vetores normais. Como sabemos que $(2, -1, 3)$ é vetor normal ao plano $2x - y + 3z = 1$, também será do plano procurado. Portanto, a equação de tal plano terá a forma $2x - y + 3z = d$, para algum $d \in \mathbf{R}$. Como a origem pertence ao plano, $d = 0$ e a sua equação geral fica $2x - y + 3z = 0$.

Exercício 9:

Para calcular o produto misto, poderíamos fazer diretamente a conta do produto vetorial e em seguida do produto escalar. Entretanto, se $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1), \vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ e $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, vale que: $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Então:

(a) Se $\vec{u} = (3, 0, 2)$, $\vec{v} = (1, -4, 0)$ e $\vec{w} = (0, 0, 1)$, $\vec{u} \cdot \vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -12$.