3.07pt

Modelos Bidimensionais Contínuos

Bacharelado em Economia - FEA - Noturno

$1^{\underline{o}}$ Semestre 2017

Profs. Vanderlei C. Bueno e Gilberto A. Paula

Sumário

3.07pt

Objetivos da Aula

Objetivos da Aula

Nesta aula discutiremos alguns conceitos envolvendo Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais, as definições de função densidade de probabilidade conjunta, função densidade de probabilidade marginal e função densidade de probabilidade condicional, bem como o cálculo de esperança e variância condicional. Discutiremos o conceito de independência entre variáveis aleatórias e apresentaremos a definição de covariância e correlação linear entre variáveis aleatórias. Alguns exemplos serão apresentados.

Sumário

3.07pt

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua univariada.

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua univariada.

Exemplos

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua univariada.

Exemplos

- altura de um adulto

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua univariada.

Exemplos

- altura de um adulto
- custo do sinistro de um carro

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua univariada.

Exemplos

- altura de um adulto
- custo do sinistro de um carro
- temperatura mínima diária

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua univariada.

Exemplos

- altura de um adulto
- custo do sinistro de um carro
- temperatura mínima diária
- saldo em aplicações financeiras

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua univariada.

Exemplos

- altura de um adulto
- custo do sinistro de um carro
- temperatura mínima diária
- saldo em aplicações financeiras
- ganho de peso após dieta

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Definição

Uma função X definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua univariada.

Exemplos

- altura de um adulto
- custo do sinistro de um carro
- temperatura mínima diária
- saldo em aplicações financeiras
- ganho de peso após dieta
- distância percorrida

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Função densidade de probabilidade

A função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma variável aleatória X é uma função $f(x) \geq 0$ cuja área total sob a curva seja igual à unidade.

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Função densidade de probabilidade

A função densidade de probabilidade (f.d.p.) de uma variável aleatória X é uma função $f(x) \geq 0$ cuja área total sob a curva seja igual à unidade. Em termos matemáticos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Distribuição Uniforme

Se X é uma variável aleatória uniforme no intervalo $[1, 5]$ ($X \sim \mathrm{U}[1, 5]$), a função densidade de probabilidade de X é definida por

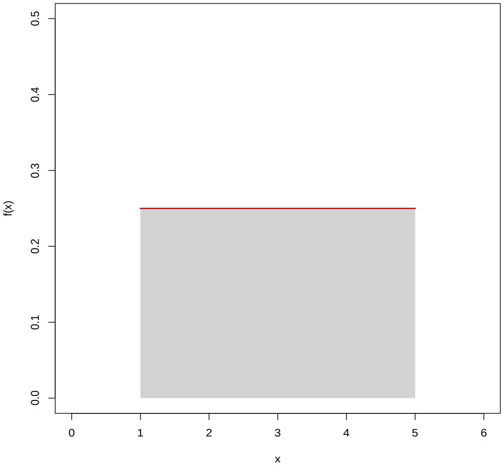
Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Distribuição Uniforme

Se X é uma variável aleatória uniforme no intervalo $[1, 5]$ ($X \sim \mathrm{U}[1, 5]$), a função densidade de probabilidade de X é definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & 1 \leq x \leq 5, \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Descrição de $f(x)$



Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

A área total sob a curva pode ser calculada diretamente pela solução da integral

Variáveis Aleatórias Contínuas

Distribuição Uniforme

A área total sob a curva pode ser calculada diretamente pela solução da integral

$$\begin{aligned}\int_1^5 \frac{1}{4} dx &= \frac{1}{4}\int_1^5 dx \\ &= \frac{1}{4} x\Big|_1^5 \\ &= \frac{1}{4}(5-1) \\ &= \frac{4}{4} = 1.\end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(a \leq X \leq b)$ corresponde à área sob a curva no intervalo $[a, b]$.

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(a \leq X \leq b)$ corresponde à área sob a curva no intervalo $[a, b]$. Em termos matemáticos

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Distribuição Uniforme

A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ pode ser calculada diretamente pela solução da integral

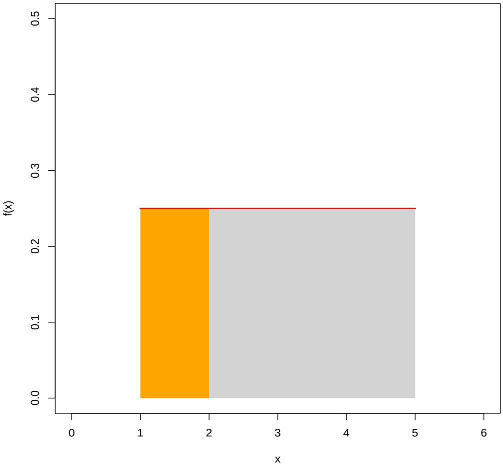
Variáveis Aleatórias Contínuas Univariadas

Distribuição Uniforme

A probabilidade $P(1 \leq X \leq 2)$ pode ser calculada diretamente pela solução da integral

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{1}{4} dx &= \frac{1}{4} \int_1^2 dx \\ &= \frac{1}{4} x \Big|_1^2 \\ &= \frac{1}{4}(2-1) \\ &= \frac{1}{4} = 0,25. \end{aligned}$$

Descrição $P(1 \leq X \leq 2)$



Sumário

3.07pt

Esperança

Definição

A esperança matemática de uma variável aleatóra contínua X fica dada por

Esperança

Definição

A esperança matemática de uma variável aleatóra contínua X fica dada por

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx.$$

Sumário

3.07pt

Variância

Definição

A variância de uma variável aleatória X contínua é definida por

Variância

Definição

A variância de uma variável aleatória X contínua é definida por

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)]^2 \\ &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2, \end{aligned}$$

Variância

Definição

A variância de uma variável aleatória X contínua é definida por

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)]^2 \\ &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2,\end{aligned}$$

em que

Variância

Definição

A variância de uma variável aleatória X contínua é definida por

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}[X - \mathrm{E}(X)]^2 \\ &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2, \end{aligned}$$

em que

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx.$$

Sumário

3.07pt

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Definição

Uma função (X, Y) definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua bivariada.

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Definição

Uma função (X, Y) definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua bivariada.

Exemplos

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Definição

Uma função (X, Y) definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua bivariada.

Exemplos

- (altura, idade)

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Definição

Uma função (X, Y) definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua bivariada.

Exemplos

- (altura, idade)
- (custo do sinistro, valor do seguro)

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Definição

Uma função (X, Y) definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua bivariada.

Exemplos

- (altura, idade)
- (custo do sinistro, valor do seguro)
- (temperatura mínima, temperatura máxima)

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Definição

Uma função (X, Y) definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua bivariada.

Exemplos

- (altura, idade)
- (custo do sinistro, valor do seguro)
- (temperatura mínima, temperatura máxima)
- (saldo poupança, saldo fundo investimento)

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Definição

Uma função (X, Y) definida sobre o espaço amostral Ω e assumindo valores num intervalo de números reais, é denominada variável aleatória contínua bivariada.

Exemplos

- (altura, idade)
- (custo do sinistro, valor do seguro)
- (temperatura mínima, temperatura máxima)
- (saldo poupança, saldo fundo investimento)
- (despesas médicas, despesas com educação)

Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais

Função densidade de probabilidade conjunta

A função densidade de probabilidade conjunta de uma variável aleatória bidimensional (X, Y) é uma função $f(x, y) \geq 0$ cujo volume total sob a superfície seja igual à unidade.

Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais

Função densidade de probabilidade conjunta

A função densidade de probabilidade conjunta de uma variável aleatória bidimensional (X, Y) é uma função $f(x, y) \geq 0$ cujo volume total sob a superfície seja igual à unidade. Em termos matemáticos

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dxdy = 1.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Exemplo distribuição bidimensional

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional no domínio $[0, 1] \times [0, 1]$ com função densidade de probabilidade conjunta definida por

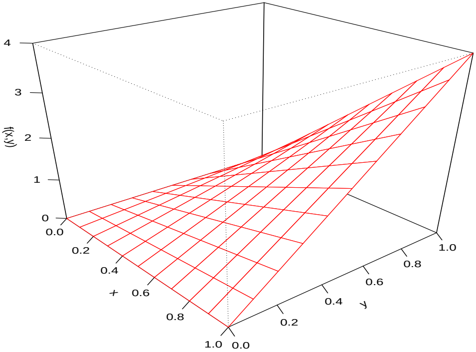
Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Exemplo distribuição bidimensional

Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional no domínio $[0, 1] \times [0, 1]$ com função densidade de probabilidade conjunta definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xy & 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Descrição de $f(x, y)$



Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais

Distribuição Uniforme Bidimensional

O volume total sob a superfície pode ser calculada diretamente pela solução da integral dupla

Variáveis Aleatórias Contínuas Bidimensionais

Distribuição Uniforme Bidimensional

O volume total sob a superfície pode ser calculada diretamente pela solução da integral dupla

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 4xydxdy &= 4\int_0^1 xdx\int_0^1 ydy\\ &= 4[x^2/2]_0^1[y^2/2]_0^1\\ &= 4\times(1/2)\times(1/2)\\ &= 1.\end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)$ corresponde ao volume sob a superfície formada pelos intervalos $[a, b] \times [c, d]$.

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Probabilidade de eventos

A probabilidade $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d)$ corresponde ao volume sob a superfície formada pelos intervalos $[a, b] \times [c, d]$. Em termos matemáticos

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dxdy.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Exemplo distribuição bidimensional

A probabilidade $P(0 \leq X \leq 1/2; 0 \leq Y \leq 1/2)$ pode ser calculada diretamente pela solução da integral dupla

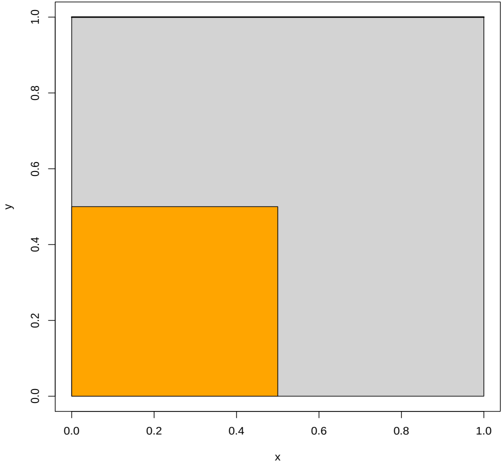
Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Exemplo distribuição bidimensional

A probabilidade $P(0 \leq X \leq 1/2; 0 \leq Y \leq 1/2)$ pode ser calculada diretamente pela solução da integral dupla

$$\begin{aligned}
\int_0^{1/2}\int_0^{1/2} 4xydxdy &= 4\int_0^{1/2} xdx \int_0^{1/2} ydy \\
&= 4[x^2/2]_0^{1/2}[y^2/2]_0^{1/2} \\
&= 4 \times (1/8) \times (1/8) \\
&= 1/16.
\end{aligned}$$

Descrição do domínio de $(0 \leq X \leq 1/2; 0 \leq Y \leq 1/2)$



Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Distribuições marginais

As funções densidade de probabilidade marginais de X e Y são, respectivamente, definidas por

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Distribuições marginais

As funções densidade de probabilidade marginais de X e Y são, respectivamente, definidas por

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \ \text{ e} \\ f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx. \end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Esperanças marginais

Consequentemente temos que

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Esperanças marginais

Consequentemente temos que

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx \text{ e} \\ \mathrm{E}(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y)dy. \end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Variâncias marginais

As variâncias de X e Y são definidas por

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Variâncias marginais

As variâncias de X e Y são definidas por

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \text{E}(X^2) - [\text{E}(X)]^2 \text{ e} \\ \text{Var}(Y) &= \text{E}(Y^2) - [\text{E}(Y)]^2.\end{aligned}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Variâncias marginais

As variâncias de X e Y são definidas por

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 \text{ e} \\ \mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{E}(Y^2) - [\mathrm{E}(Y)]^2. \end{aligned}$$

em que

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Variâncias marginais

As variâncias de X e Y são definidas por

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X) &= \mathrm{E}(X^2) - [\mathrm{E}(X)]^2 \text{ e} \\ \mathrm{Var}(Y) &= \mathrm{E}(Y^2) - [\mathrm{E}(Y)]^2. \end{aligned}$$

em que

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx \;\text{ e }\; \mathrm{E}(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)dy.$$

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Distribuições condicionais

A função densidade de probabilidade condicional de X dado $Y = y_0$ é definida por

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Distribuições condicionais

A função densidade de probabilidade condicional de X dado $Y = y_0$ é definida por

$$f(x|y_0) = \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Distribuições condicionais

A função densidade de probabilidade condicional de X dado $Y = y_0$ é definida por

$$f(x|y_0) = \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

para $f_Y(y_0) > 0$.

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Distribuições condicionais

A função densidade de probabilidade condicional de X dado $Y = y_0$ é definida por

$$f(x|y_0) = \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

para $f_Y(y_0) > 0$. Similarmente, a função densidade de probabilidade condicional de Y dado $X = x_0$ é definida por

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Distribuições condicionais

A função densidade de probabilidade condicional de X dado $Y = y_0$ é definida por

$$f(x|y_0) = \frac{f(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

para $f_Y(y_0) > 0$. Similarmente, a função densidade de probabilidade condicional de Y dado $X = x_0$ é definida por

$$f(y|x_0) = \frac{f(x_0, y)}{f_X(x_0)}$$

para $f_X(x_0) > 0$.

Independência

Independência entre X e Y

As variáveis aleatórais X e Y são ditas independentes se

Independência

Independência entre X e Y

As variáveis aleatórais X e Y são ditas independentes se

$$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y),$$

para todo par (x,y).

Sumário

3.07pt

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Exemplo

Um banco resolveu apostar num serviço personalizado além do atendimento convencional. Em um dia sejam X e Y a proporção do tempo gasto com o serviço personalizado e com o serviço de caixa convencional, respectivamente.

Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Exemplo

Um banco resolveu apostar num serviço personalizado além do atendimento convencional. Em um dia sejam X e Y a proporção do tempo gasto com o serviço personalizado e com o serviço de caixa convencional, respectivamente. Vamos supor que (X, Y) têm função densidade de probabilidade conjunta dada por

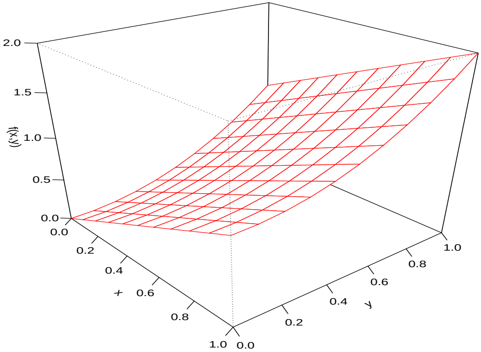
Variáveis Aleatórias Contínuas Bivariadas

Exemplo

Um banco resolveu apostar num serviço personalizado além do atendimento convencional. Em um dia sejam X e Y a proporção do tempo gasto com o serviço personalizado e com o serviço de caixa convencional, respectivamente. Vamos supor que (X, Y) têm função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{5}(x+y^2) & 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

Descrição de $f(x, y)$



Exemplo

Exemplo

O volume total sob a superfície deve valer 1.

Exemplo

Exemplo

O volume total sob a superfície deve valer 1.

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{6}{5}(x+y^2)dxdy &= \frac{6}{5}\int_0^1 (\int_0^1 (x+y^2)dx)dy \\
&= \frac{6}{5}\int_0^1 (\int_0^1 xdx + \int_0^1 y^2 dx)dy \\
&= \frac{6}{5}\int_0^1 (\frac{1}{2} + y^2)dy \\
&= \frac{6}{5}(\int_0^1 \frac{1}{2}dy + \int_0^1 y^2 dy) \\
&= \frac{6}{5}(\frac{1}{2} + \frac{y^3}{3}|_0^1) = \frac{6}{5}(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo

Qual a probabilidade de ambos os serviços não ocuparem mais do que 1/4 do tempo num determinado dia?

Exemplo

Exemplo

Qual a probabilidade de ambos os serviços não ocuparem mais do que 1/4 do tempo num determinado dia?

$$
\begin{aligned}
P(0 < X < 1/4; 0 < Y < 1/4) &= \frac{6}{5}\int_0^{1/4}\left(\int_0^{1/4}(x+y^2)dy\right)dx \\
&= \frac{6}{5}\int_0^{1/4}\left(\int_0^{1/4} xdx + \int_0^{1/4} y^2 dy\right)dx.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Exemplo

Qual a probabilidade de ambos os serviços não ocuparem mais do que 1/4 do tempo num determinado dia?

$$
\begin{aligned}
P(0 < X < 1/4; 0 < Y < 1/4) &= \frac{6}{5}\int_0^{1/4}\left(\int_0^{1/4}(x+y^2)dy\right)dx \\
&= \frac{6}{5}\int_0^{1/4}\left(\int_0^{1/4} xdx + \int_0^{1/4} y^2dy\right)dx.
\end{aligned}
$$

em que

Exemplo

Exemplo

Qual a probabilidade de ambos os serviços não ocuparem mais do que 1/4 do tempo num determinado dia?

$$\begin{aligned} P(0 < X < 1/4; 0 < Y < 1/4) &= \frac{6}{5}\int_0^{1/4}(\int_0^{1/4}(x+y^2)dy)dx \\ &= \frac{6}{5}\int_0^{1/4}(\int_0^{1/4} xdx + \int_0^{1/4} y^2dy)dx. \end{aligned}$$

em que

$$\int_0^{1/4} xdy + \int_0^{1/4} y^2dy = \frac{x}{4} + \frac{y^3}{3}\Big|_0^{1/4} = \frac{x}{4} + \frac{1}{192}.$$

Exemplo

Exemplo

Então a probabilidade de ambos os serviços não ocuparem mais do que 1/4 do tempo num determinado dia fica dada por

Exemplo

Exemplo

Então a probabilidade de ambos os serviços não ocuparem mais do que 1/4 do tempo num determinado dia fica dada por

$$\begin{aligned}
P(0 < X < 1/4; 0 < Y < 1/4) &= \frac{6}{5}\int_0^{1/4}(\frac{x}{4} + \frac{1}{192})dx \\
&= \frac{6}{5}(\int_0^{1/4}\frac{x}{4}dx + \int_0^{1/4}\frac{1}{192}dx) \\
&= \frac{6}{5}(\frac{x^2}{8}\Big|_0^{1/4} + \frac{1}{192}\frac{1}{4}) \\
&= \frac{6}{5}(\frac{1/16}{8} + \frac{1}{192}\frac{1}{4}) \\
&= \frac{7}{640}.
\end{aligned}$$

Exemplo

Distribuições marginais

As funções densidade de probabilidade marginais de X e Y são, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{6}{5}\int_0^1 (x+y^2)dy \ \text{ e} \\ f_Y(y) &= \frac{6}{5}\int_0^1 (x+y^2)dx. \end{aligned}$$

Exemplo

Distribuição marginal de X

A função densidade de probabilidade marginal de X fica dada por

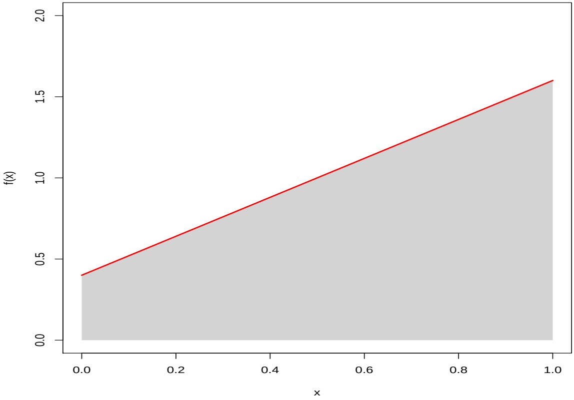
Exemplo

Distribuição marginal de X

A função densidade de probabilidade marginal de X fica dada por

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{6}{5}\int_0^1 (x+y^2)dy \\ &= \frac{6}{5}(x+\int_0^1 y^2 dy \\ &= \frac{6}{5}(x+\frac{y^3}{3}|_0^1) \\ &= \frac{6}{5}(x+\frac{1}{3}),\ 0<x<1. \end{aligned}$$

Descrição de $f_X(x)$



Exemplo

Distribuição marginal de Y

A função densidade de probabilidade marginal de Y fica dada por

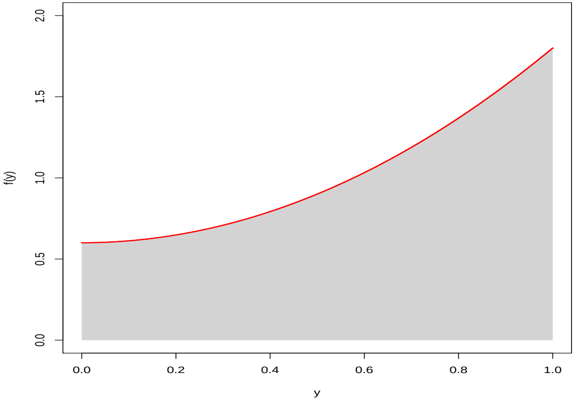
Exemplo

Distribuição marginal de Y

A função densidade de probabilidade marginal de Y fica dada por

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{6}{5}\int_0^1 (x+y^2)dx \\ &= \frac{6}{5}(\int_0^1 xdx + y^2) \\ &= \frac{6}{5}(\frac{x^2}{2}|_0^1 + y^2) \\ &= \frac{6}{5}(\frac{1}{2}+y^2),\ 0<y<1. \end{aligned}$$

Descrição de $f_Y(y)$



Exemplo

Distribuição condicional

A função densidade de probabilidade condicional de X dado $Y = 0,5$ fica dada por

Exemplo

Distribuição condicional

A função densidade de probabilidade condicional de X dado $Y = 0,5$ fica dada por

$$\begin{aligned} f(x|y = 0,5) &= \frac{f(x, y = 0,5)}{f_Y(y = 0,5)} \\ &= \frac{\frac{6}{5}(x + \frac{1}{4})}{\frac{6}{5}(\frac{1}{2} + \frac{1}{4})} \\ &= \frac{4}{3}(x + \frac{1}{4}) \end{aligned}$$

para $0 < x < 1$.

Exemplo

Esperança de X

A esperança de X fica dada por

Exemplo

Esperança de X

A esperança de X fica dada por

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X) &= \int_0^1 x f_X(x) dx \\
&= \int_0^1 \frac{6}{5} x (x + \frac{1}{3}) dx \\
&= \frac{6}{5} \int_0^1 x^2 dx + \frac{6}{5} \int_0^1 \frac{x}{3} dx \\
&= \frac{6}{5} \frac{x^3}{3} |_0^1 + \frac{6}{5} \frac{1}{3} \frac{x^2}{2} |_0^1 \\
&= \frac{6}{15} + \frac{6}{30} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Variância de X

Temos que

Exemplo

Variância de X

Temos que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^1 x^2 f_X(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{6}{5}x^2(x+\frac{1}{3})dx \\ &= \frac{6}{5}(\int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 \frac{x^2}{3}dx) \\ &= \frac{6}{20} + \frac{6}{30} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Exemplo

Variância de X

Temos que

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}(X^2) &= \int_0^1 x^2 f_X(x)dx \\
&= \int_0^1 \frac{6}{5}x^2(x+\frac{1}{3})dx \\
&= \frac{6}{5}(\int_0^1 x^3dx + \int_0^1 \frac{x^2}{3}dx) \\
&= \frac{6}{20}+\frac{6}{30}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Assim, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{2} - (\frac{3}{5})^2 = \frac{7}{50}$.

Exemplo

Variância de X

Temos que

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^1 x^2 f_X(x)dx \\ &= \int_0^1 \frac{6}{5}x^2(x+\frac{1}{3})dx \\ &= \frac{6}{5}(\int_0^1 x^3 dx + \int_0^1 \frac{x^2}{3}dx) \\ &= \frac{6}{20} + \frac{6}{30} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{Var}(X) = \frac{1}{2} - (\frac{3}{5})^2 = \frac{7}{50}$. Logo, $\mathrm{DP}(X) = \sqrt{7/50} \cong 0,374$.

Exemplo

Esperança de Y

A esperança de Y fica dada por

Exemplo

Esperança de Y

A esperança de Y fica dada por

$$
\begin{aligned}
E(Y) &= \int_0^1 y f_Y(y) dy \\
&= \int_0^1 \frac{6}{5} y (\frac{1}{2} + y^2) dy \\
&= \frac{6}{5} \int_0^1 \frac{y}{2} dy + \frac{6}{5} \int_0^1 y^3 dy \\
&= \frac{6}{10} \frac{y^2}{2} |_0^1 + \frac{6}{5} \frac{y^4}{4} |_0^1 \\
&= \frac{6}{20} + \frac{6}{20} = \frac{3}{5}.
\end{aligned}
$$

Exemplo

Variância de Y

Temos que

Exemplo

Variância de Y

Temos que

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_0^1 y^2 f_Y(y) \\ &= \int_0^1 \frac{6}{5} y^2 (\frac{1}{2} + y^2) dy \\ &= \frac{6}{5} \int_0^1 \frac{y^2}{2} dy + \frac{6}{5} \int_0^1 y^4 dy \\ &= \frac{1}{5} + \frac{6}{25} = \frac{11}{25}. \end{aligned}$$

Exemplo

Variância de Y

Temos que

$$\begin{aligned} E(Y^2) &= \int_0^1 y^2 f_Y(y) \\ &= \int_0^1 \frac{6}{5} y^2 (\frac{1}{2} + y^2) dy \\ &= \frac{6}{5} \int_0^1 \frac{y^2}{2} dy + \frac{6}{5} \int_0^1 y^4 dy \\ &= \frac{1}{5} + \frac{6}{25} = \frac{11}{25}. \end{aligned}$$

Assim, $\mathrm{Var}(Y) = \frac{11}{25} - (\frac{3}{5})^2 = \frac{1}{25}$.

Exemplo

Variância de Y

Temos que

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_0^1 y^2 f_Y(y) \\
&= \int_0^1 \frac{6}{5} y^2 (\frac{1}{2} + y^2) dy \\
&= \frac{6}{5} \int_0^1 \frac{y^2}{2} dy + \frac{6}{5} \int_0^1 y^4 dy \\
&= \frac{1}{5} + \frac{6}{25} = \frac{11}{25}.
\end{aligned}
$$

Assim, $\mathrm{Var}(Y) = \frac{11}{25} - (\frac{3}{5})^2 = \frac{1}{25}$. Logo, $\mathrm{DP}(Y) = \sqrt{1/25} = 0,20$.

Sumário

3.07pt

Coeficiente de correlação linear

Coeficiente de Correlação Linear

O coeficiente de correlação linear entre X e Y é definido por

Coeficiente de correlação linear

Coeficiente de Correlação Linear

O coeficiente de correlação linear entre X e Y é definido por

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}},$$

Coeficiente de correlação linear

Coeficiente de Correlação Linear

O coeficiente de correlação linear entre X e Y é definido por

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var(X)}}\sqrt{\text{Var}(Y)}},$$

em que $\text{Cov}(X, Y) = \text{E}(XY) - \text{E}(X)\text{E}(Y)$ e

Coeficiente de correlação linear

Coeficiente de Correlação Linear

O coeficiente de correlação linear entre X e Y é definido por

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathrm{Var(X)}}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)}},$$

em que $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$ e

$$\mathrm{E}(XY) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xyf(x, y)dxdy.$$

Exemplo

Esperança de XY

$$
\begin{aligned}
E(XY) &= \int_0^1 \int_0^1 xy\frac{6}{5}(x+y^2)dxdy \\
&= \frac{6}{5}\int_0^1 (\int_0^1 (x^2y+xy^3)dx)dy \\
&= \frac{6}{5}\int_0^1 (y\frac{x^3}{3}|_0^1 + y^3\frac{x^2}{2}|_0^1)dy \\
&= \frac{6}{5}\int_0^1 (\frac{y}{3}+\frac{y^3}{2})dy \\
&= \frac{6}{15}(\frac{y^2}{2}|_0^1) + \frac{6}{10}(\frac{y^4}{4}|_0^1) \\
&= \frac{6}{15}\frac{1}{2} + \frac{6}{10}\frac{1}{4} = \frac{7}{20}.
\end{aligned}
$$

Coeficiente de Correlação Linear

Coeficiente de correlação linear

Então, $\text{Cov}(X, Y) = 7/20 - (3/5)(3/5) = -0,01$ e o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica por

Coeficiente de Correlação Linear

Coeficiente de correlação linear

Então, $\text{Cov}(X, Y) = 7/20 - (3/5)(3/5) = -0,01$ e o coeficiente de correlação linear entre X e Y fica por

$$\rho(X, Y) = \frac{-0,01}{\sqrt{7/50}\sqrt{1/25}} = -0,134.$$

Sumário

3.07pt

Distribuição Normal Bivariada

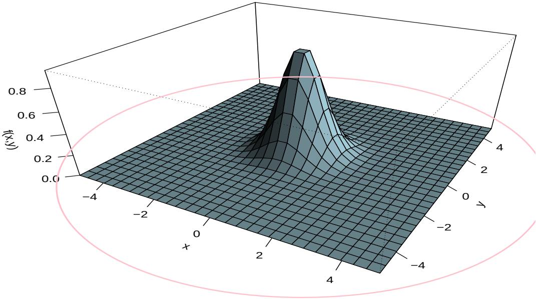
Distribuição Normal Bivariada

Se (X, Y) têm distribuição normal bivariada de médias (μ_x, μ_y), variâncias (σ_x^2, σ_y^2) e coeficiente de correlação linear ρ, então a função densidade de probabilidade conjunta é definida por

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\{(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x})^2 \\ &\quad -2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + (\frac{y-\mu_y}{\sigma_y})^2\}], \end{aligned}$$

para $-\infty < x, y < +\infty$.

Densidade Normal Bivariada



Distribuição Normal Bivariada

Marginais e Condicionais

Se (X, Y) têm distribuição normal bivariada de médias (μ_x, μ_y), variâncias (σ_x^2, σ_y^2) e coeficiente de correlação linear ρ, então

Distribuição Normal Bivariada

Marginais e Condicionais

Se (X, Y) têm distribuição normal bivariada de médias (μ_x, μ_y), variâncias (σ_x^2, σ_y^2) e coeficiente de correlação linear ρ, então

- as distribuições marginais são normais $X \sim \mathrm{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim \mathrm{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$;

Distribuição Normal Bivariada

Marginais e Condicionais

Se (X, Y) têm distribuição normal bivariada de médias (μ_x, μ_y), variâncias (σ_x^2, σ_y^2) e coeficiente de correlação linear ρ, então

- as distribuições marginais são normais $X \sim \mathrm{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ e $Y \sim \mathrm{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$;
- as distribuições condicionais $X|Y = y_0$ e $Y|X = x_0$ são normais, respectivamente, $\mathrm{N}(\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y_0 - \mu_y), \sigma_x^2(1 - \rho^2))$ e $\mathrm{N}(\mu_y + \rho\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x_0 - \mu_x), \sigma_y^2(1 - \rho^2))$.