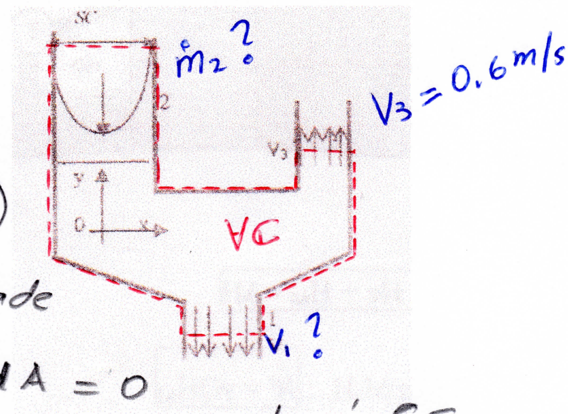
10. Exercício Proposto Para Entrega: Um fluido incompressível de massa específica *1500 kg/m³* escoa em um recipiente com uma entrada e duas saídas, conforme esquematizado na figura. O escoamento numa das saídas é uniforme, com velocidade V_3 = *0,6 m/s.* Na entrada 2 o escoamento tem um perfil de velocidade cujo campo é dado pela seguinte equação: $\vec{V} = \left[4\left(\frac{r}{D}\right)^2 - 1\right]\vec{j}$. Pedem-se:

a) Escrever a equação da continuidade na forma integral, dando o significado de cada um de seus termos. Simplifique essa equação para o problema em questão.]

b) Determinar a velocidade V_1 na seção 1.

c) Determinar a vazão em massa na seção 2.

Dados: $D_1 = 0{,}8\ m$; $D_2 = 1{,}0\ m$; $D_3 = 0{,}5\ m$.



Solução:

a) $\vec{V}_2 = \left[4\left(\frac{r}{D}\right)^2 - 1\right]\vec{j}$

ou $\vec{V}_2 = \left[1 - 4\left(\frac{r}{D}\right)^2\right](-\vec{j})$

Equação da Continuidade

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_{\forall C} \rho\, d\forall}_{} + \underbrace{\int_{SC} \rho\, \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA}_{} = 0$$

↳ vazão em massa através SC.

↳ Variação de massa no tempo dentro ∀C.

Hipóteses : Escoamento Permanente e Incompressível

Equação do Continuidade :

$$\rho\int_{SC} \vec{V}\cdot\vec{n}\, dA = 0$$

$$-\rho\int_{A_2} v_2\, dA_2 + \rho\int_{A_1} v_1\, dA_1 + \rho\int_{A_3} v_3\, dA_3 = 0$$

b) $$-\rho\int_0^R \left[1 - 4\frac{r^2}{D_2^2}\right] 2\pi r\, dr + \rho V_1 A_1 + \rho V_3 A_3 = 0$$

$$-2\pi\int_0^R \left[r - 4\frac{r^3}{D_2^2}\right] dr + V_1\frac{\pi D_1^2}{4} + V_3\frac{\pi D_3^2}{4} = 0$$

$$-\cancel{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{4r^4}{4D_2^2}\right]_0^{R_2}+V_1\frac{\cancel{\pi}D_1^2}{4}+V_3\frac{\cancel{\pi}D_3^2}{4}=0$$

$$-2\left[\frac{R_2^2}{2}-\frac{R_2^4}{(2R_2)^2}\right]+V_1\frac{D_1^2}{4}+V_3\frac{D_3^2}{4}=0$$

$$-2\left(\frac{R_2^2}{2}-\frac{R_2^2}{4}\right]+V_1\frac{D_1^2}{4}+V_3\frac{D_3^2}{4}=0$$

$$-\frac{R_2^2}{2}+V_1\frac{D_1^2}{4}+V_3\frac{D_3^2}{4}=0$$

Numericamente: $-\frac{(0,5)^2}{2}+\frac{V_1(0,8)^2}{4}+\frac{0,6(0,5)^2}{4}=0$

$$-0,125+0,16\,V_1+0,0375=0\Rightarrow\boxed{V_1=0,546\ m/s}$$

c) $\dot{m}_2=\rho Q_2$

$$\begin{cases}Q_2=\int_A v_2\,dA_2=\int_0^R\left(r-\frac{4r^3}{D_2^2}\right)dr=0,125\ m^3/s\\ \rho=1500\ kg/m^3\end{cases}$$

$$\therefore \dot{m}_2=1500\times0,125=\boxed{187,5\ kg/s}$$