MAE 0219 Introdução à Probabilidade e Estatística I

6a. Prova de Exercícios - 07 de Maio de 2020

Questão	Nota
1	
2	
3	
Total	

Nome ______________________________

Assinat. ______________________________

No.USP ______________________________

Prof. Vanderlei C. Bueno

==

Curso: Economia - FEA

==

1)(3 pontos) O custo do sinistro referente a certa apólice, denotado por X, segue distribuição normal de média $R\$600,00$ e desvio padrão $R\$80,00$. A Cia de seguros impõe, a cada sinistro, um custo fixo de $R\$50,00$ e um custo de despesas equivalente a 3% do custo do sinistro. Responde as questões abaixo:

a) Calcule a probabilidade do custo do sinistro ser superior a $R\$710,00$.

Resposta

Seja X: O custo do sinistro com $X \sim N(600, 80^2)$

$$P(X \geq 710) = P(\frac{X - 600}{80} \geq \frac{710 - 600}{80}) = P(Z \geq 1,38) =$$

$$0,5 - P(0 \leq Z \leq 1,38) = 0,5 - 0,41621 = 0,08.$$

b) Calcule a probabilidade do custo total do sinistro, denotado por Y, ser superior a $R\$710,00$.

Resposta Seja Y: Custo Total. Portanto $Y = 50 + 1,03X$ de maneira que

$E[Y] = E[50 + 1,03X] = 50 + 1,03.600 = 668$ e

$$Var(Y) = Var(50 + 1,03X) = 1,03^2 Var(X) = (1,03.80)^2 = 82,4^2.$$

Como combinação linear de normais tem distribuição Normal concluimos que $Y \sim N(668, 82,4^2)$.

Portanto

$$P(Y \geq 710) = P(\frac{Y - 668}{82,4} \geq \frac{710 - 668}{82,4}) = P(Z \geq 0,51) =$$

$$0,5 - P(0 \leq Z \leq 0,51) = 0,5 - 0,19497 = 0,3.$$

c) Se a Cia de Seguros deseja fixar uma franquia tal que 10%, dos sinistros sejam dedutíveis, isto é, o segurado não utilizar o seguro, qual este valor?

Resposta

Procuramos o número c, tal que $P(X \leq c) = 0,1$.

Temos as seguintes equivalências

$$P(X \leq c) = 0,1 \leftrightarrow P(\frac{X-600}{80} \leq \frac{c-600}{80}) \leftrightarrow$$

$$P(Z > \frac{600-c}{80}) = 0,1 \leftrightarrow P(0 \leq Z \leq \frac{600-c}{80}) = 0,4$$

$$\leftrightarrow \frac{600-c}{80} = 1,28 \leftrightarrow c = 497,6.$$

2)(3 pontos) O tempo de atendimento na lanchonete é uma variável aleatória com distribuição exponencial de média 10 minutos. Maria tem 15 minutos de intervalo e gasta 7 minutos para lanchar adequadamente. Supondo que ao sair da aula Maria é atendida prontamente na Lanchonete, responda:

a) Terminando de assistir uma aula, qual a probabilidade de que Maria lanche adequadamente sem perder o início da próxima aula?

Resposta Seja T : Tempo de atendimento; $T \sim exp(0,1)$.

$$P(T+7 \leq 15) = P(T \leq 15-7) = P(T \leq 8) = \int_0^8 0,1e^{-0,1t}dt = 1 - e^{-0,8} = 1 - 0,45 = 0,55.$$

b) Em uma semana de 5 dias letivo,escolhida casualmente, qual a probabilidade de perder ao menos dois inícios de aula consecutivas?

Resposta

Seja N: número de perdas de aulas consecutivas; $N \sim B(5, 0,45)$.

$$P(N \geq 2) = 1 - P(N \leq 1) = 1 - [P(N=0) + P(N=1)] =$$

$$1 - [\binom{5}{0} 0,45^0.0,55^5 + \binom{5}{1} 0,45^1.0,55^4] = 1 - [0,05 + 0,21] = 0,74.$$

c) Em 100 dias letivos do semestre, escolhidos casualmente, qual a probabilidade, aproximada, de lanchar adequadamente (sem perder o início da aula consecutiva), mais do que 35 vezes?

Resposta

Seja M: número de vezes que lancha adequadamente; $M \sim B(100, 0,55)$.

$E[M] = 55$, $Var(M) = 24,75$ e $dP(M) = 5$. Aproximamos M por $Y \sim N(55, 5^2)$ e

$$P(M > 35) = P(Y > 35,5) = P(\frac{Y-55}{5} > \frac{35,5-55}{5}) =$$

$$P(Z > -3,9) = P(Z \leq 3,9) = 0,5 + P(0 \leq Z \leq 3,9) = 0,5 + 0,49995 = 0,99995.$$

3) (4 pontos) Seja T uma variável aleatória assumindo valores no conjunto de números reais positivos, com $P(T > t) = 1 - P(T \leq t)$ tal que

$$P(T > s + t) = P(T > t).P(T > s).$$

Prove que T tem distribuição exponencial.

Prova Se denotamos $g(t) = P(T > t)$ temos que $0 \leq g(t) \leq 1$ e que $g(t + s) = g(t)g(s)$.

Para todo número natural n, temos

$$g(n) = g(1 + 1 + ... + 1) = g(1).g(1)....g(1) = g(1)^n.$$

Portanto $g(1) \neq 1$ pois, caso contrário, teríamos $0 = \lim_{n\uparrow\infty} g(n) = \lim_{n\uparrow\infty} g(1)^n = 1$, que é uma contradição.

Em adição

$$g(1) = g(\frac{n}{n}) = g(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + ... + \frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})^n,$$

o que implica $g(\frac{1}{n}) = g(1)^{\frac{1}{n}}$.

Portanto $g(1) \neq 0$ pois, caso contrário, teríamos $1 = \lim_{n\uparrow\infty} g(\frac{1}{n}) = \lim_{n\uparrow\infty} g(1)^{\frac{1}{n}} = 0$, que tambem é uma contradição.

Concluimos então que $0 < g(1) < 1$ e que existe um número real positivo λ, a imagem inversa de $g(1)$ através da função exponencial $f(x) = \exp[-x]$ tal que $g(1) = \exp[-\lambda]$

Pelo mesmo argumento, se n e m são números naturais

$$g(\frac{n}{m}) = g(\frac{1}{m} + \frac{1}{m} + ... + \frac{1}{m}) = g(\frac{1}{m})^n = g(1)^{\frac{n}{m}},$$

e concluimos que $g(x) = \exp[-\lambda x], \forall x \in \mathbf{Q}$, onde $\mathbf{Q}$ é o conjunto dos números racionais. Como $\mathbf{Q}$ é denso em $\Re$, temos

$$g(t) = P(T > t) = \exp[-\lambda t], \forall t \in \Re^+.$$

Consequentemente, a função de distribuição de T é

$$F(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t < 0 \\ 1 - \exp[-\lambda t] & : \quad t \geq 0 \end{cases}.$$

que caracteriza completamente a distribuição exponencial. $\lambda > 0$ é o parâmetro da distribuição.