Programa de Pós-Graduação em Economia - FEARP/USP

I Exame de Macroeconomia II

Professores: Jefferson Bertolai & Fábio Gomes - 07 de outubro de 2015

Considere o problema do planejador no modelo de Crescimento Ótimo com um setor apresentado em sala. Conforme discutido durante o curso, tal problema pode ser escrito como

$$v^*(k_0) \equiv \sup_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U[f(k_t) - k_{t+1}] \right\} \qquad s.t.\ 0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t)\ e\ k_0\ dado \tag{1}$$

Tal formato foi denomidado **problema sequencial** do planejador (SP). Associou-se ao problema sequencial (1) a equação funcional

$$v(k) = \sup_{0 \leq y \leq f(k)} \left\{ U[f(k) - y] + \beta v(y) \right\}, \tag{2}$$

a qual define o que denominamos como **problema recursivo** do planejador (FE). Sob as hipóteses $U(c) = \ln(c)$ e $f(k) = k^{\alpha}$, para $\alpha \in (0, 1)$, a solução do problema (SP) é dada por

$$k_{t+1} = \alpha\beta k_t^{\alpha}, \qquad t = 0, 1, 2, \cdots \tag{3}$$

Problem 1 (3.0 pontos) *O resultado a seguir (discutido em aula) faz parte do Princípio da Otimalidade.*

T.4.2 *Seja $\mathbb{X}$, Γ, U e β tais que sejam válidas as hipóteses **(H.4.1)**[1] e **(H.4.2)**[2]. Então a função v^* satisfaz (FE).*

(a) Calcule $v^*(k_0)$ usando a política ótima (3) na função objetivo de (1).

(b) Mostre que a função $v^*(\cdot)$ obtida no item (a) safisfaz a equação funcional (2), conforme garantido pelo Teorema T.4.2.

---

[1] $\Gamma(x)$ é não vazio para cada $x \in \mathbb{X}$.

[2] $\forall x_0 \in \mathbb{X}$ e todo $\underline{x} \in \Pi(x_0)$, existe o limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{t=0}^{n} \beta^t U(x_t, x_{t+1})$.

Problem 2 (3.0 pontos) *Seja o operador T em $\mathbb{C}(\mathbb{X})$, espaço das funções limitadas e contínuas em $\mathbb{X}$, tal que*

$$(Th)(x) = \max_{y \in \Gamma(k)} U(k,y) + \beta h(y). \tag{4}$$

para todo $h \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$. Tal operador foi denominado Operador de Bellman. O resultado a seguir (discutido em aula) mostra que a solução da equação funcional (2) é única e pode ser calculada como o ponto fixo do Operador de Bellman, ou seja, $v = Tv$.

T.4.6 *Seja $\mathbb{X}$, Γ, U e β tais que **(H.4.3)**[3] é **(H.4.4)**[4] sejam válidas. Seja $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ o espaço das funções contínuas e limitadas $h : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$, com a norma do sup. Então,*

(i) o operador T mapeia $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ em si: $T : \mathbb{C}(\mathbb{X}) \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{X})$.

(ii) T possui um, e somente um, ponto fixo v e $v \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$

(iii) $\forall v_0 \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$

$$||T^n v_0 - v|| \leq \beta^n ||v_0 - v||, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

(iv) dado v, a correspondência política ótima $G : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ definida em (2) é compact-valued e uhc.

(a) Mostre que o máximo em (4) é atingido, ou seja, $\forall x \in \mathbb{X}$ e todo $h \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$, $\exists y^* \in \Gamma(x)$ tal que $(Tf)(x) = U(x, y^*) + \beta h(y^*)$.

(b) Mostre que para toda $h \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$ tem-se $Th \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$ e, portanto, $T : \mathbb{C}(\mathbb{X}) \mapsto \mathbb{C}(\mathbb{X})$.

(c) Verifique que o operador T em (4) satisfaz as Condições Suficientes de Blackwell (monotonicidade e desconto) e, portanto, é uma contração.

(d) Usando o fato de que $\mathbb{C}(\mathbb{X})$ é um espaço de Banach (espaço normado completo), mostre que o ponto fixo de T é uma função limitada e contínua, ou seja, $v = Tv \in \mathbb{C}(\mathbb{X})$.

Problem 3 (4.0 pontos) *Utilizando o Método de Discretização, escreva um programa em linguaguem Matlab (pronto para rodar) que calcule a solução da equação funcional (2) no caso $U(c) = \ln(c)$ e $f(k) = \sqrt{k}$.*

- *O programa tem que calcular o ponto fixo do Operador de Bellman, definido em (4), utilizando o método de iteração da função valor.*
- *Não é permitido usar a solução (3). Utilize maximização no grid para calcular a função política ótima.*

---

[3] $\mathbb{X}$ é um conjunto convexo do $\mathbb{R}^l$ e a correspondência $\Gamma : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ é não vazia, *compact-valued* e contínua.

[4] A função $U : A \mapsto \mathbb{R}$ é limitada e contínua e $\beta \in (0, 1)$.