

Programa de Pós-Graduação em Economia - FEARP/USP

I Exame de Macroeconomia II

Professor: Jefferson Bertolai - 21 de setembro de 2017

Monitor: Matheus Melo

Problem 1 (1.0 ponto). Considere a economia dinâmica simples discutida no capítulo 2 de Krueger (2017). O tempo é discreto ($t = 0, 1, 2, \dots$), há 2 indivíduos na economia e não há firmas. Existe um bem de consumo perecível e as preferências idênticas, representáveis pela função utilidade

$$u(c^i) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t^i), \quad \beta \in (0, 1) \quad (1)$$

A dotação do indivíduo $i \in \{1, 2\}$ é $\{e_t^i\}_{t=0}^{\infty}$ e não há incerteza na economia.

- (a) Apresente a definição de Equilíbrio Competitivo (de Arrow-Debreu) para esta economia.
(b) Apresente a definição de Equilíbrio com Mercados Sequenciais para esta economia.

Problem 2 (5.0 pontos). Considere o problema sequencial a seguir,

$$\sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \quad s.t. \begin{cases} x_{t+1} \in \Gamma(x_t), & t = 0, 1, \dots \\ x_0 \text{ dado} \end{cases} \quad (SP)$$

Associou-se ao problema sequencial (SP) a equação funcional

$$v(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} (F(x, y) + \beta v(y)), \quad \forall x \in \mathbb{X} \quad (FE)$$

- (a) **(2 pontos)** Enuncie o *Princípio da Otimalidade*, o qual qualifica em que sentido os problemas (SP) e (FE) são equivalentes.
- Ou seja, enuncie os Teoremas 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 de Stokey & Lucas (1989).
 - Não se esqueça de enunciar as hipóteses de cada um dos teoremas.
- (b) **(3 pontos)** Seja o operador T em $\mathbb{C}(\mathbb{X})$, espaço das funções limitadas e contínuas em \mathbb{X} , tal que

$$(Th)(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} F(x, y) + \beta h(y), \quad \forall x \in \mathbb{X} \text{ e para todo } h \in \mathbb{C}(\mathbb{X}). \quad (2)$$

Tal operador foi denominado Operador de Bellman. O resultado a seguir (discutido em aula) mostra que a única solução da equação funcional (FE) é estritamente crescente.

Teorema (4.7). *Seja \mathbb{X} , Γ , F e β tais que H.4.3,¹ H.4.4,² H.4.5³ e H.4.6⁴ sejam válidas. Seja v*

¹ \mathbb{X} é um conjunto convexo do \mathbb{R}^l e a correspondência $\Gamma : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ é não vazia, *compact-valued* e contínua.

²A função $F : A \mapsto \mathbb{R}$ é limitada e contínua e $\beta \in (0, 1)$.

³Para cada y , $F(\cdot, y)$ é estritamente crescente em cada um dos seus l primeiros argumentos.

⁴ Γ é monótona, no sentido de que

$$x \leq x' \Rightarrow \Gamma(x) \subseteq \Gamma(x').$$

a única solução de (FE). Então v é estritamente crescente.

Demonstre o Teorema 4.7

Problem 3 (4.0 pontos). Considere o problema do planejador no modelo de Crescimento Ótimo com um setor apresentado em sala. Conforme discutido durante o curso, tal problema pode ser escrito como

$$v^*(k_0) \equiv \sup_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U[f(k_t) - k_{t+1}] \right\} \quad \text{s.t. } 0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t) \text{ e } k_0 \text{ dado} \quad (3)$$

em que $f(k_t) = F(k_t, 1) + (1 - \delta)k_t$ denota a oferta total de bens no período t . Tal formato foi denominado **problema sequencial** do planejador (SP). Associou-se ao problema sequencial (3) a equação funcional

$$v(k) = \sup_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta v(y)\}, \quad \forall k \in \mathbb{R} \quad (4)$$

a qual define o que denominamos como **problema recursivo** do planejador (FE). A solução do problema (FE) é uma função v tal que $v = Tv$, em que o operador T é tal que

$$(Th)(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} U[f(x) - y] + \beta h(y), \quad \forall x \in \mathbb{X}. \quad (5)$$

em que $\Gamma(x) = [0, f(x)]$.

Suponha $U(c) = \ln(c)$, $f(k) = \sqrt{k}$ e $\beta = 0.9$. Para responder aos itens a seguir, considere a aproximação discreta X (discretização) para o espaço de estados \mathbb{X} tal que $X = \{.04, .08, .12, .16, .20\} \subset \mathbb{X}$. Todos os programas precisam estar em linguagem Python e prontos para rodar.

(a) **(2 pontos)** Utilizando o Método de Discretização e o Método de Iteração da **Função Valor**, escreva um programa que calcule uma aproximação $\hat{v} : X \mapsto \mathbb{R}$ para a solução da equação funcional (4) e a função política associada $\hat{g} : X \mapsto X$.

- calcule \hat{v} como o ponto fixo do Operador de Bellman \hat{T} a seguir

$$(\hat{T}h)(x) = \max_{y \in \Gamma(x) \cap X} U[f(x) - y] + \beta h(y), \quad \forall x \in X. \quad (6)$$

- a função \hat{g} é tal que $\forall x \in X$

$$\hat{g}(x) = \arg \max_{y \in \Gamma(x) \cap X} U[f(x) - y] + \beta \hat{v}(y) = \{y \in \Gamma(x) \cap X : \hat{v}(x) = U(x, y) + \beta \hat{v}(y)\}.$$

(b) **(1 ponto)** Suponha que o programa do item (a) foi escrito como uma função chamada `Bellman_Operator()`.

Ela aceita como insumo (*input*) o valor para o parâmetro β e retorna como resultado (*output*) os vetores \hat{v} e \hat{g} . Usando a função `Bellman_Operator()` obtida no item (a) e $\beta = 0.9$, escreva um programa que calcule a sequência $\{\hat{k}_t\}_{t=0}^{20}$ tal que $\hat{k}_0 = 0.2$ e $\hat{k}_{t+1} = \hat{g}(\hat{k}_t)$ para $t = 0, 1, 2, \dots, 19$.

(c) **(1 ponto)** Suponha que o programa do item (b) foi escrito como uma função, chamada `Seq_Capital()`.

Esta função aceita como insumo (*input*) valores para β , \hat{k}_0 e T e retorna como resultado (*output*) o vetor $\hat{k} = [\hat{k}_0, \hat{k}_1, \dots, \hat{k}_T]$. Usando a função `Seq_Capital()` obtida no item (b), $\beta = 0.9$, $\hat{k}_0 = 0.2$, escreva um programa que calcule o capital estacionário definido por \hat{g} , ou seja, que calcule \bar{k} tal que $\bar{k} = \hat{g}(\bar{k})$.

Problem 4 (Bônus - 2.0 pontos). Considere a seguinte versão do modelo de apreçamento de ativos proposto por Lucas (1978). Existe somente uma unidade produtiva (árvore de Lucas), cujo produto (dividendo) y segue um processo de Markov e assume valores em $\mathbb{Y} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$, $m < \infty$. Neste caso um equilíbrio é uma função $p(y) : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{Y}$ e uma função limitada $v(z; y) : \mathbb{R} \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+$ tais que

(i) v satisfaz

$$v(z, y) = \max_{c, x} \left\{ U(c) + \beta \sum_{y' \in \mathbb{Y}} \Pr(y'|y) v(x, y') \right\} \quad \text{s.a.} \begin{cases} c + p(y)x \leq yz + p(y)z \\ c \geq 0 \text{ e } 0 \leq x \leq \bar{z} \end{cases}$$

em que U é côncava e limitada, $U(0) = 0$ e $\bar{z} > 1$.

(ii) para cada $y \in \mathbb{Y}$, $v(1; y)$ é atingido por $(c, x) = (y, 1)$.

Sabe-se que, dada uma função $p(\cdot)$, existe somente uma função limitada $v(z; y)$ que satisfaz **(i)**. Além disso, se $v(z, y)$ é atingida em (c_0, x_0) tal que $c_0 > 0$, então v é diferenciável com relação a z no ponto em (z, y) .

- (a) **(0.5 ponto)** Qual é a derivada de $v(z, y)$ em relação a z ?
- (b) **(0.5 ponto)** Utilizando o resultado do item anterior, obtenha uma equação funcional em que o objeto desconhecido é a função $f(y) = U'(y)p(y)$.
- (c) **(0.5 ponto)** Apresente o operador T cujo ponto fixo (se existir) satisfaz a equação funcional obtida no item anterior.
- (d) **(0.5 ponto)** Utilizando as condições de Blackwell, mostre que T é uma contração.