Programa de Pós-Graduação em Economia - FEARP/USP

I Exame de Macroeconomia II

Professor: Jefferson Bertolai - 26 de setembro de 2018
Monitor: Thiago Lobo

Problem 1 (1.0 ponto). Considere a economia dinâmica simples discutida no capítulo 2 de Krueger (2017). O tempo é discreto ($t = 0, 1, 2, \cdots$), há 2 indivíduos na economia e não há firmas. Existe um bem de consumo perecível e as preferências idênticas, representáveis pela função utilidade

$$u(c^i) = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln(c_t^i), \qquad \beta \in (0,1) \tag{1}$$

A dotação do indivíduo $i \in \{1,2\}$ é $\{e_t^i\}_{t=0}^{\infty}$ e não há incerteza na economia.

(a) Apresente a definição de Equilíbrio Competitivo (de Arrow-Debreu) para esta economia.

(b) Apresente a definição de Equilíbrio com Mercados Sequenciais para esta economia.

Problem 2 (5.0 pontos). Considere o problema sequencial a seguir,

$$\sup_{\{x_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t F(x_t, x_{t+1}) \qquad s.t. \begin{cases} x_{t+1} \in \Gamma(x_t), & t = 0, 1, \dots \\ x_0 \textit{ dado} \end{cases} \tag{SP}$$

Associou-se ao problema sequencial (SP) a equação funcional

$$v(x) = \sup_{y \in \Gamma(x)} \left(F(x,y) + \beta v(y) \right), \quad \forall x \in \mathbb{X} \tag{FE}$$

(a) **(2 pontos)** Enuncie o *Princípio da Otimalidade*, o qual qualifica em que sentido os problemas (SP) e (FE) são equivalentes.

- Ou seja, enuncie os Teoremas 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5 de Stokey & Lucas (1989).
- Não se esqueça de enunciar as hipóteses de cada um dos teoremas.

(b) **(3 pontos)** Seja o operador T em $\mathbb{C}(\mathbb{X})$, espaço das funções limitadas e contínuas em $\mathbb{X}$, tal que

$$(Th)(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} F(x,y) + \beta h(y), \qquad \forall x \in \mathbb{X} \text{ e para todo } h \in \mathbb{C}(\mathbb{X}). \tag{2}$$

Tal operador foi denominado Operador de Bellman. O resultado a seguir (discutido em aula) mostra que a única solução da equação funcional (FE) é estritamente côncava.

Teorema (4.8). *Seja $\mathbb{X}$, Γ, F e β tais que H.4.3,*[1] *H.4.4,*[2] *H.4.7*[3] *e H.4.8*[4] *sejam válidas. Seja v*

[1] $\mathbb{X}$ é um conjunto convexo do $\mathbb{R}^l$ e a correspondência $\Gamma : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ é não vazia, *compact-valued* e contínua.

[2] A função $F : A \mapsto \mathbb{R}$ é limitada e contínua e $\beta \in (0,1)$.

[3] F é estritamente côncava, ou seja, para todo par $(x,y),(x',y') \in A$ e todo $\theta \in (0,1)$ tem-se $F[\theta(x,y) + (1-\theta)(x',y')] \geq \theta F(x,y) + (1-\theta)F(x',y')$, com desigualdade estrita se $x \neq x'$.

[4] Γ é convexa, no sentido de que, $\forall \theta \in [0,1]$ e todo para $x, x' \in \mathbb{X}$, tem-se $y \in \Gamma(x)$ *e* $y' \in \Gamma(x') \Rightarrow (\theta y + (1-\theta)y') \in \Gamma[\theta x + (1-\theta)x']$.

que satisfaz (FE). Então, v é estritamente côncava.

Demonstre o Teorema 4.8

Problem 3 (4.0 pontos). Considere o problema do planejador no modelo de Crescimento Ótimo com um setor apresentado em sala. Conforme discutido durante o curso, tal problema pode ser escrito como

$$v^*(k_0) \equiv \sup_{\{k_{t+1}\}_{t=0}^{\infty}} \left\{ \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t U[f(k_t) - k_{t+1}] \right\} \qquad s.t.\ 0 \leq k_{t+1} \leq f(k_t)\ e\ k_0\ dado \tag{3}$$

em que $f(k_t) = F(k_t, 1) + (1 - \delta)k_t$ denota a oferta total de bens no período t. Tal formato foi denomidado **problema sequencial** do planejador (SP). Associou-se ao problema sequencial (3) a equação funcional

$$v(k) = \sup_{0 \leq y \leq f(k)} \{U[f(k) - y] + \beta v(y)\}, \qquad \forall k \in \mathbb{R} \tag{4}$$

a qual define o que denominamos como **problema recursivo** do planejador (FE). A solução do problema (FE) é uma função v tal que $v = Tv$, em que o operador T é tal que

$$(Th)(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} U[f(x) - y] + \beta h(y), \qquad \forall x \in \mathbb{X}. \tag{5}$$

em que $\Gamma(x) = [0, f(x)]$.

Suponha $U(c) = \ln(c)$, $f(k) = \sqrt{k}$ e $\beta = 0.9$. Para responder aos itens a seguir, considere a aproximação discreta X (discretização) para o espaço de estados $\mathbb{X}$ tal que $X = \{.04, .08, .12, .16, .20\} \subset \mathbb{X}$. Todos os programas precisam estar em linguaguem Python e prontos para rodar.

(a) **(2 pontos)** Utilizando o Método de Discretização e o Método de Iteração da **Função Valor**, escreva um programa que calcule uma aproximação $\hat{v} : X \mapsto \mathbb{R}$ para a solução da equação funcional (4) e a função política associada $\hat{g} : X \mapsto X$.

- calcule $\hat{v}$ como o ponto fixo do Operador de Bellman $\hat{T}$ a seguir

$$(\hat{T}h)(x) = \max_{y \in \Gamma(x) \cap X} U[f(x) - y] + \beta h(y), \qquad \forall x \in X. \tag{6}$$

- a função $\hat{g}$ é tal que $\forall x \in X$

$$\hat{g}(x) = \arg \max_{y \in \Gamma(x) \cap X} U[f(x) - y] + \beta \hat{v}(y) = \{y \in \Gamma(x) \cap X : \hat{v}(x) = U(x, y) + \beta \hat{v}(y)\}.$$

(b) **(1 ponto)** Suponha que o programa do item (a) foi escrito como uma função chamada `Bellman_Operator()`. Ela aceita como insumo (*input*) o valor para o parâmetro β e retorna como resultado (*output*) os vetores $\hat{v}$ e $\hat{g}$. Usando a função `Bellman_Operator()` obtida no item (a) e $\beta = 0.9$, escreva um programa que calcule a sequência $\{\hat{k}_t\}_{t=0}^{20}$ tal que $\hat{k}_0 = 0.2$ e $\hat{k}_{t+1} = \hat{g}(\hat{k}_t)$ para $t = 0, 1, 2, \cdots, 19$.

(c) **(1 ponto)** Suponha que o programa do item (b) foi escrito como uma função, chamada `Seq_Capital()`. Esta função aceita como insumo (*input*) valores para β, $\hat{k}_0$ e T e retorna como resultado (*output*) o vetor $\hat{k} = [\hat{k}_0, \hat{k}_1, \cdots, \hat{k}_T]$. Usando a função `Seq_Capital()` obtida no item (b), $\beta = 0.9$, $\hat{k}_0 = 0.2$, escreva um programa que calcule o capital estacionário definido por $\hat{g}$, ou seja, que calcule $\bar{k}$ tal que $\bar{k} = \hat{g}(\bar{k})$.

Problem 4 (**Bônus - 2.0 pontos**). Considere a seguinte versão do modelo de apreçamento de ativos proposto por Lucas (1978). Existe somente uma unidade produtiva (árvore de Lucas), cujo produto (dividendo) y segue um processo de Markov e assume valores em $\mathbb{Y} = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$, $m < \infty$. Neste caso um equilíbrio uma função $p(y) : \mathbb{Y} \to \mathbb{Y}$ e uma função limitada $v(z; y) : \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}_+$ tais que

(i) v satisfaz

$$v(z, y) \quad = \quad \max_{c,x} \left\{ U(c) + \beta \sum_{y' \in \mathbb{Y}} \Pr(y'|y) v(x, y') \right\} \qquad \text{s.a.} \left\{ \begin{array}{l} c + p(y)x \leq yz + p(y)z \\ c \geq 0 \text{ e } 0 \leq x \leq \bar{z} \end{array} \right.$$

em que U é côncava e limitada, $U(0) = 0$ e $\bar{z} > 1$.

(ii) para cada $y \in \mathbb{Y}$, $v(1; y)$ é atingido por $(c, x) = (y, 1)$.

Sabe-se que, dada uma função $p(\cdot)$, existe somente uma função limitada $v(z; y)$ que satisfaz **(i)**. Alm disso, se $v(z, y)$ é atingida em (c_0, x_0) tal que $c_0 > 0$, ento v é diferenciável com relação a z no ponto em (z, y).

(a) **(0.5 ponto)** Qual é a derivada de $v(z, y)$ em relação a z?

(b) **(0.5 ponto)** Utilizando o resultado do item anterior, obtenha uma equação funcional em que o objeto desconhecido é a função $f(y) = U'(y)p(y)$.

(c) **(0.5 ponto)** Apresente o operador T cujo ponto fixo (se existir) satisfaz a equação funcional obtida no item anterior.

(d) **(0.5 ponto)** Utilizando as condições de Blackwell, mostre que T é uma contração.