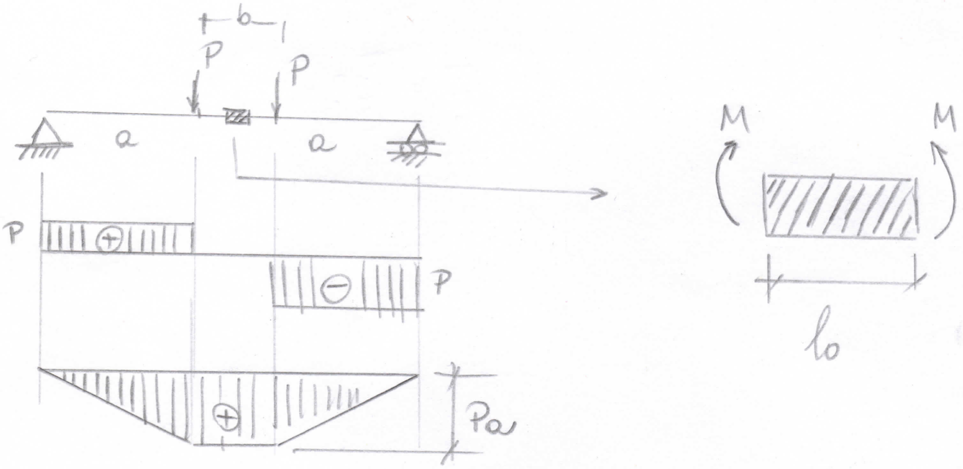
Tensões na flexão

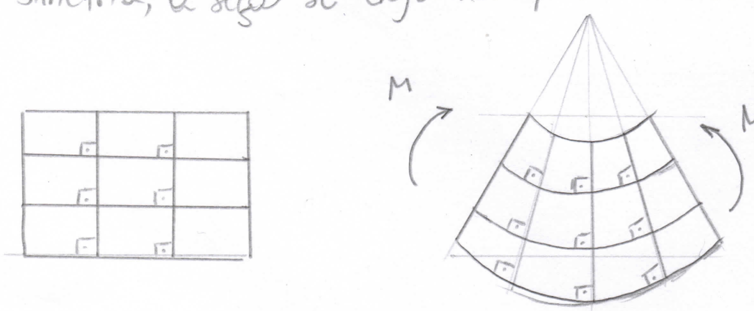
- flexão pura $\begin{cases} N=0 \\ V=0 \\ M=cte \end{cases}$

- flexão simples $\begin{cases} N=0 \\ V\neq 0 \\ M\neq cte \end{cases}$

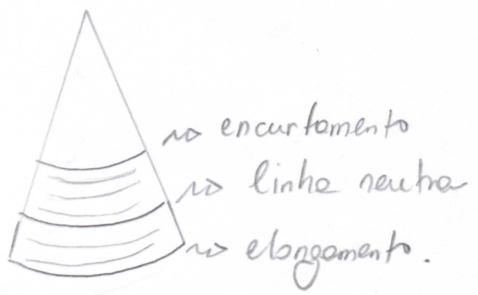
① Flexão Pura.

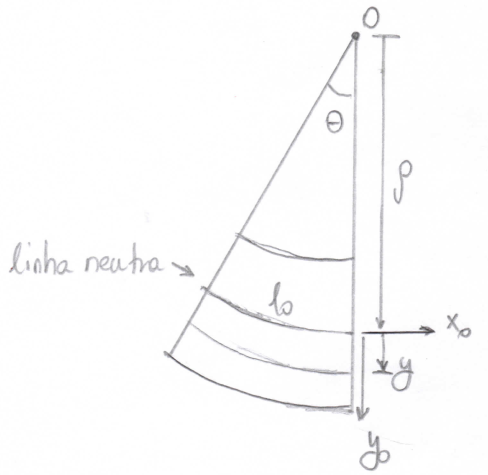


Por simetria, a seção se deforma para um arco de coroa circular.



Também por simetria, seções transversais planas e ortogonais ao eixo não deformado permanecem planas e ortogonais ao eixo deformado (um arco de circunferência)





$$l_0 = \rho . \theta$$

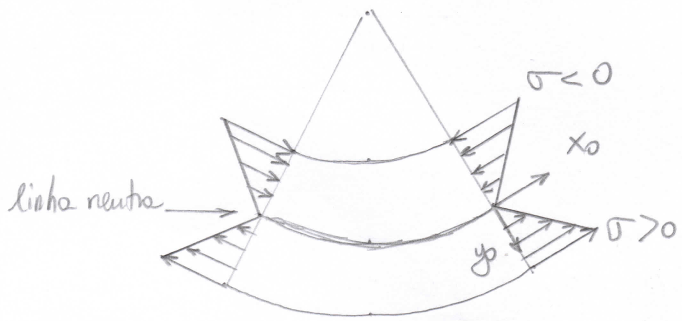
$$l(y) = (\rho + y) . \theta$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l(y) - l_0}{l_0} = \frac{(\rho + y)\theta - \rho\theta}{\rho\theta}$$

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} = Ky$$

$$\begin{cases} \rho : \text{raio de curvatura} \\ K = 1/\rho : \text{curvatura} \end{cases}$$

Lei de Hooke: $\sigma = E . \varepsilon = E . Ky$ (I)



Equilíbrio:

$$\begin{cases} \int \sigma(y) . y . dA = dM & (\mathrm{II}) \\ \int \sigma(y) . dA = dN = 0 & (\mathrm{III}) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (III):

$$N = \int \sigma(y) dA \Rightarrow N = 0 = \int E . K . y . dA = E . K . \int y dA = E . K . M_{Sz_0} = 0 \quad \therefore \boxed{M_{Sz_0} = 0}$$

A linha neutra é baricêntrica na flexão pura.

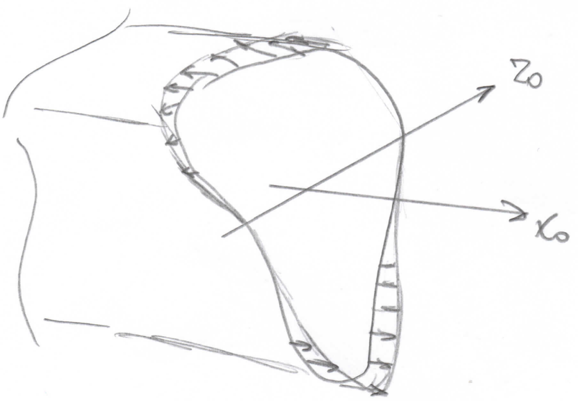
Agora, substituindo (I) em (II):

$$M = \int \sigma(y) \cdot y \, dA = \int E K y \cdot y \cdot dA = E K \underbrace{\int y^2 dA}_{I_{z0}} \Rightarrow M = E K I_{z0}$$

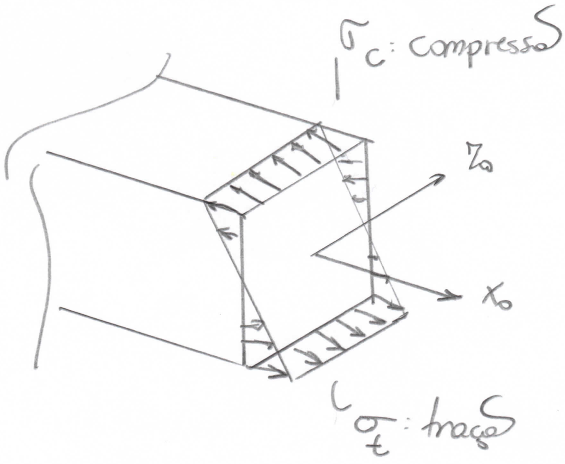
Logo $K = \dfrac{M}{E I_{z0}}$ ou $\boxed{EK = \dfrac{M}{I_{z0}}}$ (IV)

Substituindo (IV) em (I):

$$\boxed{\sigma = \frac{M}{I_{z0}} \cdot y}$$ fórmula das tensões normais na flexão.

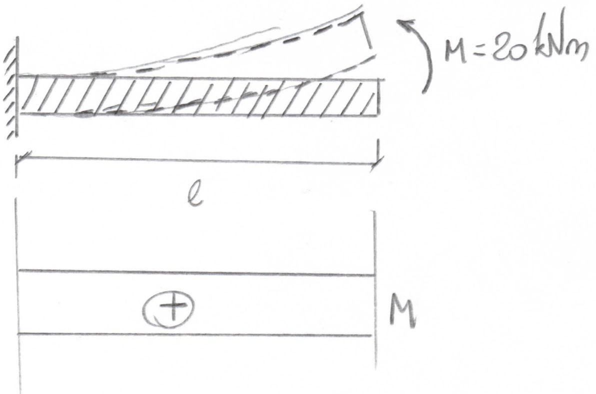


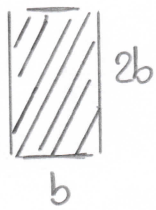
seção qualquer



seção retangular

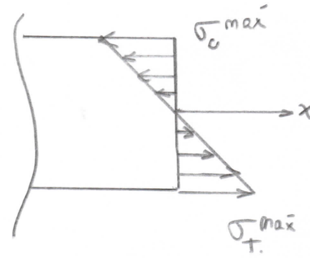
Exemplo: Determine b_{min} para $\bar{\sigma} = 60\,MPa$.





$\bar{\sigma} = 60\,MPa$

Olhando de perfil



$$\sigma(y) = \frac{M}{I_{z_0}} \cdot y$$

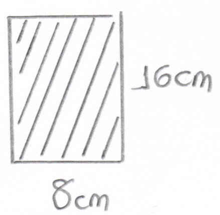
$$I_{z_0} = \frac{bh^3}{12} = \frac{b(2b)^3}{12} = \frac{8b^4}{12} = \frac{2b^4}{3}$$

$$\sigma_T^{máx} = |\sigma_c^{máx}| = \frac{M}{I_{z_0}} \cdot b \leq \bar{\sigma}$$

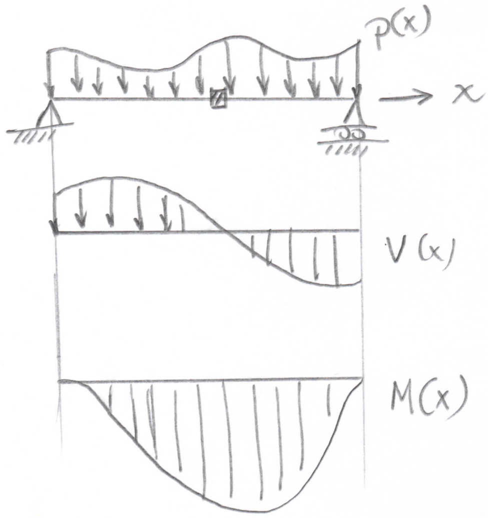
$$\frac{M}{\frac{2}{3}b^4} \cdot b \leq \bar{\sigma} \qquad \frac{3M}{2b^3} \leq \bar{\sigma} \qquad \frac{2b^3}{3M} \geq \frac{1}{\bar{\sigma}} \qquad b \geq \sqrt[3]{\frac{3M}{2\bar{\sigma}}}$$

$$b_{min} \geq \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 30 \cdot 10^3}{2 \cdot 60 \cdot 10^6}} \Rightarrow b_{min} \geq 0{,}079\,m \qquad \text{Logo } b_{min} = 7{,}9\,cm$$

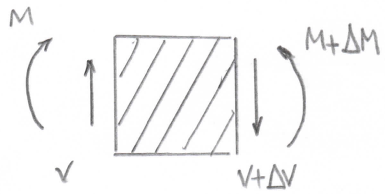
Ou arredondado, a seção fica:



② Flexão Simples



Nesse caso:



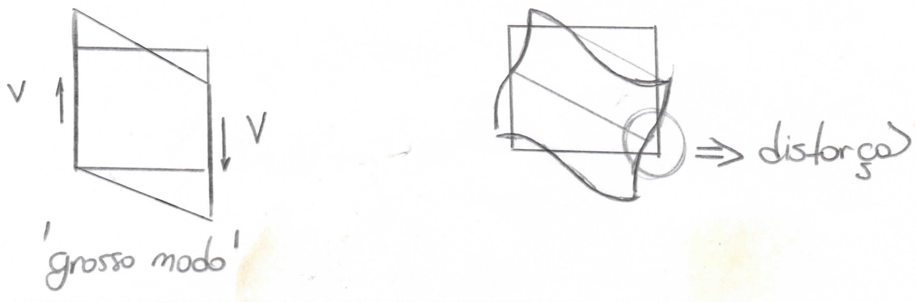
Isso implica em:

- tensões de cisalhamento devido à V
- tensões normais devido à M

Olhando que τ atua na seção transversal:

$$V = \int \tau \, dA$$

Efeito:



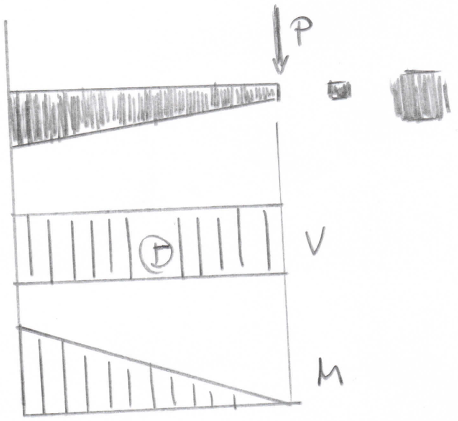
Hipótese de Navier

⇒ seções planas permanecem planas após a deformação.

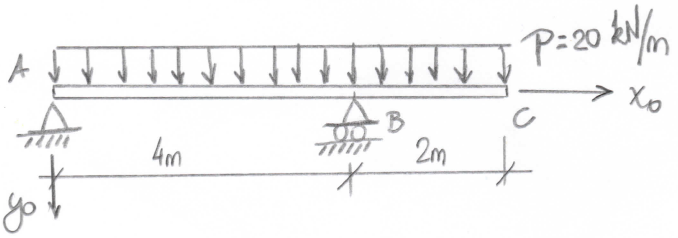
(aproximação válida para vigas com comprimentos muito maiores que a seção transversal):

$$\sigma(x,y) = \frac{M(x)}{I_{zo}(x)} \cdot y$$

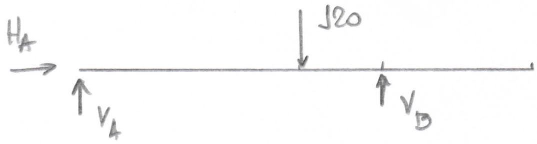
Exemplo:



Exercício



encontrando os diagramas:

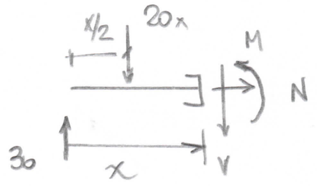


$\boxed{H_A = 0}$

$V_A + V_B = 120$

$-120 \cdot 3 + V_B 4 = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = 90\ kN}, \boxed{V_A = 30\ kN}$

Trecho AB

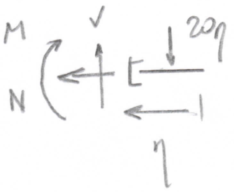


$$\boxed{N=0}$$

$$V - 30 + 20x = 0 \Rightarrow \boxed{V(x) = 30 - 20x}$$

$$M + 20x \cdot x/2 - 30x = 0 \Rightarrow \boxed{M(x) = 30x - 10x^2}$$

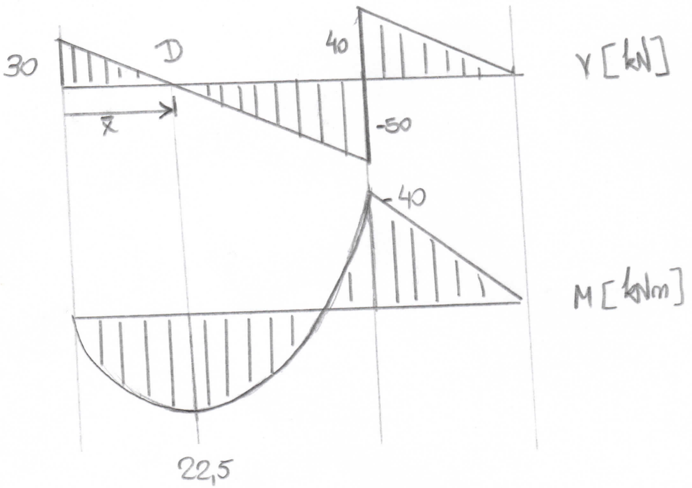
Trecho BC



$$\boxed{N=0}$$

$$V - 20\eta = 0 \Rightarrow \boxed{V = 20\eta}$$

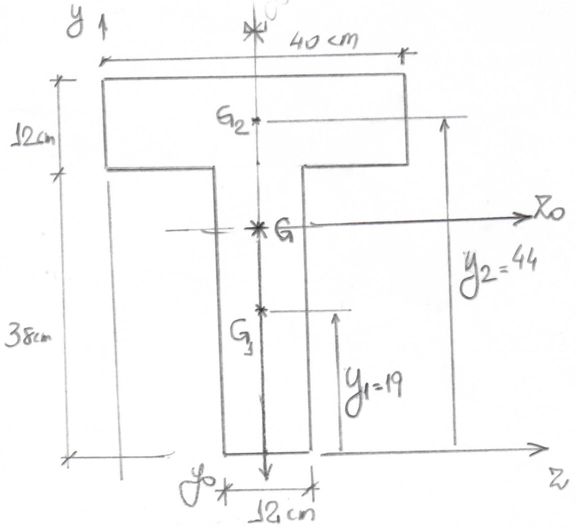
$$-M - 20\eta \cdot \eta/2 = 0 \Rightarrow \boxed{M = -10\eta^2}$$



$$\bar{x} = 3/2 \text{ m} = 1{,}5 \text{ m}$$

$$M(\bar{x}) = 22{,}5 \text{ kNm}$$

Considere a seguinte seção transversal:



Determinando o y_G:

$$y_G = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i} = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2} = \frac{19.(12.38) + 44(12.40)}{(12.38) + 12.40}$$

$$y_G = \frac{19.456 + 44.480}{456 + 480} = \frac{29784}{936} \Rightarrow \boxed{y_G = 31{,}8 \text{ cm}}$$

Determinando I_{z_0}:

$$I_{z_0} = \sum_i I^i_{z_0} = \sum \left(I^i_{\bar z} + d_i^2 A_i\right)$$

$$I^1_{\bar z} = \frac{b_1 h_1^3}{12} = \frac{12.(38)^3}{12} = 54872\,cm^4 \;;\; A = 456\,cm^2 \;;\; d_1 = y_G - y_1 = 12,8\,cm$$

$$I^2_{\bar z} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{40.12^3}{12} = 5760\,cm^4 \;;\; A = 480\,cm^2 \;;\; d_2 = y_2 - y_G = 12,2\,cm$$

$$I_{z_0} = (54872 + 12,8^2.456) + (5760 + 12,2^2.480) = 60632 + 74711,04 + 71443,2 = 206786,24$$

$$I_{z_0} \simeq 2,07.10^5\,cm^4 = 2,07.10^5.10^{-8}\,m^4 \Rightarrow \boxed{I_{z_0} = 2,07.10^{-3}\,m^4}$$

Considere as seguintes tensões máximas: $\begin{cases} \sigma_R^T = 5MPa \\ \sigma_R^C = 30MPa \end{cases}$ $\sigma = \frac{M}{I_{z_0}}.y$

Determine o coeficiente de segurança.

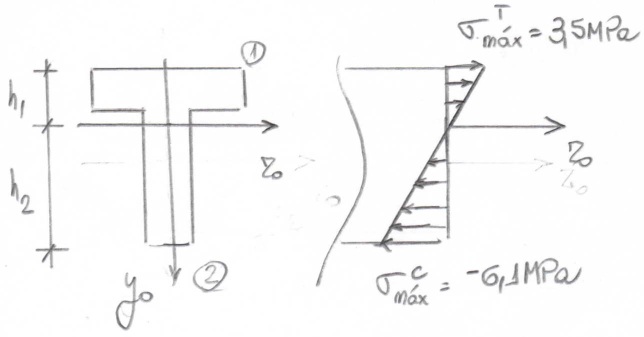
Temos como momentos extremos os atuantes em B e D.

Olhando a seção B:

$M_B = -40\,kNm$

$h_1 = 50 - 31,8 = 18,2\,cm = 0,182\,cm$

$h_2 = 50 - h_1 = 31,8 = 0,318\,m$

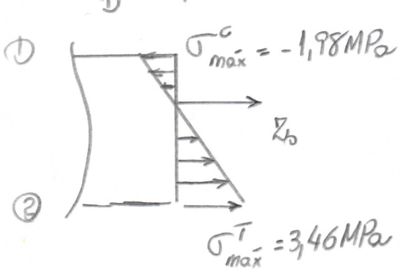


$$\sigma^{①} = \frac{-40.10^3.-0,182}{2,07.10^{-3}} \Rightarrow \sigma^{①} = 3,5\,MPa$$

$$\sigma^{②} = \frac{-40.10^3.0,318}{2,07.10^{-3}} \Rightarrow \sigma^{②} = -6,1\,MPa$$

Agora, olhando a seção D:

$M_D = 22,5\,kNm$



$$\sigma^{①} = \frac{22,5.10^3.(-0,182)}{2,07.10^{-3}} \Rightarrow \sigma^{①} = -1,98\,MPa$$

$$\sigma^{②} = \frac{22,5.10^3.0,318}{2,07.10^{-3}} \Rightarrow \sigma^{②} = 3,46\,MPa$$

Assim, as maiores tensões são:

$$\sigma^C = -6{,}1\,MPa$$

$$\sigma^T = 3{,}5\,MPa$$

Logo

$$|\sigma^C| = \frac{\sigma_R^C}{S_C} \Rightarrow S_C = \frac{\sigma_R^C}{|\sigma^C|} = \frac{30}{6{,}1} \Rightarrow S_C = 4{,}9$$

$$S_T = \frac{\sigma_R^T}{\sigma^T} = \frac{5}{3{,}5} \Rightarrow S_T = 1{,}4$$

E o coeficiente utilizado é:

$$S = \min(S_C, S_T) \Rightarrow \boxed{S = 1{,}4}$$