Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Disciplina 4300255

Mecânica dos Corpos Rígidos e dos Fluidos

Equilíbrio estático e elasticidade

Tensão e deformação

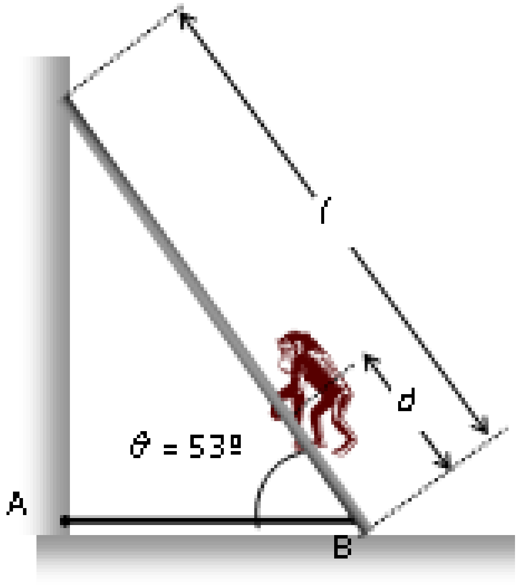
7. Um macaco de 100 N sobe por uma escada de 120 N, comprimento l e centro de massa no meio da escada, como mostra a figura ao lado. As duas extremidades da escada se apoiam sobre superfícies sem atrito. O pé da escada está preso à parede por uma corda horizontal AB que pode suportar uma tensão de 110 N no máximo.

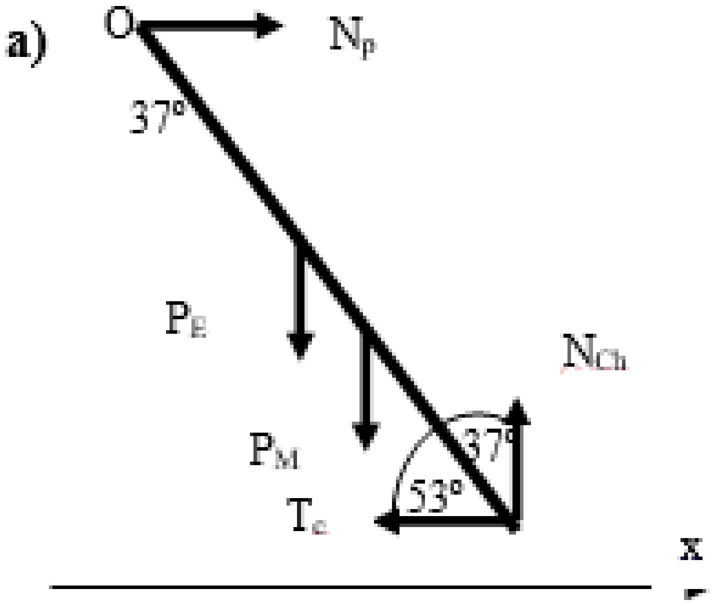
a) Faça o diagrama de forças sobre a escada.

b) Escreva as equações de equilíbrio específicas para a escada identificando cada força que atua sobre ela. Identifique também o ponto escolhido para o cálculo dos torques.

c) Encontre o valor da tensão na corda quando o macaco tiver subido até um d =l/4

d) Encontre a distância máxima d que o macaco pode subir na escada sem que a corda arrebente, dando a razão d/l como resposta.





b) $$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{N}_p + \vec{N}_{Ch} + \vec{P}_E + \vec{P}_M + \vec{T}_c = 0$$

Em Y: $$-P_E - P_M + N_{ch} = 0 \Rightarrow N_{ch} = P_E + P_M = 120 + 100 = 220\text{N}$$

c) $$\sum \vec{\tau}_0 = 0$$

$$b = \ell - d$$

$$-P_E \cdot \frac{\ell}{2}\ sen\ 37^o - P_M \cdot b\ sen\ 37^o + N_{Ch} \cdot \ell\ sen\ 37^o - T_c \cdot \ell\ \ \text{sen}\ \ 53^o = 0 \qquad (3)$$

$$\therefore T_c = \frac{-P_E \cdot \frac{\ell}{2}\ sen\ 37^o - P_M \cdot (\ell - d)\ sen\ 37^o + N_{Ch} \cdot \ell\ sen\ 37^o}{\ell\ \ \cos\ \ 37^o} = \left(-\frac{P_E}{2} - \frac{3P_M}{4} + N_{Ch}\right) tg 37^o =$$

$$= 65{,}5\ \text{N}$$

d) Considerando T_c=110 N

$$-P_E \cdot \frac{\ell}{2}\ sen\ 37^o - P_M \cdot (\ell - d)\ sen\ 37^o + N_{Ch} \cdot \ell\ sen\ 37^o - T_c \cdot \ell\ \ \mathrm{sen}\ \ 53^o = 0$$

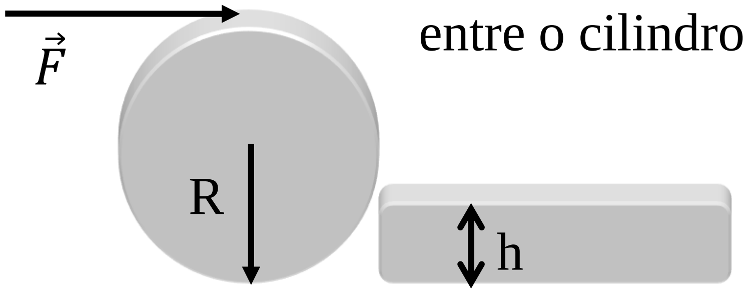
$$-P_E \cdot \frac{\ell}{2}\ sen\ 37^o - P_M \cdot \ell\ sen\ 37^o + P_M \cdot d\ sen\ 37^o + N_{Ch} \cdot \ell\ sen\ 37^o - T_c \cdot \ell\ \ \mathrm{sen}\ \ 53^o = 0$$

$$d = \frac{P_E \cdot \frac{\ell}{2} sen\ 37^o + P_M \ell \cdot\ \ sen\ 37^o - N_{Ch} \cdot \ell\ sen\ 37^o + T_c \cdot \ell\ \ sen\ \ 53^o}{P_M \cdot\ \ sen\ 37^o} =$$

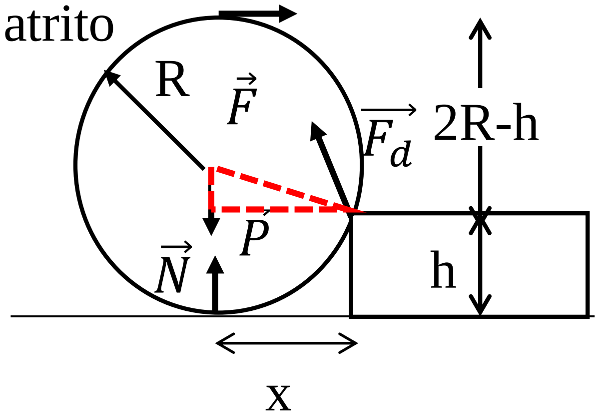
$$= \frac{P_E \cdot \frac{\ell}{2} sen\ 37^O + P_M \ell \cdot\ sen\ 37^O - N_{Ch} \cdot \ell\ sen\ 37^O + T_c \cdot \ell\ cos\ \ 37^O}{P_M \cdot\ sen\ 37^{o^O}} =$$

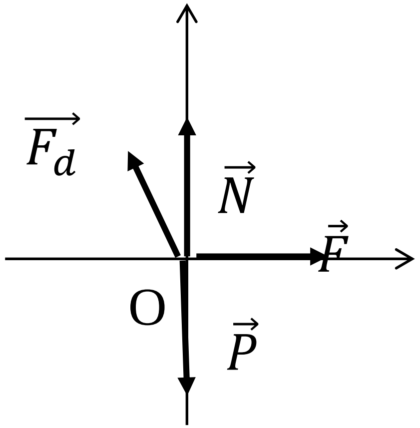
$$= \ell \left[\frac{P_E}{P_M} \frac{1}{2} + \frac{P_M}{P_M} - \frac{N_{Ch}}{P_M} + \frac{T_c}{P_M\ tg\ 37^o} \right] \Rightarrow \frac{d}{\ell} = 0{,}86$$

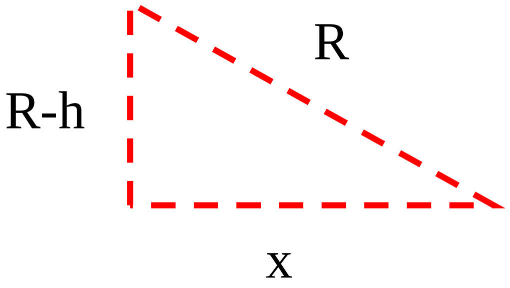
3. (Tipler Cap 12 E 33) Um cilindro de massa M e raio R rola contra um degrau de altura h, como mostra a figura ao lado. O cilindro fica em repouso quando uma força horizontal $\vec{F}$ for aplicada ao seu topo. a) Qual a força normal exercida pela superfície horizontal sobre o cilindro? b) Qual a força horizontal exercida pela aresta do degrau sobre o cilindro? c) Qual a componente vertical da força exercida pela aresta do degrau sobre o cilindro?



Consideramos que não há atrito entre o cilindro e o chão!!!







A distância x pode ser calculada já que tanto R como h são conhecidos,

$$x^2 + (R-h)^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + R^2 + h^2 - 2Rh = R^2 \Rightarrow$$

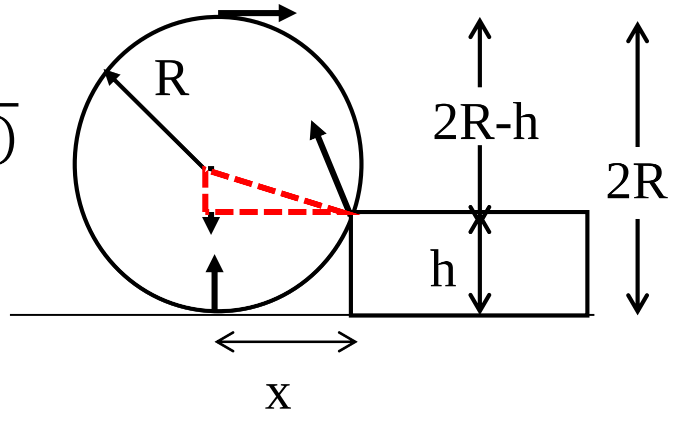
$$x^2 = 2Rh - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{h(2R-h)} \text{ (1)}$$

Pela segunda condição de equilíbrio: $\sum \tau = 0$

Para determinar a força normal, dado que a força exercida pelo degrau é desconhecida, analisamos a soma dos torques na aresta do degrau. Dessa maneira o torque exercido por F_d é nulo.

Assim: $Mgx - Nx - F(2R - h) = 0.$ Substituindo a expressão (1):

$$x = \sqrt{h(2R - h)}$$



a) $Mg\sqrt{h(2R - h)} - N\sqrt{h(2R - h)} - F(2R - h) = 0$

$$N = \frac{Mg\sqrt{h(2R - h)} - F(2R - h)}{\sqrt{h(2R - h)}} = \frac{Mg\sqrt{h(2R - h)}}{\sqrt{h(2R - h)}} - \frac{F(2R - h)}{\sqrt{h(2R - h)}} =$$

$$= Mg - \frac{F(2R-h)\cdot\sqrt{h(2R-h)}}{\sqrt{h(2R-h)}\cdot\sqrt{h(2R-h)}} = Mg - \frac{F(2R-h)\cdot\sqrt{h(2R-h)}}{(2R-h)\sqrt{h^2}} = Mg - F\sqrt{\frac{2R-h}{h}} \quad (2)$$

b) Pela primeira condição de equilíbrio: $\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_d = 0$

Cuja projeção *x* é: $F + F_{d,x} = 0 \Rightarrow F_{d,x} = -F$ (3),

c) e a projeção *y*: $-Mg + N + F_{d,y} = 0$ (4)

Substituindo N pela expressão (2), $-Mg + Mg - F\sqrt{\frac{(2R - h)}{h}} + F_{d,y} = 0 \quad \therefore \quad F_{d,y} = F\sqrt{\frac{(2R - h)}{h}}$

Assim, a força que exerce o degrau sobre o cilindro é: $\vec{F}_d = F_{d,x}\vec{\imath} + F_{d,y}\vec{\jmath} = -F\vec{\imath} + F\sqrt{\frac{(2R - h)}{h}}\vec{\jmath}$

EQUILÍBRIO ESTÁTICO NUM REFERENCIAL ACELERADO

Se analisarmos um corpo que fica parado em um referencial que está acelerado, a resultante das forças não é nula. Se o corpo estiver em repouso num referencial acelerado, a sua aceleração deve ser idêntica à do referencial. Assim, as duas condições de equilíbrio num referencial acelerado são:

1. $\sum \vec{F} = m\vec{a}_{cm}$ onde $\vec{a}_{cm}$ é a aceleração do centro de massa que coincide com a aceleração do referencial.

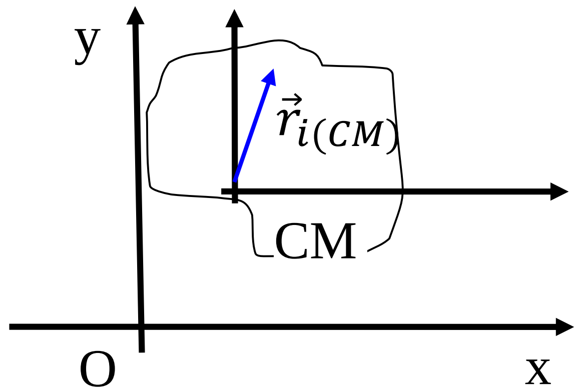
2. $\sum \vec{\tau}_{CM} = 0$ a soma vetorial dos torques em relação ao centro de massa é nula.

A 2ª condição é a consequência da 2ª lei de Newton aplicada à rotação valer para os torques em relação ao CM quer este CM esteja ou não acelerado.

(vimos que se os torques forem obtidos em relação ao centro de massa, $\vec{\tau}_{res,cm} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}$

satisfaz a 2ª lei de Newton para a rotação em torno do centro de massa. Nessa dedução, o torque foi calculado em relação ao CM e não a um ponto fixo, o momento de inércia também está calculado em relação a um eixo que passa pelo CM. Muitas vezes é conveniente calcular os torques em relação ao CM já que por exemplo, uma bola descendo numa rampa o seu CM está acelerado e sendo um referencial não –inercial a 2ª lei de Newton não seria válida nesse referencial, porém $\vec{\tau}_{res,cm} = \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt}$ *continua a ser válida.)*

Consideremos um corpo como o da figura, onde o referencial xOy é inercial:



Sabemos que o momento angular é: $\vec{L} = \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i$. Por ser um corpo extenso, a quantidade de movimento angular em relação ao centro de massa pode ser calculada como:

$$\vec{L}_{CM} = \sum_i m_i \cdot \vec{r}_{i(CM)} \wedge \vec{v}_{i(CM)}$$

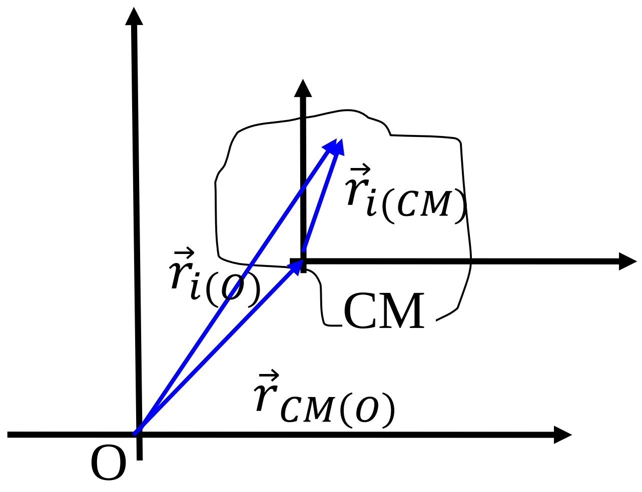
derivando $\vec{L}_{CM}$ em relação ao tempo:

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \frac{d\left(\sum m_i \cdot \vec{r}_{i(CM)} \wedge \vec{v}_{i(CM)}\right)}{dt} = \sum m_i \cdot \frac{d\left(\vec{r}_{i(CM)}\right)}{dt} \wedge \vec{v}_{i(CM)} + \sum m_i \cdot \vec{r}_{i(CM)} \wedge \frac{d\left(\vec{v}_{i(CM)}\right)}{dt} =$$

$$= \sum m_i \cdot \vec{v}_{i(CM)} \wedge \vec{v}_{i(CM)} + \sum m_i \cdot \vec{r}_{i(CM)} \wedge \vec{a}_{i(CM)}$$

A primeira das derivadas é a velocidade linear da partícula i em relação ao centro de massa. O produto vetorial dessa velocidade por si mesma, é zero, portanto o primeiro somando da expressão é mulo.

Fazendo uso da transformação de referenciais, do gráfico,



$\vec{r}_{i(O)} = \vec{r}_{i(CM)} + \vec{r}_{CM(O)}$ e as respectivas acelerações obedecem à relação:
$\vec{a}_{i(O)} = \vec{a}_{i(CM)} + \vec{a}_{CM(O)} \Rightarrow \vec{a}_{i(CM)} = \vec{a}_{i(O)} - \vec{a}_{CM(O)}$.

Substituindo esta expressão na anterior:

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum m_i \cdot \vec{r}_{i(CM)} \wedge \vec{a}_{i(CM)} = \sum m_i \cdot \vec{r}_{i(CM)} \wedge \left(\vec{a}_{i(O)} - \vec{a}_{CM(O)}\right) = \sum m_i \cdot \vec{r}_{i(CM)} \wedge \vec{a}_{i(O)} - \sum m_i \cdot \vec{r}_{i(CM)} \wedge \vec{a}_{CM(O)}$$

no segundo somando, a $\vec{a}_{CM(O)}$ é comum a todos os $\sum m_i \cdot \vec{r}_{i(CM)}$, portanto pode se extrair como fator comum.

$$\therefore \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum m_i \cdot \vec{r}_{i(CM)} \wedge \vec{a}_{i(O)} - \left(\sum m_i \cdot \vec{r}_{i(CM)}\right) \wedge \vec{a}_{CM(O)}$$

Agora, o último somando é nulo por que $\sum_i m_i \vec{r}_{i(CM)} = 0$ é a posição do centro de massa em relação ao centro de massa.

Assim: $\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum m_i \cdot \vec{r}_{i(CM)} \wedge \vec{a}_{i(O)} = \sum \vec{r}_{i(CM)} \wedge m_i \cdot \vec{a}_{i(O)} = \sum \vec{r}_{i(CM)} \wedge \vec{F}_{i(O)}$

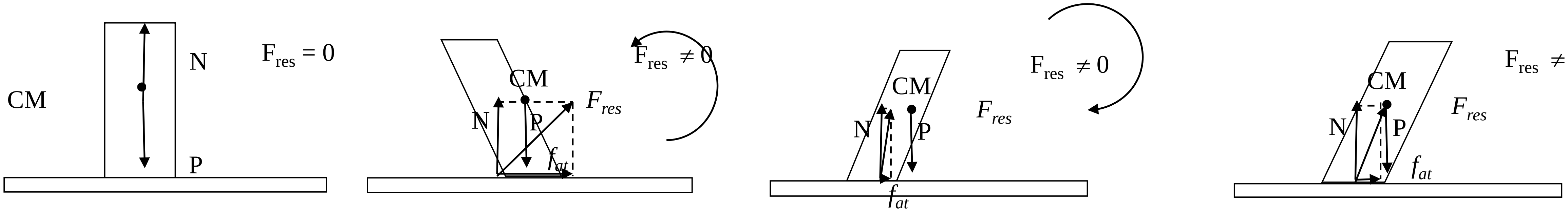
$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum \vec{r}_{i(CM)} \wedge \left(\vec{F}_{i,ext} + \sum\nolimits_j \vec{F}_{i(j)}\right)$$

Como a soma dos torques das forças internas ($F_{i(j)}$) é nula, sobra o torque das forças externas EM RELAÇÃO ao CM, que pode estar acelerado; estes torques são diferentes dos torques em relação ao ponto O.

$$\frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \sum \vec{r}_{i(CM)} \wedge \vec{F}_{i,ext} = \vec{\tau}_{ext(CM)} = 0$$

Exemplo deste assunto é o do surfista, que se mantêm em equilíbrio sobre sua tábua com a soma de torques igual a zero, enquanto ela é acelerada ao pegar uma onda, quando ele precisa passar de velocidade nula para uma velocidade igual à da crista da onda, com uma força diferente de zero.

Ele altera a posição do seu centro de massa em relação à prancha, de maneira tal que a linha de ação da força da prancha sobre ele passe pelo centro de massa (que é o ponto de aplicação da força peso), de modo que o torque em relação ao centro de massa seja nulo. Assim, o peso é compensado pela componente normal da força da prancha e a força resultante é a força de atrito, que é a componente tangente da força da prancha e vai dar a aceleração do centro de massa.



Após analisar e calcular forças para manter corpos rígidos em equilibro, que acaba sendo um modelo idealizado muito útil, abordaremos assuntos relacionados com este tema, mas considerando corpos um pouco mais próximos dos reais. Nestas análises os corpos se deformam sob a aplicação de forças, será necessário nestes cálculos e abordagens, ter outro tipo de informação para determinar as forças no equilíbrio.

Alguns exemplos são: um cabo ou tensor submetido a um ***alongamento***, dilatado por forças que atuam sobre as extremidades.
Uma barra de direção sob ***cisalhamento***, entortada por forças em suas extremidades que produzem torques em torno do seu eixo.
Assim iremos a estudar tensão e deformação, que são grandezas associadas ao formato, materiais constituintes e demais características dos objetos reais.

TENSÃO E DEFORMAÇÃO

A denominação “corpo rígido”é uma abstração matemática conveniente, pois toda substância real em maior ou menor medida sofre deformações sob os efeitos de forças que forem aplicadas a ela. A mudança de forma, volume, comprimento, etc de um corpo sob a ação de forças externas é determinada pelas forças entre as moléculas que o formam. Não entraremos no detalhe de estudar forças moleculares, que é tema de estudo de uma área da física que estuda as propriedades dos átomos de um elemento, inferindo o comportamento de sólidos a partir dessas propriedades.

Quando os corpos não são rígidos, mas deformáveis, são necessárias outras informações para determinar as forças no equilíbrio. O corpo rígido é um modelo idealizado útil, porém a dilatação, a compressão e a torção de corpos rígidos quando aplicamos forças sobre um corpo real são muito importantes e não podem ser desprezadas.

Exemplos de forças que podem ser calculadas quando há deformações?

Forças aplicadas a um carro com pneus com diferente enchimento, deformação de vigas, portanto das forças de apoio, alongamento de cordas no calculo das tensões, deflexão dos cabos; etc.

Um cabo submetido a um *alongamento*, dilatado por forças que atuam sobre as extremidades.
Um submarino sob *compressão*, comprimido por todos os lados pela força de pressão da água.
Uma barra de direção sob *cisalhamento*, torcida por forças em suas extremidades que produzem torques em torno do seu eixo.

Se um corpo sólido está sujeito a forças que tendem a esticá-lo, cortá-lo ou comprimi-lo, sua forma se altera. Se depois de removidas as forças o corpo volta à forma original, diz-se que ele é **elástico**. Em geral, os corpos são elásticos se as forças estiverem abaixo de um certo máximo, ou **limite elástico**. Se as forças excederem esse limite, o corpo não retorna a forma original e fica permanentemente deformado.

Para cada tipo de deformação se define uma grandeza chamada **tensão**, que caracteriza a intensidade das forças que produzem a dilatação, a compressão ou a torção, usualmente descrita como força por unidade de área. A **deformação**, é a outra grandeza utilizada neste tipo de analises.