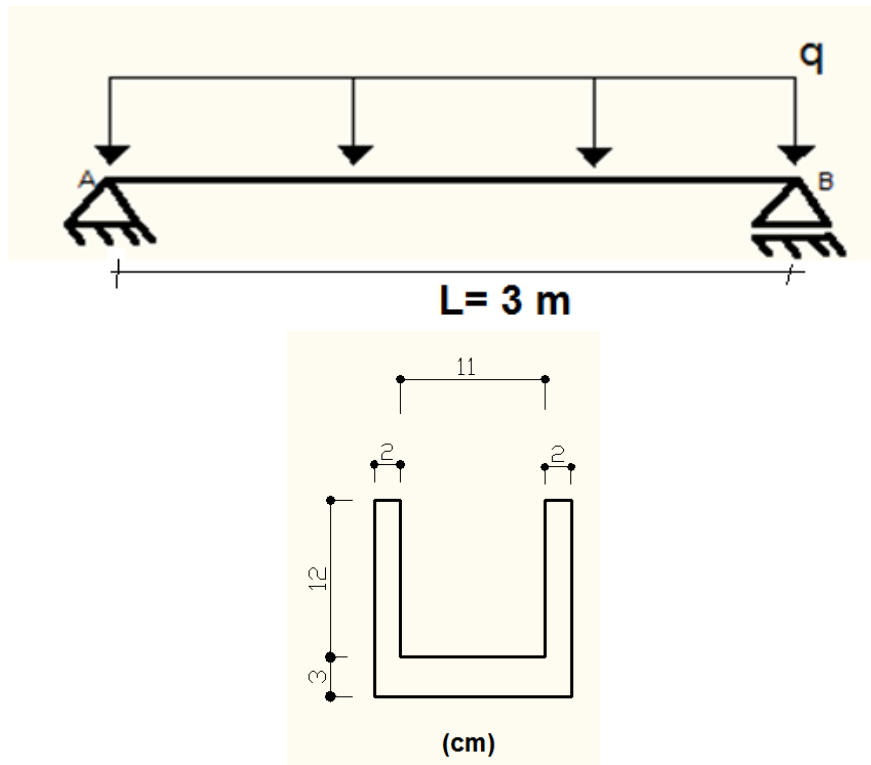


Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

São Paulo, maio de 2020.

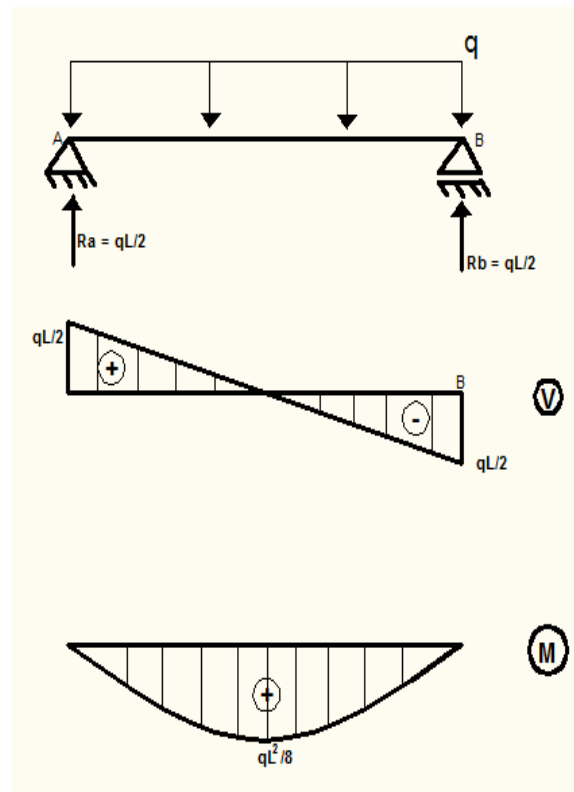
1. Para a viga bi-apoiada a seguir com material que possui tensão admissível de 60 MPa para tração e 150 MPa para compressão, calcule o máximo valor da carga distribuída “ q ”, nas unidades de kN/m. A sua seção transversal é um perfil U, conforme desenho.



Resposta:

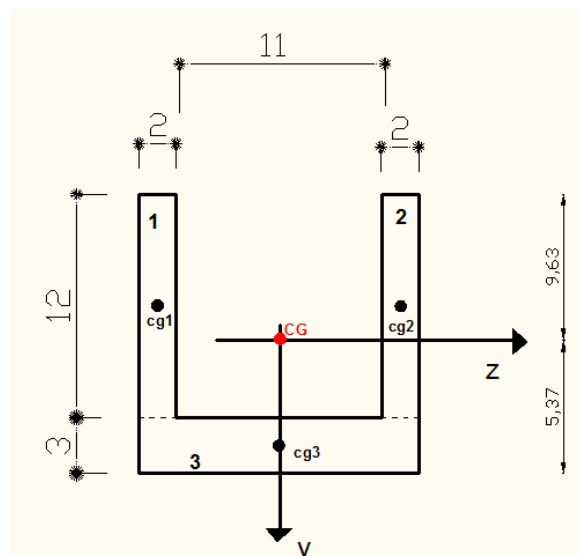
- a) Determinar o diagrama de momento fletor:

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



b) Obter características geométricas. Já obtidas no exemplo anterior:

$$(I_z)_{CG} = 2 \cdot [288 + (-3,63)^2 \cdot 24] + [33,75 + (3,87)^2 \cdot 45] = 1916,2 \text{ cm}^4 = 1916,2 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4$$



c) Análise de tensões

Momento máximo ocorre na seção central e de valor: $M_{\max} = q \cdot 3^2 / 8 = 1,125 \cdot q$

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

$$\sigma_{\text{inf}} = \frac{M \cdot y_{\text{inf}}}{I_z} = \frac{1,125q \cdot (0,0537)}{1916,2 \cdot 10^{-8}} (\text{tração}) \rightarrow \frac{1,125q \cdot (0,0537)}{1916,2 \cdot 10^{-8}} \leq \sigma_{\text{tração}} = 60 \cdot 10^3 \text{ (kPa)}$$

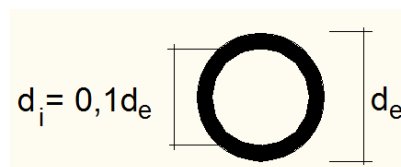
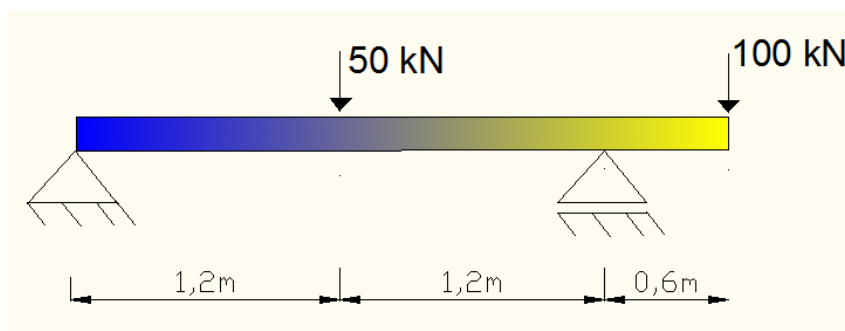
$$\rightarrow q \leq 19,0 \text{ (kN/m)}$$

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{M \cdot y_{\text{sup}}}{I_z} = \frac{1,125q \cdot (-0,0963)}{1916,2 \cdot 10^{-8}} (\text{compressão}) \rightarrow \left| \frac{1,125q \cdot (-0,0963)}{1916,2 \cdot 10^{-8}} \right| \leq \sigma_{\text{compressão}} = 150 \cdot 10^3 \text{ (kPa)}$$

$$\rightarrow q \leq 26,5 \text{ (kN/m)}$$

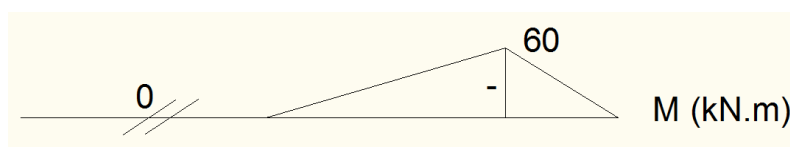
$$\therefore q_{\text{max}} = 19 \text{ kN/m}$$

2. Para viga a seguir, obter o menor valor do diâmetro externo (d_e), da seção transversal que é circular e vazada, conforme indicação, de modo que as tensões solicitantes não excedam os valores admissíveis de tração e compressão que são, respectivamente, 40 MPa e 150 MPa.



(seção transversal)

a) Determinar o diagrama de momento fletor:



b) Obter características geométricas:

O momento de inércia da seção circular é dado por: $I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$

Para o caso da seção vazada:

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

$$I_z = \frac{\pi \cdot (d_e^4 - d_i^4)}{64} = \frac{\pi \cdot [d_e^4 - (0,1 \cdot d_e)^4]}{64} = 0,049082 \cdot d_e^4$$

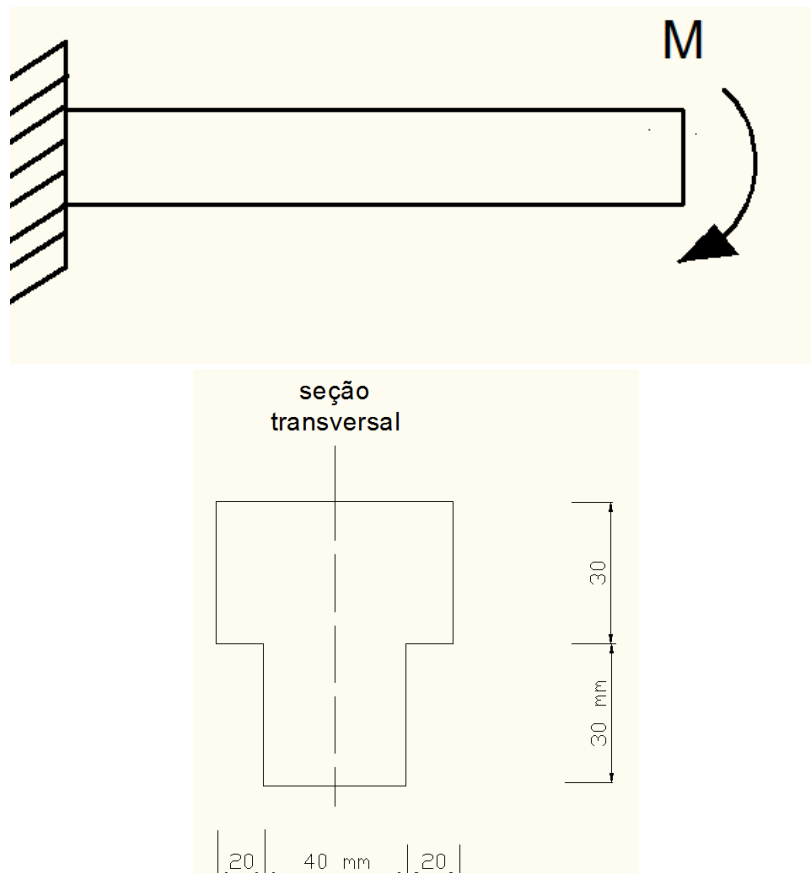
c) Análise de tensões. Como a distância em relação às fibras superiores e inferiores são idênticas, basta verificar onde a tensão admissível é menor, ou seja, fibras tracionadas.

$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{M \cdot y_{\text{sup}}}{I_z} = \frac{-60 \cdot (-d_e/2)}{0,049082 \cdot d_e^4} (\text{tração}) \leq \sigma_{\text{tração}} = 40 \cdot 10^3 \text{ (kPa)}$$

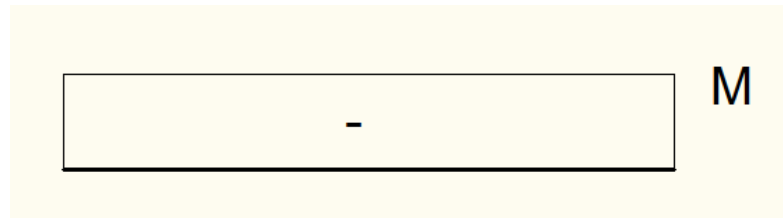
$$\rightarrow d_e \geq 0,248 \text{ (m)}$$

$$\therefore d_{e\text{min}} = 24,8 \text{ cm}$$

3. A viga a seguir é feita de um material onde suas tensões admissíveis são de 24 MPa e 30 MPa, respectivamente para tração e compressão. O momento M atua conforme desenho, determine o máximo valor de M. Utilize a seção transversal indicada no desenho.



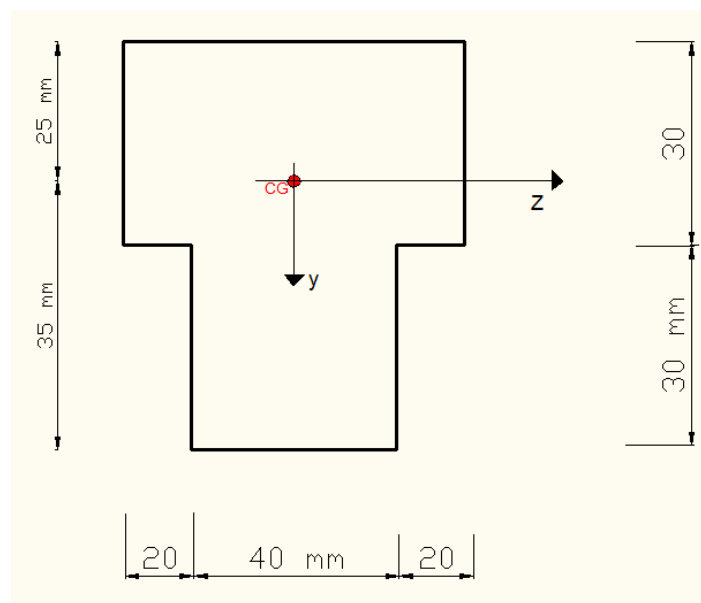
a) Determinar o diagrama de momento fletor:



b) Obter características geométricas, idem ao exercício anterior:

$$y_{CG} = \frac{(y_{CG})_1 \cdot A_1 + (y_{CG})_2 \cdot A_2}{A_1 + A_2} = \frac{15 \cdot 2400 + 45 \cdot 1200}{2400 + 1200} = 25 \text{ mm}$$

$$(I_z)_{CG} = [180.000 + (-10)^2 \cdot 2400] + [90.000 + (20)^2 \cdot 1200] = 990.000 \text{ mm}^4$$



c) Análise de tensões:

$$\sigma_{\text{inf}} = \frac{M \cdot y_{\text{inf}}}{I_z} = \frac{-M \cdot (0,035)}{990 \cdot 10^{-9}} \text{ (compressão)} \rightarrow \left| \frac{-M \cdot (0,035)}{990 \cdot 10^{-9}} \right| \leq \sigma_{\text{compressão}}$$

$$\rightarrow \frac{M \cdot (0,035)}{990 \cdot 10^{-9}} \leq 30 \cdot 10^3 \text{ (kPa)} \rightarrow M \leq 0,85 \text{ kN.m} = 848,6 \text{ N.m}$$

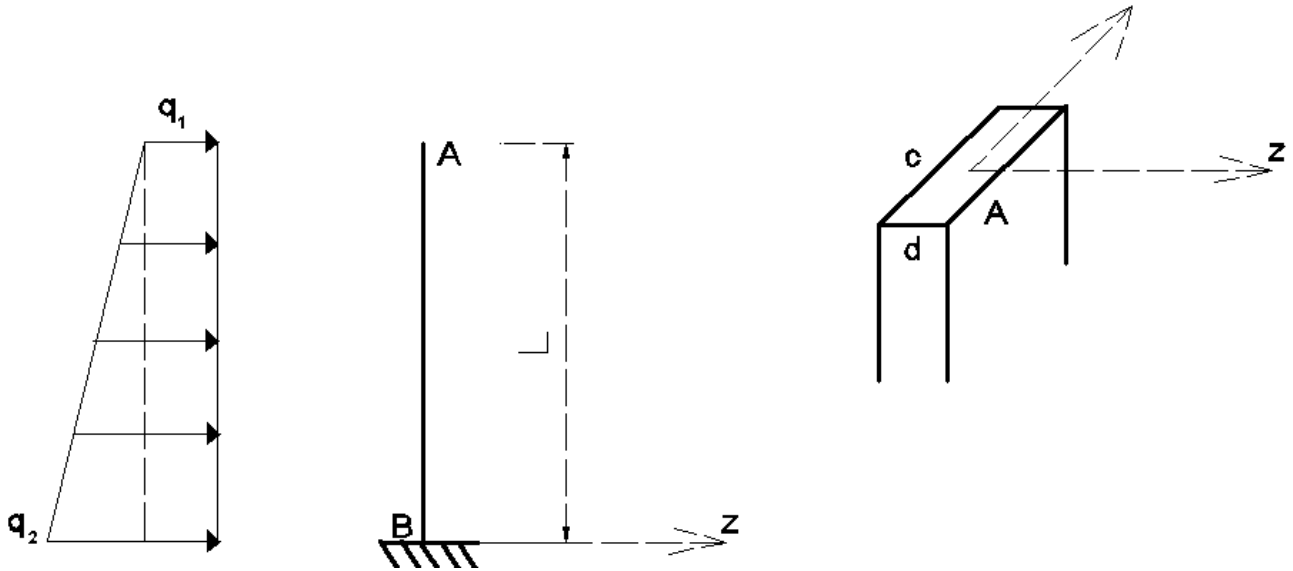
$$\sigma_{\text{sup}} = \frac{M \cdot y_{\text{sup}}}{I_z} = \frac{-M \cdot (-0,025)}{990 \cdot 10^{-9}} \text{ (tração)} \rightarrow \frac{-M \cdot (-0,025)}{990 \cdot 10^{-9}} \leq \sigma_{\text{tração}}$$

$$\rightarrow \frac{M \cdot (0,025)}{990 \cdot 10^{-9}} \leq 24 \cdot 10^3 \text{ (kPa)} \rightarrow M \leq 0,95 \text{ kN.m} = 950,4 \text{ N.m}$$

$$\therefore M_{\text{max}} = 848,6 \text{ N.m}$$

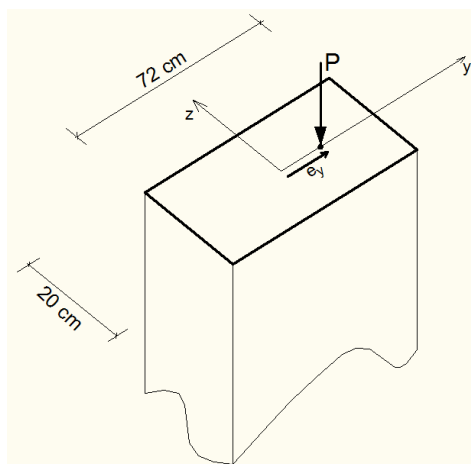
Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

4. A estrutura de contenção está submetida a uma ação de empuxo do solo, onde a distribuição é linear de valores que variam de $q_1 = 10 \text{ kN/m}$ a $q_2 = 30 \text{ kN/m}$, atuando na direção do eixo z , conforme figura. Sabe-se que a altura L é 5 m , e a seção transversal da estrutura é retangular de dimensão $c = 40 \text{ cm}$ e $d = 15 \text{ cm}$, conforme figura. Determine as máximas tensões normais de tração e compressão da estrutura. Desconsidere o peso próprio da estrutura.



Respostas: $\sigma_{traçao} = 138,89 \text{ MPa}$; $\sigma_{compressão} = 138,89 \text{ MPa}$

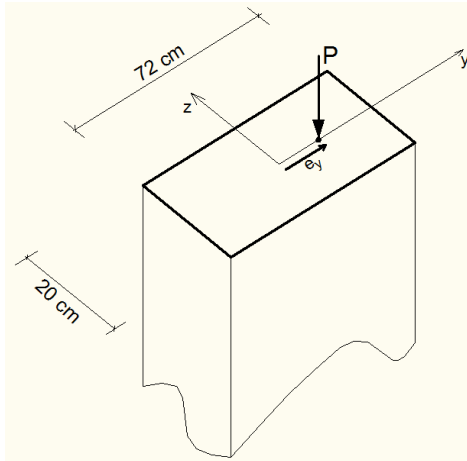
5. Um bloco retangular tem o peso desprezível e está submetido a uma força vertical $P = 42 \text{ kN}$. Determinar o máximo valor da excentricidade e_y para que as tensões normais de compressão não sejam maiores que 350 kPa .



$$\text{Respostas: } \sigma_{compressao} = \left| \frac{Pe_y \cdot (0,036)}{\frac{0,2 \cdot 0,72^3}{12}} - \frac{P}{0,2 \cdot 0,72} \right| \leq \sigma_{compressão} = 350 \rightarrow e_y \leq 2,4 \text{ cm}$$

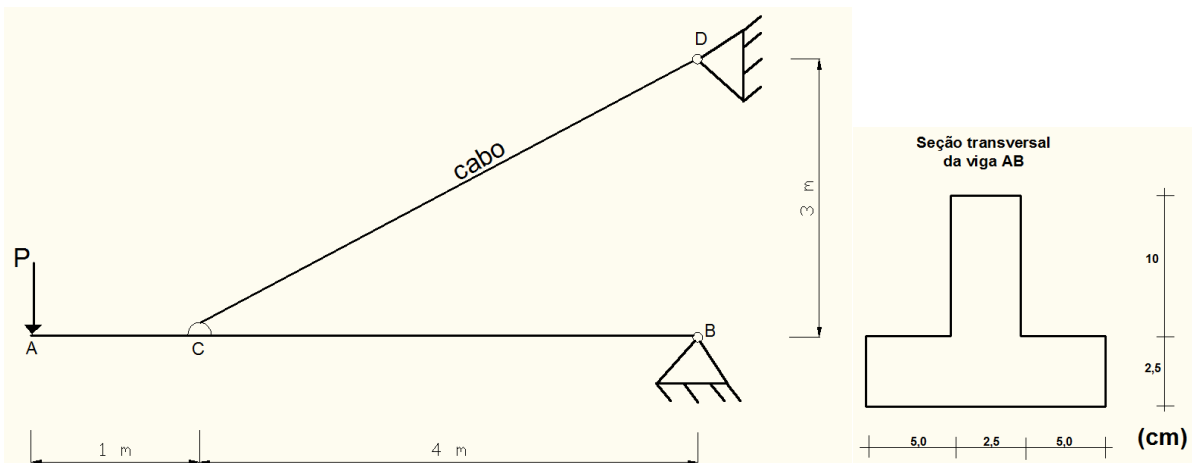
Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

6. Um bloco retangular tem o peso desprezível e está submetido a uma força vertical $P = 420 \text{ kN}$ e a excentricidade $e_y = 20 \text{ cm}$, conforme desenho. Obter o máximo valor de tensão de tração.

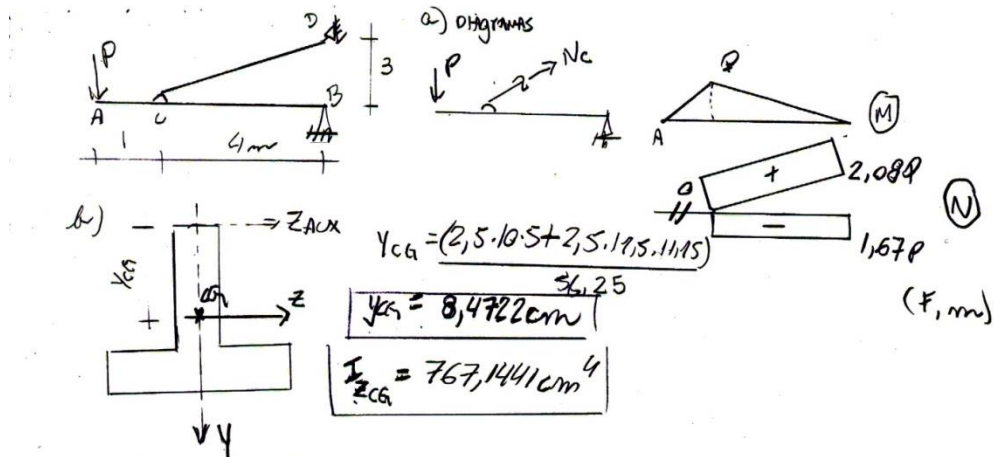


$$\text{Respostas: } \sigma_{\text{tracao}} = \frac{(-420) \cdot 0,20 \cdot (-0,36)}{\frac{0,2 \cdot 0,72^3}{12}} - \frac{420}{0,2 \cdot 0,72} = 1.944,4 \text{ kN/m}^2$$

7. Obter o máximo valor admissível de P para a estrutura abaixo. Admita que o cabo CD esteja preso em C no CG da seção da viga AB. Dados para a viga AB: $\overline{\sigma}_T = 250 \text{ MPa}$, $\overline{\sigma}_C = 100 \text{ MPa}$. Dados para o cabo: $\overline{\sigma}_T = 500 \text{ MPa}$ e diâmetro = 10 mm.



Resposta:



c) Análise de tensões: C.i) ponto C₋ (esq de C): $M = 100P$, $N = 0$

$$\sigma_{inf}^{ci} = (-100P)(4,03) / I_{YcG} \leq \bar{\sigma}_c = 10 \text{ (kN/cm}^2) \rightarrow P_1 \leq 19,0 \text{ kN}$$

$$\sigma_{sup}^{ci} = (-100P)(-8,47) / I_{YcG} \leq \bar{\sigma}_t = 25 \text{ (kN/cm}^2) \rightarrow P_2 \leq 22,6 \text{ kN}$$

C.ii) ponto C₊ (direita de C): $M = -100P$, $N = -1,67P$

$$\sigma_{inf}^{cii} = -100P(4,03) / I_{YcG} - \frac{1,67P}{56,25} \leq \bar{\sigma}_c = 10 \rightarrow P_3 \leq 18,0 \text{ kN}$$

$$\sigma_{sup}^{cii} = (-100P)(-8,47) / I_{YcG} - \frac{1,67P}{56,25} \leq \bar{\sigma}_t = 25 \rightarrow P_4 \leq 23,3 \text{ kN}$$

C.iii) Análise dos cabos:

$$\sigma = N_c / A = 2,08P / (\pi \cdot 1^2 / 4) \leq 50 \text{ (kN/cm}^2) \rightarrow P_5 \leq 18,9 \text{ kN}$$

A SEÇÃO PRÓXIMA DE B NÃO PRECISA SER ANALISADA POIS É UM CASO PARTICULAR DE C.ii.

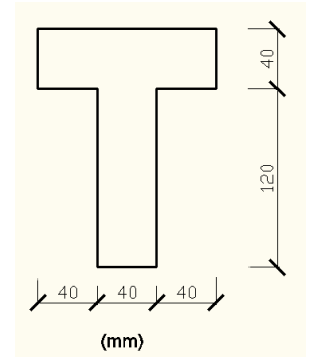
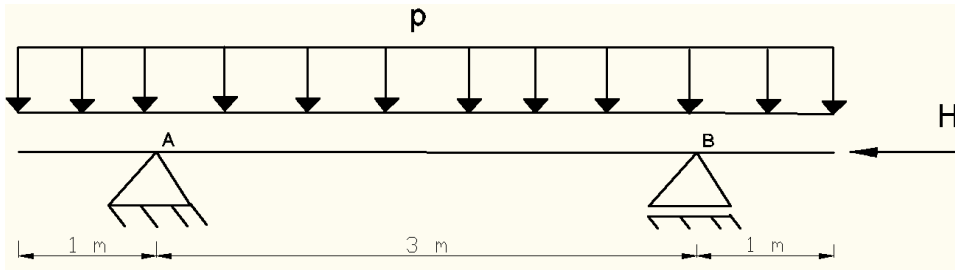
Portanto $P_{\max} = \min(P_i)$, $i=1,5 \rightarrow \boxed{P_{\max} = 18,0 \text{ kN}}$

Obs. A QUESTÃO É ANALISADA C1 RESPEITO OS 3 SEÇÕES CRÍTICAS POSSÍVEIS.

8. Determinar as mínimas tensões de ruptura (ou tensões limites) de tração, compressão e cisalhamento que deve ter o material que constitui a viga a seguir, sabendo-se que a mesma deve trabalhar com um coeficiente

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

de segurança igual a 2,0 para as tensões normais e igual a 1,4 para a tensão cisalhante. Considerar $p = 20 \text{ kN/m}$ e $H = 80 \text{ kN}$ (aplicado no centro geométrico da seção transversal).



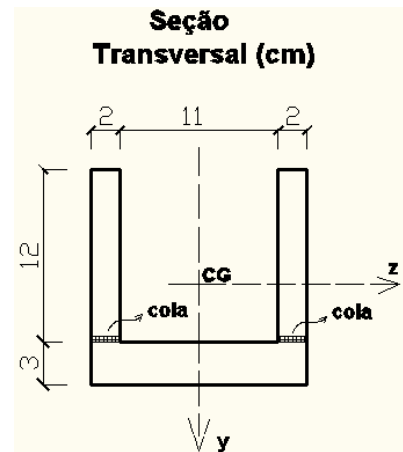
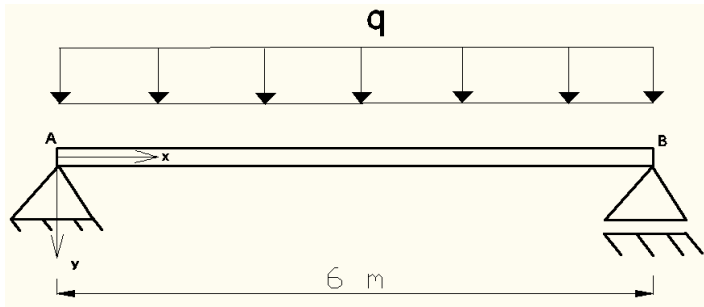
Resposta: (unidade kN/cm^2)

$\sigma_R =$ (tração)
 $\sigma_R =$ (compressão)
 $\tau_R =$

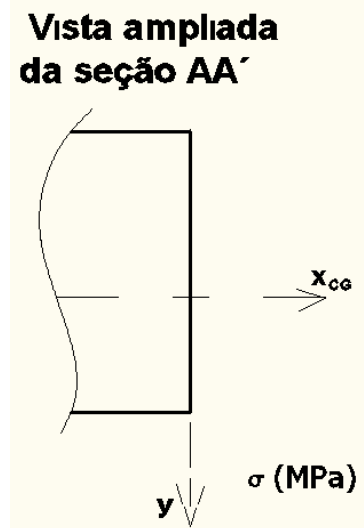
9. Sabendo-se que a seção transversal da viga a seguir é formada por um perfil “U”, a qual foi obtida pela colagem de perfis retangulares de madeira nas regiões indicadas, obtenha:

- 1) A carga distribuída máxima admissível (\bar{q});
- 2) Adotando a carga distribuída (\bar{q}) obtida no item anterior, indique na figura da resposta a distribuição com seus valores extremos das tensões normais e a posição da linha neutra (LN) na seção transversal posicionada a 1 metro do apoio A, chamada de seção AA'.

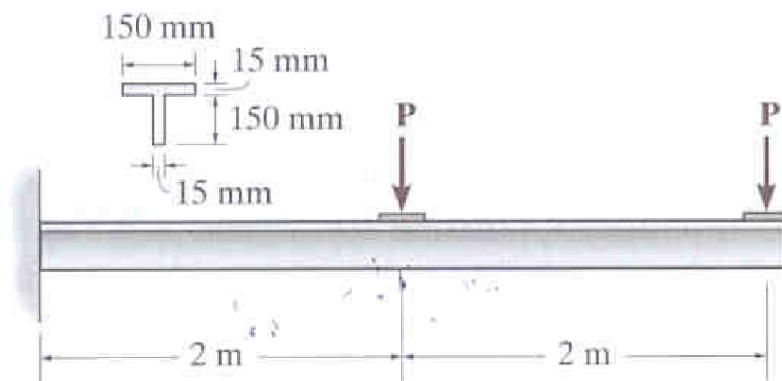
São dadas as seguintes tensões admissíveis para a madeira e para a cola: Madeira: $\bar{\sigma}_{\text{tração}} = 60 \text{ MPa}$; $\bar{\sigma}_{\text{compressão}} = 150 \text{ MPa}$; Cola: $\bar{\tau} = 8,5 \text{ MPa}$



Resposta: 1) $\bar{q} =$ (kN/m); 2)

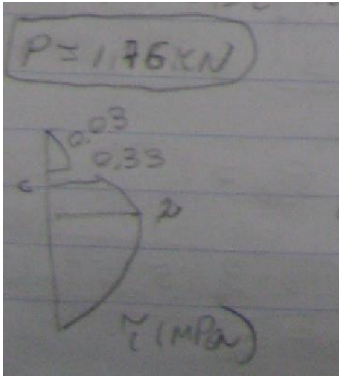


10. Para a viga em balanço, determinar as cargas máximas P que podem ser suportadas com segurança pela viga, se a tensão de flexão admissível for 170 MPa para tração e 500 MPa para compressão. Esboce a distribuição das tensões normais na seção mais crítica.

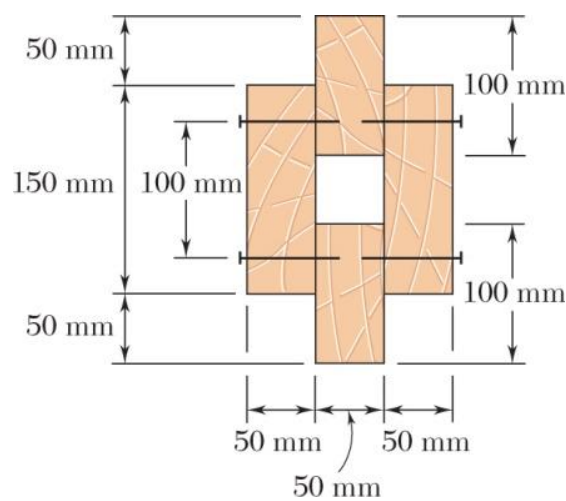
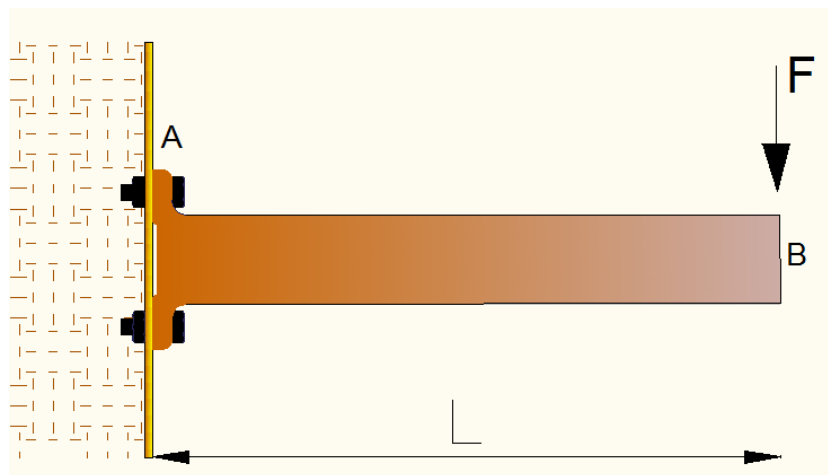


Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

$P_{\max} = 1,76 \text{ kN}$



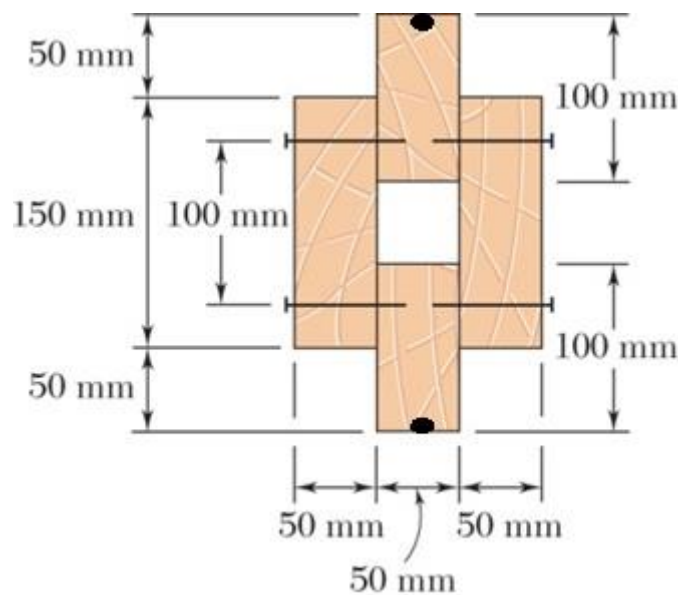
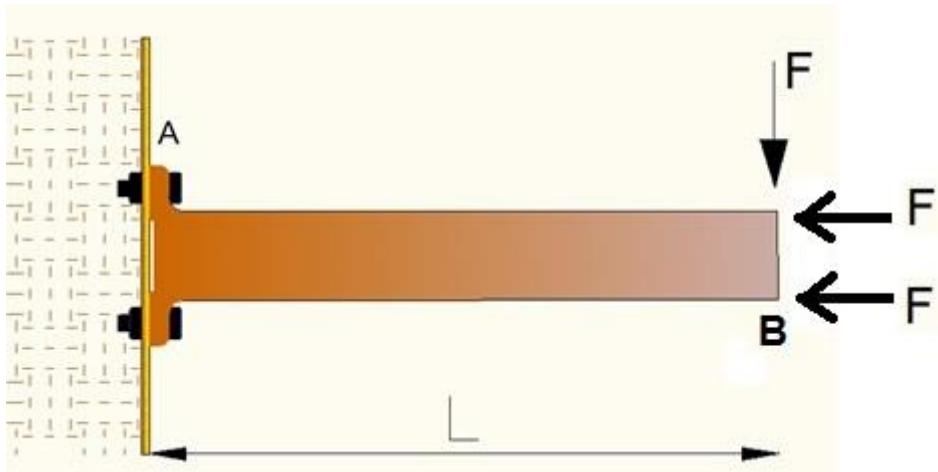
11. Para a viga de madeira do tipo Ipê-roxo que está em balanço, ver figura, admita que $E = 70 \text{ GPa}$, $F = 50 \text{ kN}$, $L = 3 \text{ m}$ e que a seção transversal seja a indicada na figura, determine a tensão normal máxima de tração.



Resposta: a) $\sigma_{\text{tração}} =$

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

12. Para a viga de madeira do tipo Ipê-roxo que está em balanço, ver figura, admita que $F = 50 \text{ kN}$, $L = 3 \text{ m}$ e que a seção transversal seja a indicada na figura. As forças F na horizontal atuam na fibras mais afastadas da seção, indicadas pelos pontos negros do desenho da seção transversal. A força F na vertical atua no CG da seção transversal. Nessas condições, determine as tensões normais máximas de tração e compressão.

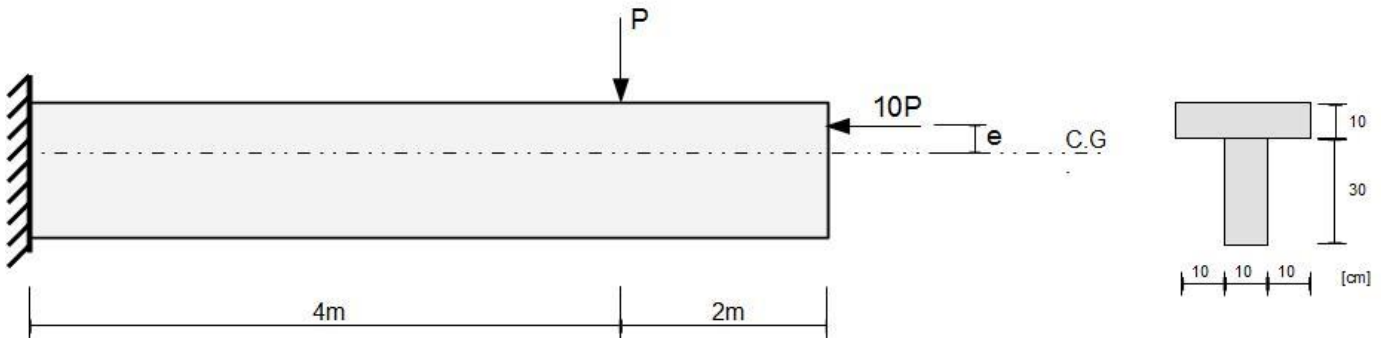


Resposta:

a) $\sigma_{tração} =$ $\sigma_{compressão} =$

13. (Luis Bittencourt) Para a viga abaixo, pede-se:
- Diagramas de esforço normal e momento fletor
 - Posição do centro de gravidade na seção transversal
 - Tensão normal máxima de tração e compressão
- Dados: $P = 1000 \text{ kN}$; $e = 5 \text{ cm}$

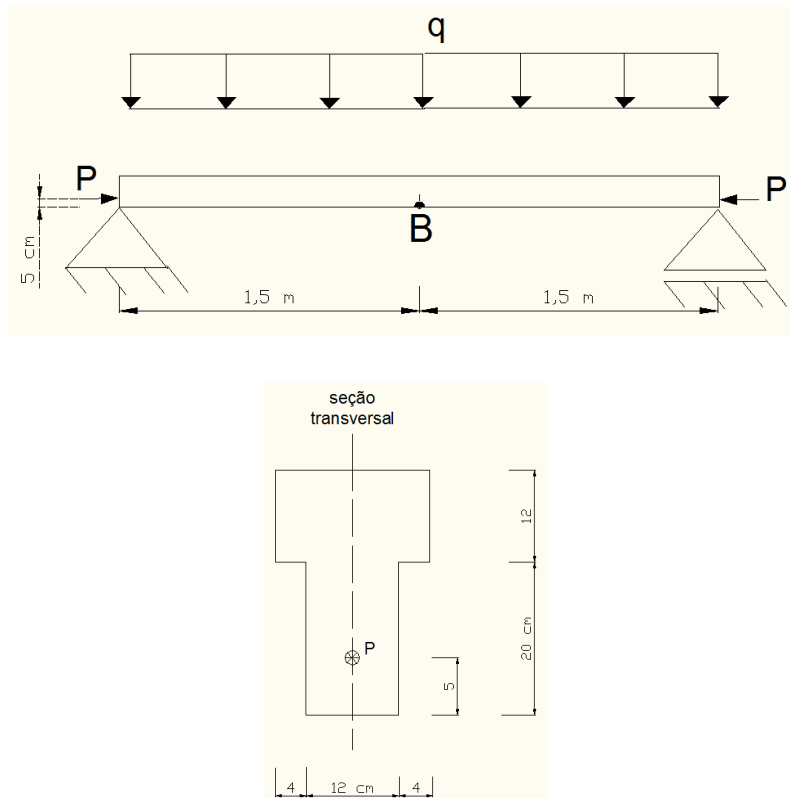
Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



Respostas:

- $M_{engaste} = -3500 \text{ kgf.cm}$, $M_{livre} = 500 \text{ kgf.cm}$
- $Y_{cg} = 25 \text{ cm}$ da parte inferior, $I = 31.000 \text{ cm}^4$
- S1. $\sigma_{mat} = 152,69 \text{ kgf/cm}^2$; $\sigma_{mac} = -298,92 \text{ kgf/cm}^2$;
S2. $\sigma_{mat} = 23,65 \text{ kgf/cm}^2$; $\sigma_{mac} = -40,86 \text{ kgf/cm}^2$;

14. Para a viga abaixo, determine o valor da força P de tal modo que seja nula a tensão normal no ponto B, que é a fibra mais inferior da seção transversal central. Dado: $q = 20 \text{ kN/m}$



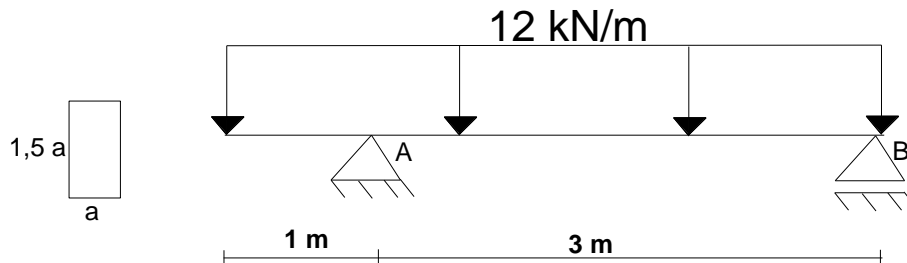
Resolução: $P = 126,4 \text{ kN}$

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

Resolução:
 $P = \quad \text{KN}$
 $q = 20 \text{ kN/m}$ (Prova 14)
 a) caract. geométricas
 $A = 480 \text{ cm}^2$
 $Y_{CG} = (12 \cdot 20 \cdot 6 + 20 \cdot 12 \cdot 22) / 480 = 14 \text{ cm}$
 $I_Z = \frac{20 \cdot 12^3}{12} + 8^2 \cdot 20 \cdot 12 + \frac{12 \cdot 20^3}{12} + 8^2 \cdot 12 \cdot 20 = 41.600 \text{ cm}^4$
 $e = 18 - 5 = 13 \text{ cm}$
 $M = P \cdot e = 13P \text{ (k.cm)}$
 b) diagramas:
 c) análise de tensão:
 $\sigma_B = 0 = \frac{(M_q + M_e) \cdot 18}{I_Z} - \frac{P}{A} = 0$

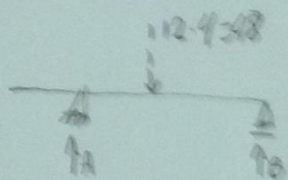
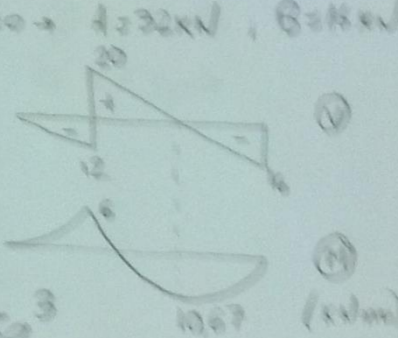
$\sigma_B = [2250 (x \text{ N.cm}) - 13P] \cdot 18 - \frac{P}{480} = 0 \rightarrow 0,9736 - 5,625 \cdot 10^{-3} P = 0$
 $P = 126,3 \text{ kN}$
 Prova 14) $q = 40 \text{ kN/m}$
 a) caract. geométricas geom.
 b) diagramas:
 c) análise de tensão:
 $\sigma_B = 0 = \frac{[4500 - 13P] \cdot 18}{41.600} - \frac{P}{480} = 0$
 $1,9971 - 5,625 \cdot 10^{-3} P - 0,002083 P = 0 \rightarrow P = 252,6 \text{ kN}$

15. A viga mostrada na figura suporta uma carga uniforme de 12 kN/m. Se a viga tiver uma relação altura/largura de 1,5, determinar sua largura mínima. A tensão de flexão admissível é $\sigma_{adm} = 9 \text{ MPa}$, e a tensão de cisalhamento admissível é $\tau_{adm} = 0,6 \text{ MPa}$.

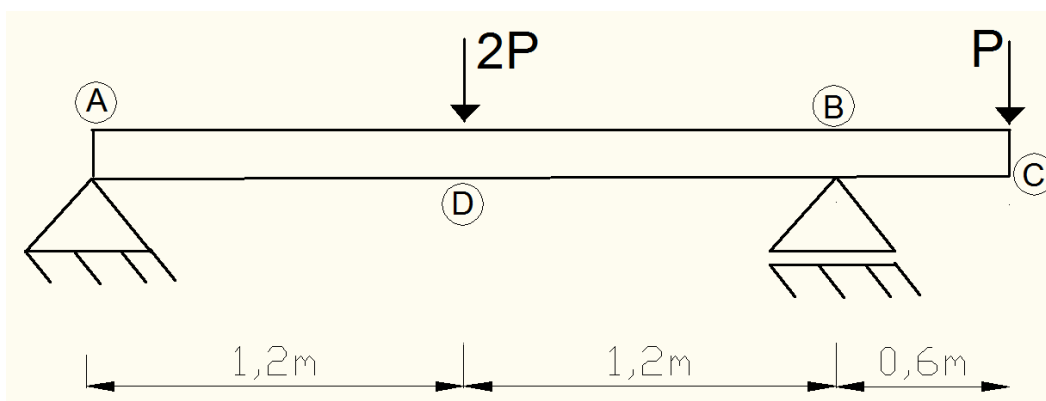


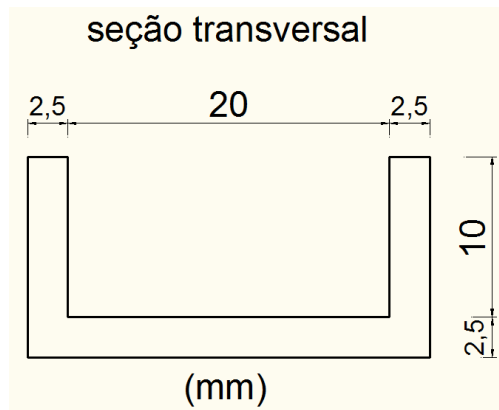
Resposta:

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

Resolução:
 $a =$
 a) DETERMINAÇÃO:

 $\sum M_B = 0 \rightarrow A = 32 \text{ kN}, B = 14 \text{ kN}$

 b) CORRECT. GEOMETRIA:
 $I = a (1,5a)^3 / 12 = 0,28125 a^4$
 $M_{\text{MÁX}} = (a \cdot 0,75a) \cdot 0,75a / 2 = 0,28125 a^3$
 c) ANÁLISE DE TENSÕES:
 $\sigma_{\text{MÁX}} = \frac{10,67 \cdot 0,75a}{0,28125 a^4} = \frac{28,44}{a^3} \leq 40 \rightarrow a \geq 0,87 \text{ m}$
 $\tau_{\text{MÁX}} = \frac{20 \cdot 0,28125 a^3}{a \cdot 0,28125 a^4} = \frac{20}{a^2} \leq 0,6 \rightarrow a \geq 0,83 \text{ m}$
 $a = 183 \text{ mm}$

16. A viga mostrada na figura suporta as cargas de $2P$ e P e tem a seção transversal indicada. A tensão admissível sob tração é de 40 MPa e sob compressão, de 160 MPa . Determinar o valor máximo admissível de P .

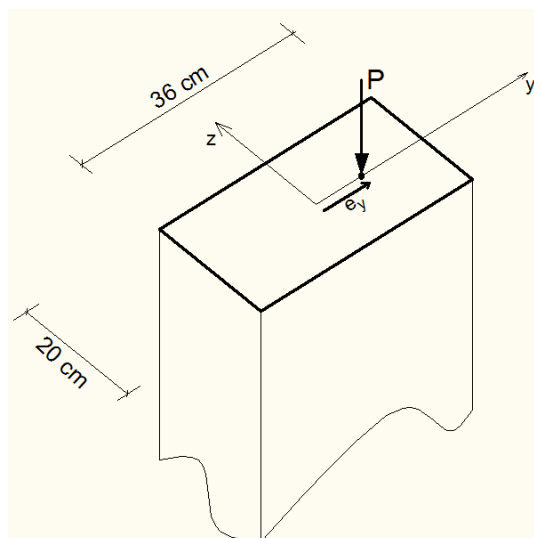




Resposta:

$P_{adm} =$

17. Um bloco retangular tem o peso desprezível e está submetido a uma força vertical P . Determinar a faixa de valores da excentricidade e_y da carga ao longo do eixo y de modo que não provoque qualquer esforço de tração no bloco.

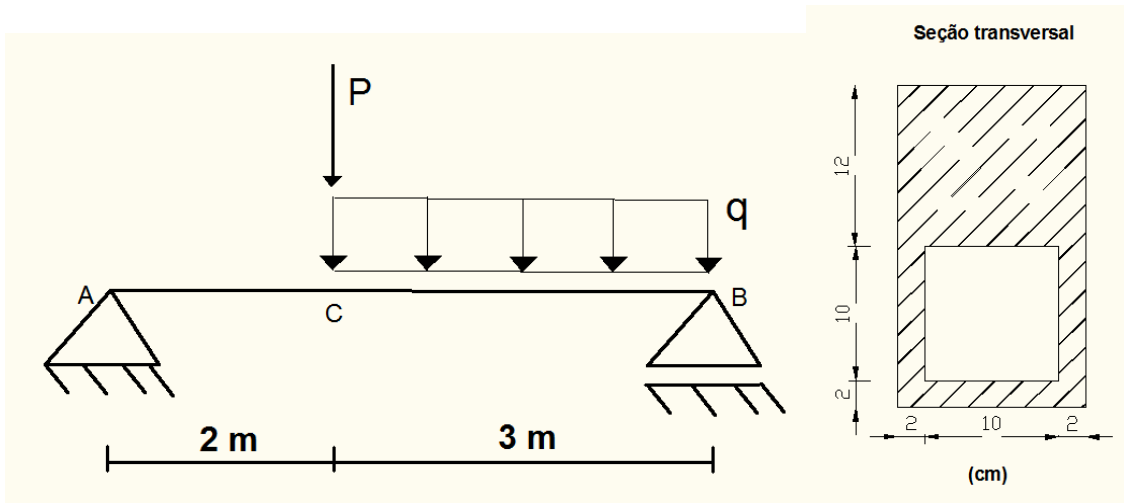


Resposta: $\leq e_y \leq$

18. Para a viga mostrada na figura, adote $P = 40 \text{ kN}$ e $q = 40 \text{ kN/m}$, determine:

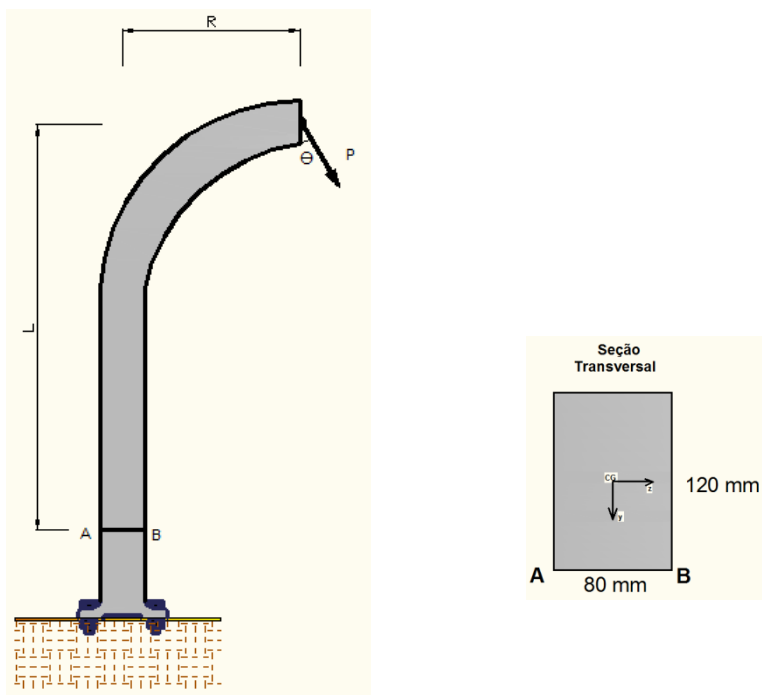
- Diagrama de momento fletor e esforço cortante;
- Posição do centro de gravidade (CG), os momentos de inércias e estáticos com relação ao CG;
- As tensões máximas normais e a tensão cisalhante no CG nas suas respectivas seções críticas;
- Esboce a distribuição das tensões obtidas no item c) ao longo de sua seção transversal.

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



Resposta:

19. O poste está engastado no solo e tem uma força concentrada aplicada, devido ao peso dos cabos de energia elétrica, de $P = 5 \text{ kN}$, inclinado com a vertical em um ângulo de $\theta = 30^\circ$ com a vertical. A seção transversal (ST) do poste é um retângulo maciço de dimensões indicadas na figura. A força P e as cotas das distâncias R e L estão com referência ao CG da ST. Obtenha as tensões normais nos pontos A e B da ST indicada. Adote $R = 1,5 \text{ m}$ e $L = 2,5 \text{ m}$.



a) Obter esforços na seção de interesse:

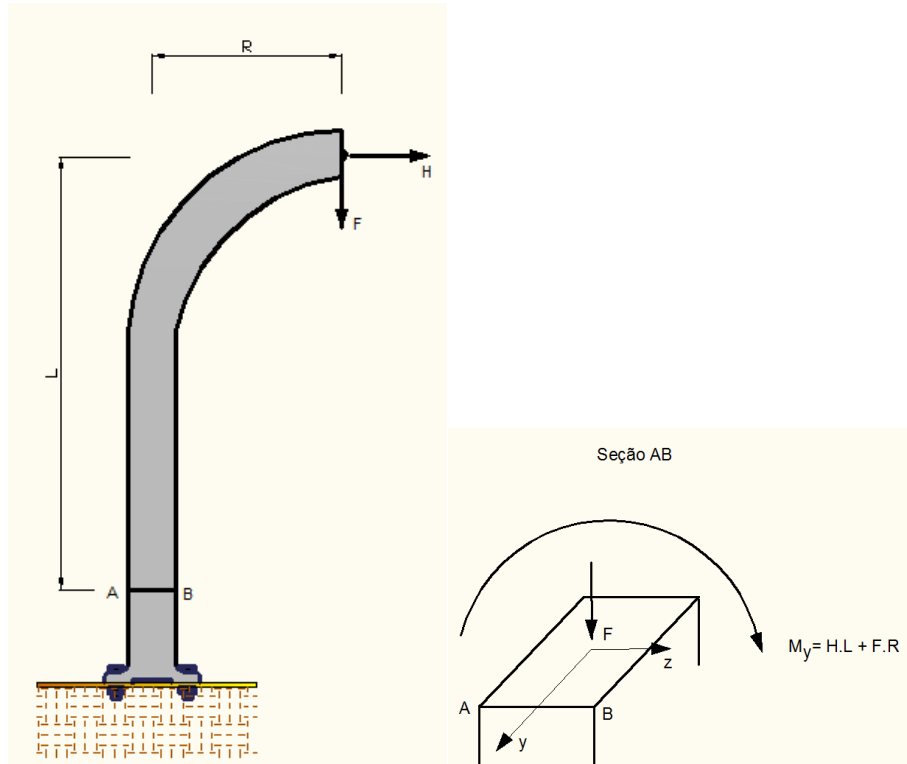
$$F = P \cdot \cos(\theta) = 4,33 \text{ kN} ; H = P \cdot \sin(\theta) = 2,5 \text{ kN}$$

Na seção AB, os esforços são:

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

$$N = -F = -4,33 \text{ kN}$$

$$M_y = -H.L - F.R = -2,5 \cdot 2,5 - 4,33 \cdot 1,5 = -12,75 \text{ kN.m (tracionando as fibras do lado esquerdo da seção)}$$



b) Características geométricas:

$$\text{Área da seção: } A = 0,08 \cdot 0,12 = 0,0096 \text{ m}^2$$

$$\text{Momento de inércia: } I_y = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{0,12 \cdot 0,08^3}{12} = 5,12 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$$

c) Análise de tensões

Fórmula da flexão oblíqua:

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{N}{A} = \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{N}{A}$$

$$\sigma_A = \frac{(-12,75) \cdot (-0,04)}{5,12 \cdot 10^{-6}} + \frac{-4,33}{0,0096} = 99.609,4 - 451 = 99.158,4 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_A = 99,2 \text{ MPa}$$

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

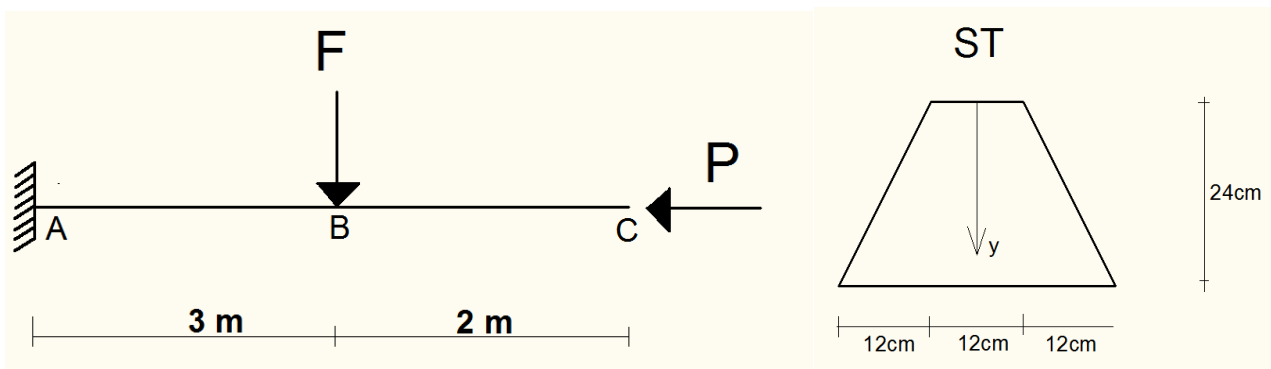
$$\sigma_B = \frac{(-12,75) \cdot (0,04)}{5,12 \cdot 10^{-6}} + \frac{-4,33}{0,0096} = -99.609,4 - 451 = -100.060,4 \text{ kN/m}^2$$

$$\sigma_B = -100,1 \text{ MPa}$$

20. a) Determinar o intervalo dos valores possíveis para a força concentrada P aplicada no CG da seção transversal (ST), conforme desenho;

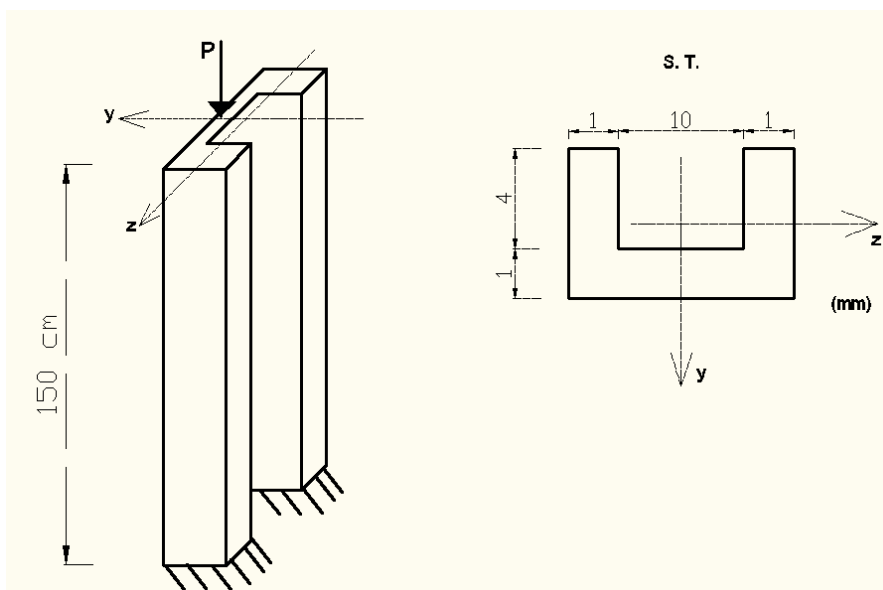
b) Admita P = 2000 kN, atuando no CG da seção transversal. Qual o coeficiente de segurança da estrutura?

Dados: F = 50 kN; $\sigma_{adm} = 80 \text{ MPa}$



Resposta:

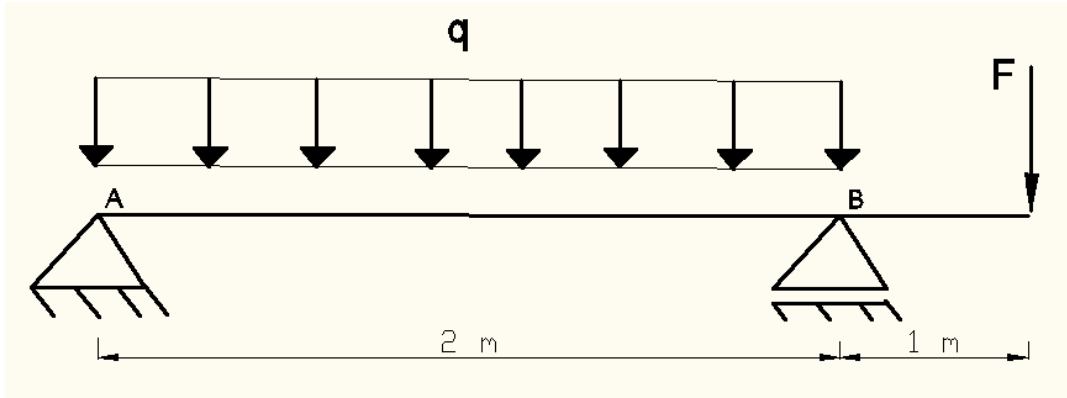
21. O pilar está engastado e uma força P é aplicada a uma distância “e” do CG sobre o eixo de simetria da seção no seu lado positivo, conforme referência. Determine o máximo valor dessa excentricidade “e”, de modo que as tensões normais de tração no pilar não superem 100 MPa. Considere P = 2 kN.



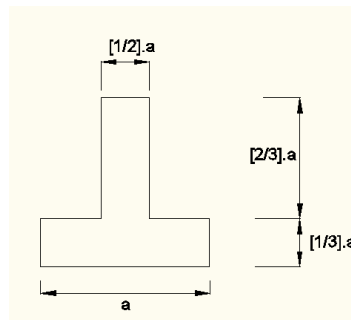
Resposta: $e_{max} =$ mm

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

22. A viga está sujeita ao carregamento mostrado na figura. Determine a dimensão a exigida para sua seção transversal se a tensão admissível para o material for de 150 MPa. Adote $q = 40 \text{ kN/m}$ e $F = 60 \text{ kN}$. Indique a resposta no espaço indicado.



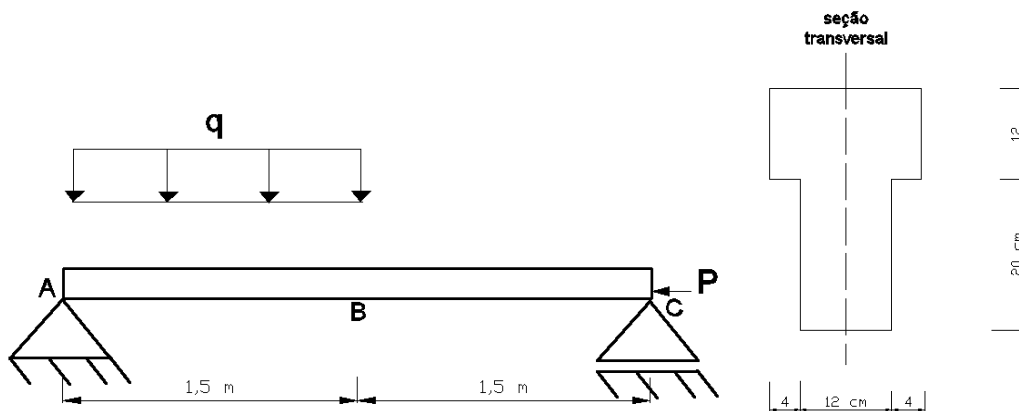
Seção transversal



Resposta: $a =$

23. Para a viga a seguir, sabendo que $q = 20 \text{ kN/m}$, determine:

- Considerando $P = 0$, $\sigma_{adm} = 11 \text{ MPa}$ (tração), $\sigma_{adm} = 20 \text{ MPa}$ (compressão), obtenha os dois coeficientes de segurança, devido a máxima tensão de tração e compressão.
- Considerando $P = 100 \text{ kN}$ aplicado no CG, com $\sigma_{adm} = 11 \text{ MPa}$ (tração), $\sigma_{adm} = 20 \text{ MPa}$ (compressão), obtenha os dois coeficientes de segurança, devido a máxima tensão de tração e compressão.



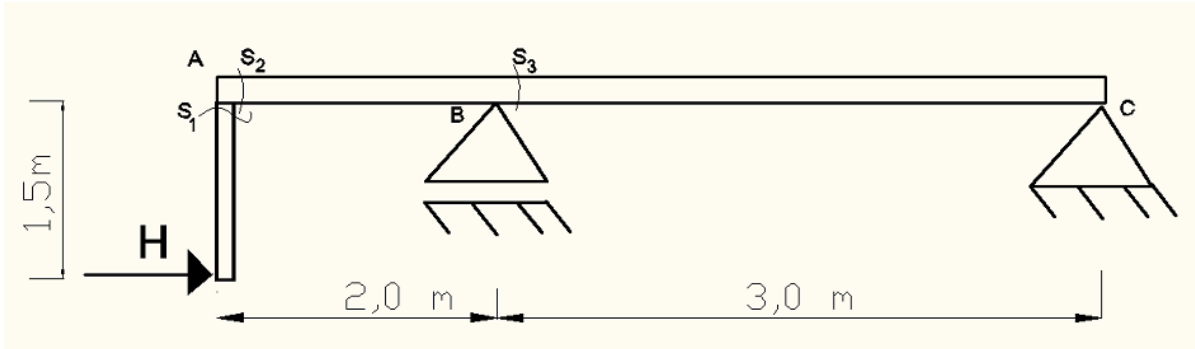
Respostas:

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

24. Sabendo-se que a estrutura a seguir possui seção quadrada de lado 12 cm e que $H = 100 \text{ kN}$, determine as tensões normais máximas de tração nas seções S_1 e S_2 .

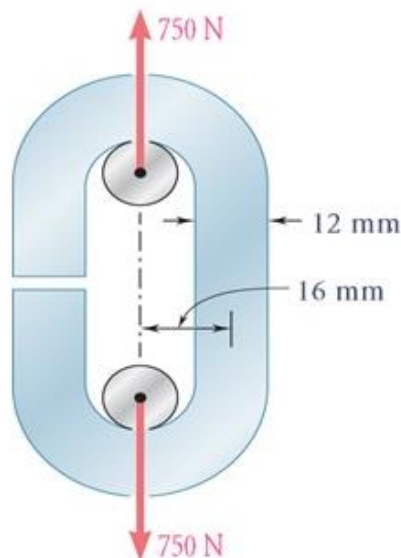
Obs.1: S_1 está numa seção imediatamente inferior ao vértice A; S_2 está numa seção imediatamente posterior ao vértice A.

Obs.2: As medidas são tomadas em relação aos eixos do CG da seção, não precisa levar em conta nelas as medidas da seção transversal.



Respostas:

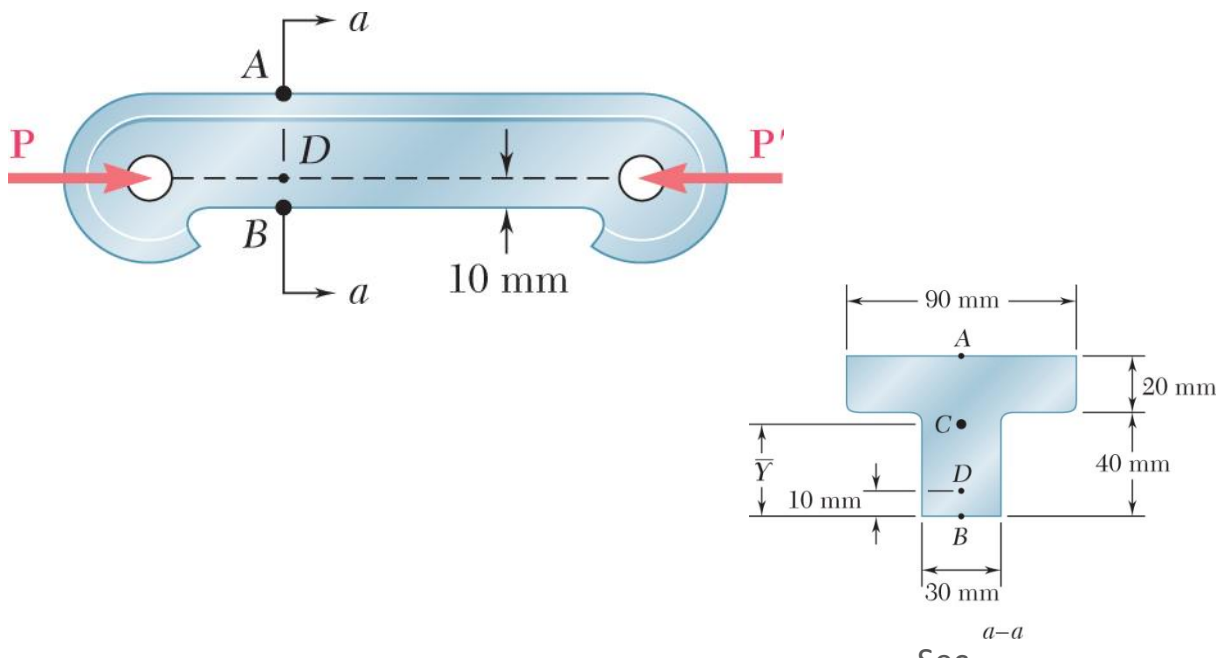
25. Uma corrente de elos abertos é obtida quando se dobram barras de aço de baixo teor de carbono, de 12 mm de diâmetro, na forma mostrada. Sabendo que a corrente suporta uma força de 750 N, determine (a) as tensões máximas de tração e compressão na parte reta de um elo e (b) a distância entre o eixo que passa pelo centroide e a linha neutra de uma seção transversal. Represente as respostas dos diagramas nos espaços indicados. O momento de inércia com relação ao seu CG da seção circular é: $I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$.



Respostas: $(\sigma_{\max})_{\text{tração}} =$ $(\sigma_{\max})_{\text{compressão}} =$ (b) $y =$

26. As maiores tensões admissíveis são 30 MPa na tração e 120 MPa na compressão, determine a maior força P que pode ser aplicada à peça. O ponto C é o centroide da seção transversal.

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

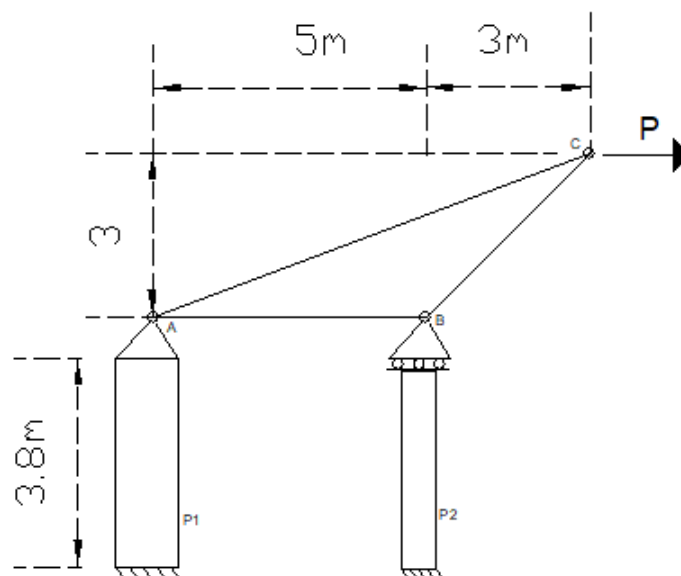


Respostas: $P_{\max} =$

27. Calcule a máxima força P de modo que a estrutura abaixo esteja segura com relação às tensões admissíveis. A estrutura é formada por uma treliça (barras AB , AC e BC) com apoio de 2º e 1º gênero em A e B , respectivamente. Estes apoios são os pilares ($P1$ e $P2$) que estão engastados e livres em A e B .

Dados: Treliça: $\sigma_{adm}^t = 200 \text{ MPa}$ e $\sigma_{adm}^c = 180 \text{ MPa}$; todas as barras circulares de diâmetro 6cm.

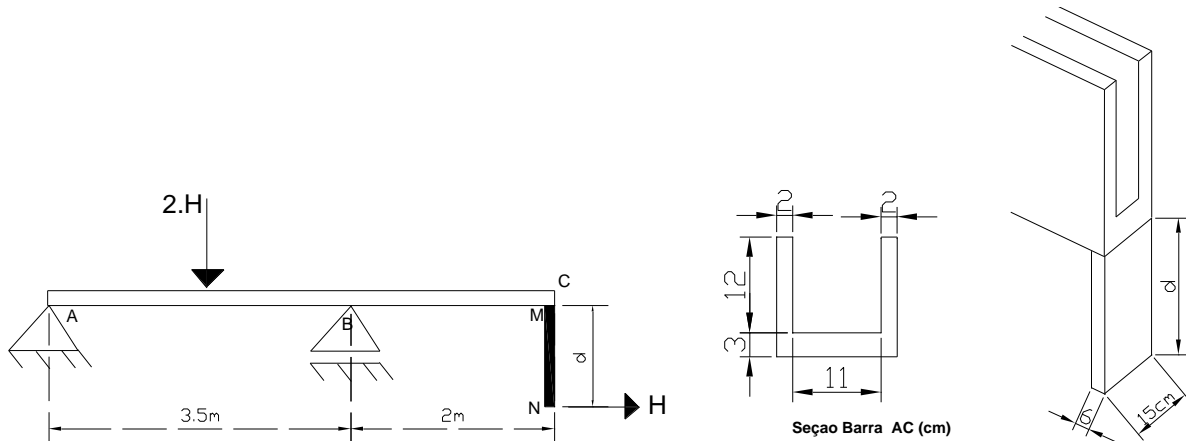
Pilares: $\sigma_{adm}^t = 2 \text{ MPa}$ e $\sigma_{adm}^c = 10 \text{ MPa}$; $\tau_{adm} = 1 \text{ MPa}$. $P1$ e $P2$: seção quadrada de lado 30cm.



Respostas:

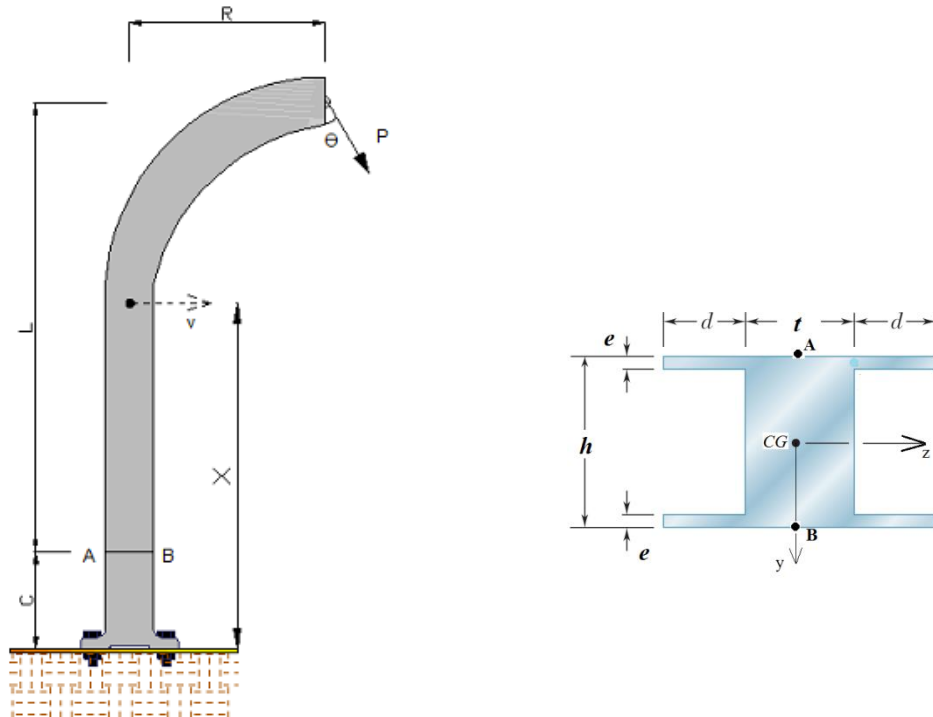
Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

28. Obtenha o máximo valor de d para que a estrutura não rompa. Despreze efeito cisalhante. A força vertical atua no meio do vão AB. A barra ABC é de alumínio e a barra MN é de ferro. A seção da barra AC é indicada na figura abaixo. A seção transversal da barra MN possui a mesma largura da seção AC (15cm) e espessura de 6 cm. Dados: $H = 70\text{kN}$. Alumínio: $\sigma_{adm}^t = 400\text{ MPa}$; $\sigma_{adm}^c = 650\text{ MPa}$; Ferro: $\sigma_{adm}^t = \sigma_{adm}^c = 150\text{ MPa}$



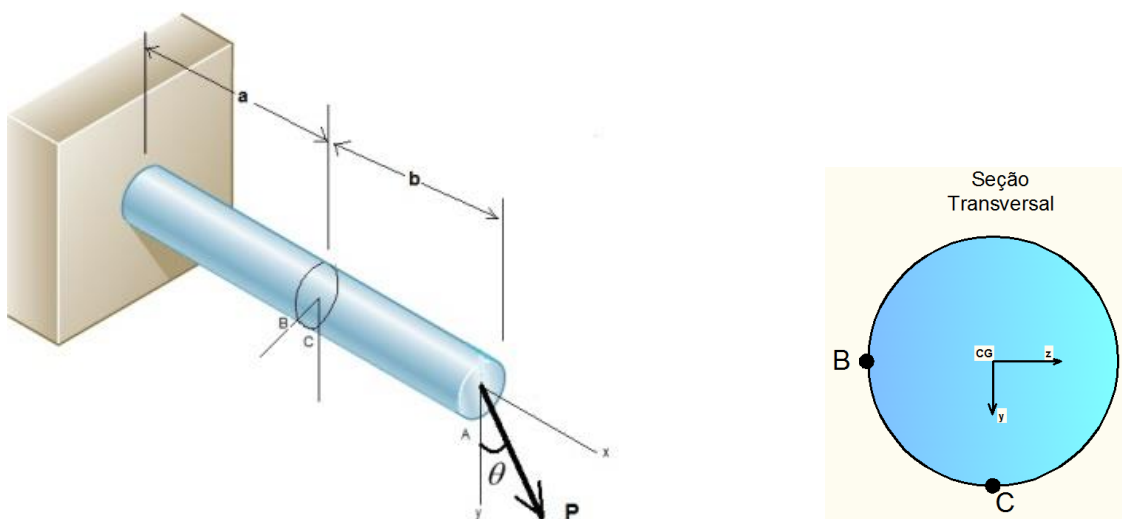
Respostas:

29. O poste é engastado no solo e tem uma força concentrada aplicada no ponto indicado na figura. Seu valor é devido ao peso dos cabos de energia elétrica de $P = 5\text{ kN}$, de modo a estar atuando no seu plano médio, inclinado com a vertical em um ângulo de $\theta = 30^\circ$. A seção transversal (ST) de todo o poste é indicada. A força P e as cotas das distâncias R e L estão com referência ao CG da ST. Adote $C = 1,0\text{m}$, $R = 1,5\text{m}$, $L = 2,5\text{m}$, $e = 12\text{ mm}$, $d = 50\text{mm}$, $t = 100\text{mm}$, $h = 150\text{mm}$. Obtenha as tensões normais extremas da ST na cota a C metros do engaste.



Resposta: $\sigma_{tração} =$ $\sigma_{compressão} =$

30. A viga engastada e a força $P = 800\text{ N}$ estão contidas no plano xy . A força P forma um ângulo de $\theta = 30^\circ$ com y . A seção transversal é circular maciça com diâmetro de 40 mm . Obtenha as tensões normais nos pontos B e C , de uma seção que está a $a = 150\text{ mm}$ do engaste. Adote $b = 200\text{ mm}$. Obtenha também a tensão cisalhante no ponto C .



Resposta:

a) Obter esforços na seção de interesse

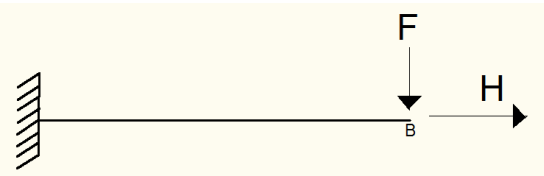
Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

$$F = P \cdot \cos(\theta) = 692,82 \text{ N}; H = P \cdot \sin(\theta) = 400 \text{ N}$$

Na seção a 150 mm do engaste, os esforços são:

$$N = 400 \text{ N (T)}$$

$$M_z = - 692,82 \cdot 200 = - 138.564,1 \text{ N.mm (tracionando as fibras superiores da seção em a=150mm)}$$



b) Características geométricas:

$$\text{Área da seção: } A = 1.256,64 \text{ mm}^2$$

$$\text{Momento de inércia: } I_z = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 125.663,71 \text{ mm}^4$$

c) Análise de tensões

Fórmula da flexão composta:

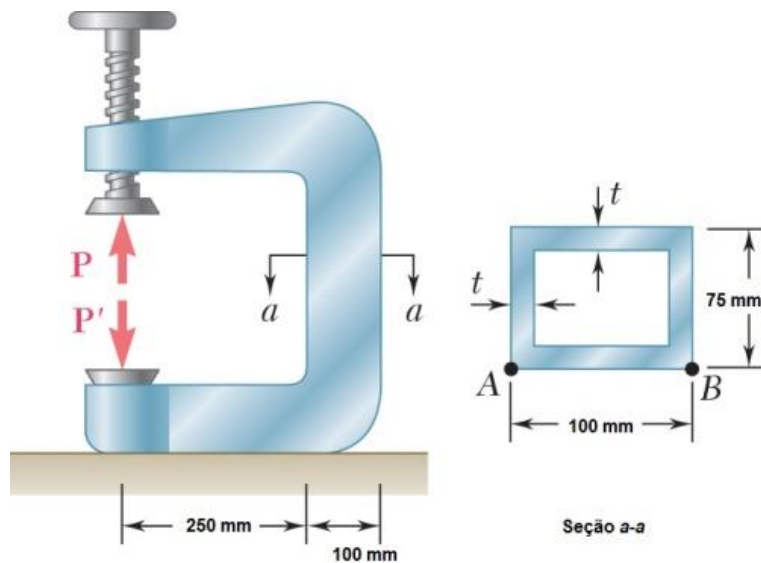
$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{N}{A}$$

$$\sigma_C = \frac{(-138.564,1) \cdot 20}{125.663,71} + \frac{400}{1.256,64} = -21,7 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{(-138.564,1) \cdot 0}{125.663,71} + \frac{400}{1.256,64} = 0,32 \text{ N/mm}^2$$

31. A parte vertical da prensa é composta de um tubo retangular de espessura $t = 13 \text{ mm}$. A prensa foi usada para prender blocos de madeira que estavam colados, com força de $P = 27 \text{ kN}$, determine a tensão (a) no ponto A e (b) no ponto B.

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



Resposta:

d) Obter esforços na seção de interesse $a-a$:

$$N = P = 27 \text{ kN} ;$$

$M_y = - P \cdot e$ (tracionando as fibras do lado esquerdo da seção)

“ e ” é a excentricidade entre o ponto de aplicação de P e o CG da seção:

$$e = 250 + 50 = 300 \text{ mm}$$

$M_y = - 27.300 = - 8100 \text{ kN}\cdot\text{mm}$ (tracionando as fibras do lado esquerdo da seção)

e) Características geométricas:

$$\text{Área da seção: } A = 100 \cdot 75 - (100 - 26) \cdot (75 - 26) = 3874 \text{ mm}^2$$

$$\text{Momento de inércia: } I_y = \frac{75 \cdot 100^3}{12} - \frac{(75 - 26) \cdot (100 - 26)^3}{12} = 4.595.335,33 \text{ mm}^4$$

f) Análise de tensões

Fórmula da flexão composta:

$$\sigma = \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{N}{A}$$

$$\sigma_A = \frac{(-8.100) \cdot (-50)}{4.595.335,33} + \frac{27}{3.874} = 0,088133 + 0,006970 = 0,095103 \text{ kN/mm}^2$$

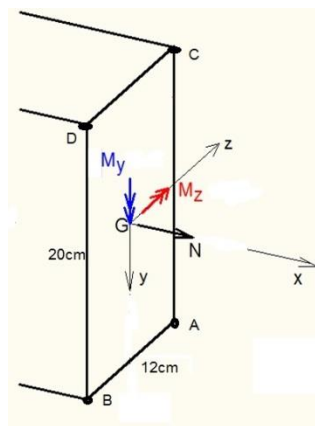
$$\sigma_A = 95,1 \text{ MPa}$$

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

$$\sigma_B = \frac{(-8.100) \cdot (50)}{4.595.335,33} + \frac{27}{3.874} = -0,088133 + 0,006970 = -0,081163 \text{ kN/mm}^2$$

$$\sigma_B = -81,2 \text{ MPa}$$

32. A seção retangular de uma viga está sujeita aos momentos fletores e normal conforme sentidos indicados no desenho. Dados: $M_z = 8000 \text{ N.cm}$; $M_y = 5760 \text{ N.cm}$; $N = 480 \text{ N}$; $I_{zcg} = 8000 \text{ cm}^4$; $I_{ycg} = 2880 \text{ cm}^4$; largura de 12 cm e altura de 20 cm. Obter as tensões normais, respectivamente, nos pontos A, B, CG, C.



Respostas:

$$\sigma_A = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{N}{A} = \frac{-8000 \cdot 10}{8000} + \frac{5760 \cdot 6}{2880} + \frac{480}{240} = -10 + 12 + 2 = 4 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_B = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{N}{A} = \frac{-8000 \cdot 10}{8000} + \frac{5760 \cdot (-6)}{2880} + \frac{480}{240} = -10 - 12 + 2 = -20 \text{ N/cm}^2$$

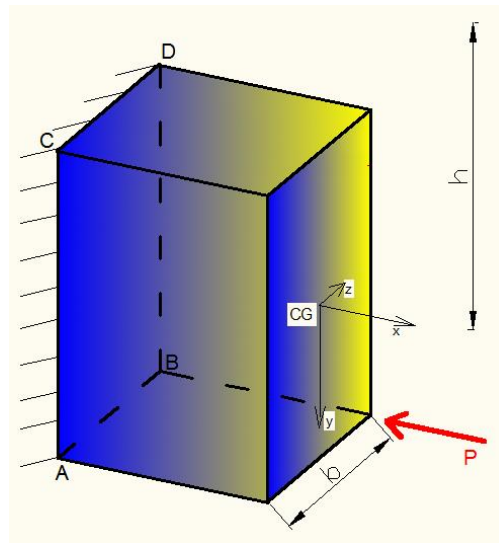
$$\sigma_{CG} = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{N}{A} = \frac{-8000 \cdot 0}{8000} + \frac{5760 \cdot 0}{2880} + \frac{480}{240} = 0 + 0 + 2 = 2 \text{ N/cm}^2$$

$$\sigma_C = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{N}{A} = \frac{-8000 \cdot (-10)}{8000} + \frac{5760 \cdot 6}{2880} + \frac{480}{240} = 10 + 12 + 2 = 24 \text{ N/cm}^2$$

33. A viga a seguir está sujeita a uma força de $P = 40 \text{ kN}$ aplicada em um dos vértices de sua seção transversal retangular, conforme figura. Essa força é paralela ao eixo x da viga. Obter os valores das tensões normais nos pontos A, B, C e D. A largura da viga é $b = 0,4 \text{ m}$, e sua altura é $h = 0,8 \text{ m}$.

Resposta:

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



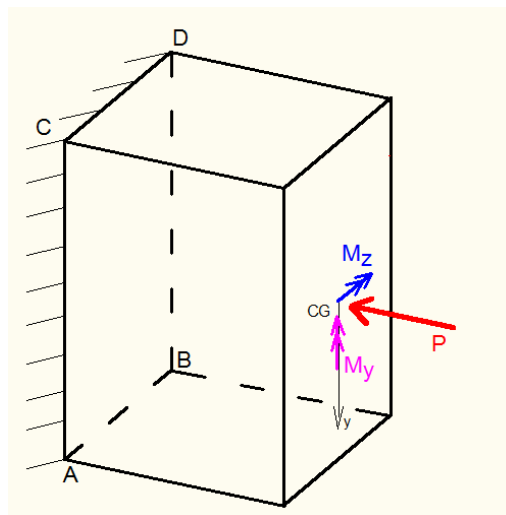
a. Determinar os esforços com relação ao CG da seção transversal ABCD.

$N = -P$ (compressão)

$M_y = -P.b/2$ (traciona o lado negativo de z)

$M_z = -P.h/2$ (traciona o lado negativo de y)

$N = -40 \text{ kN}$; $M_y = -8 \text{ kN.m}$; $M_z = -16 \text{ kN.m}$;



b. Obter características geométricas:

Área da seção: $A = b.h = 0,32 \text{ m}^2$

Os momentos de inércia da seção retangular em relação ao seu CG são: $I_z = \frac{b.h^3}{12} = \frac{0,4.0,8^3}{12} = 0,017067 \text{ m}^4$

$I_y = \frac{h.b^3}{12} = \frac{0,8.0,4^3}{12} = 0,004267 \text{ m}^4$

c. Obtenção das tensões. Como a seção tem um eixo de simetria, pode-se usar diretamente a fórmula da flexão oblíqua. Levar em consideração os sinais dos esforços e coordenadas de cada posição da fibra em análise.

$$\sigma = \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot z}{I_y} + \frac{N}{A}$$

$$\sigma_A = \frac{-16 \cdot 0,4}{0,017067} + \frac{(-8) \cdot (-0,2)}{0,004267} + \frac{(-40)}{0,32} = -375 + 375 - 125 = -125 \text{ kN}$$

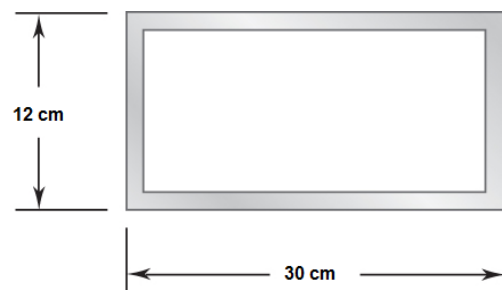
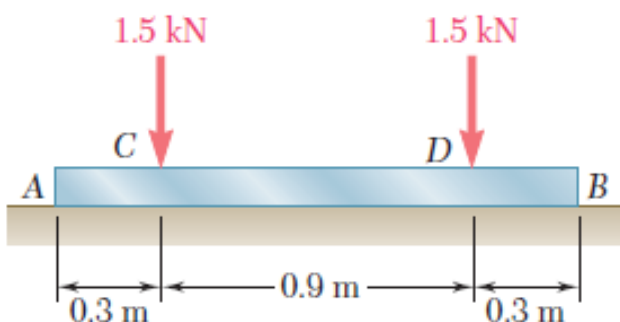
$$\sigma_B = \frac{-16 \cdot 0,4}{0,017067} + \frac{(-8) \cdot (0,2)}{0,004267} + \frac{(-40)}{0,32} = -375 - 375 - 125 = -875 \text{ kN}$$

$$\sigma_C = \frac{-16 \cdot (-0,4)}{0,017067} + \frac{(-8) \cdot (-0,2)}{0,004267} + \frac{(-40)}{0,32} = 375 + 375 - 125 = 625 \text{ kN}$$

$$\sigma_D = \frac{-16 \cdot (-0,4)}{0,017067} + \frac{(-8) \cdot (0,2)}{0,004267} + \frac{(-40)}{0,32} = 375 - 375 - 125 = -125 \text{ kN}$$

34. Para a viga baldrame ACDB que está totalmente apoiada no solo deformável, assumindo que a reação do solo é uniformemente distribuída sobre ela e que sua seção transversal seja a indicada na figura, onde a espessura é constante de 10 mm. Obtenha:

- Diagrama de esforço cortante e momento fletor;
- Tensão de tração e compressão máximas, indicando onde elas ocorrem;

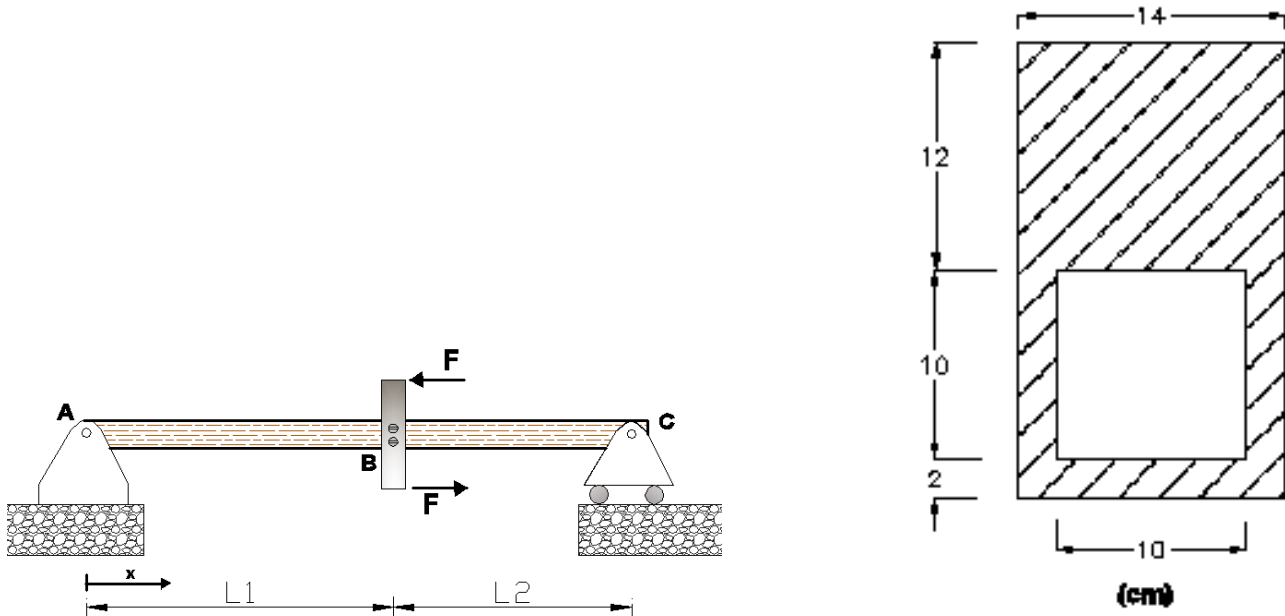


Seção Transversal

Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

35. Para a viga da figura, com a seção transversal e seu material com o diagrama tensão-deformação indicado. Sabe-se que o binário de forças atua na barra rígida em B, que tem comprimento de 500 mm, com $F = 400$ kN, $L_1 = 3$ m, $L_2 = 1$ m. Determinar:

- Diagramas de esforços;
- As tensões normais máximas de tração e compressão.

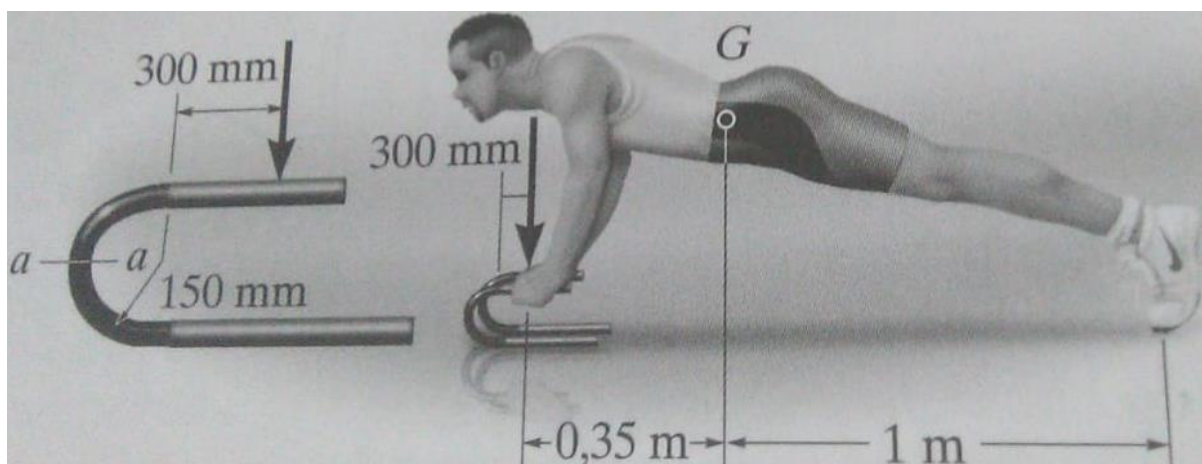


a) Viga sob ação de binário.

b) Seção transversal da viga.

Respostas:

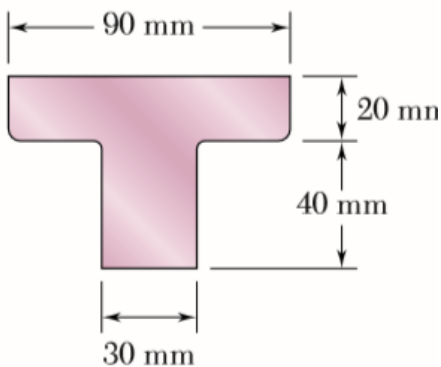
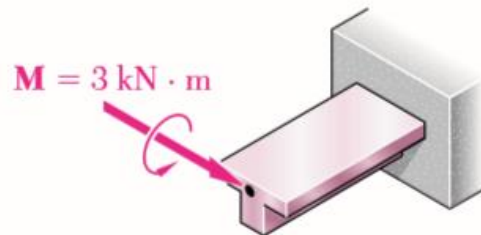
36. O homem tem massa de 100 kg e centro de massa em G. Se ele mantiver na posição mostrada na figura, determine a tensão de tração e compressão máximas desenvolvidas na seção $a-a$ da barra curva. Ele é suportado uniformemente **pelas duas barras, uma mão em cada barra**, e cada uma delas tem diâmetro de 25 mm. Considere que o piso é liso. Adote a aceleração da gravidade de 10 m/s^2 . Para seção circular maciça, o momento de inércia com relação ao centroide é $I_c = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$, com d sendo o diâmetro.



Resposta:

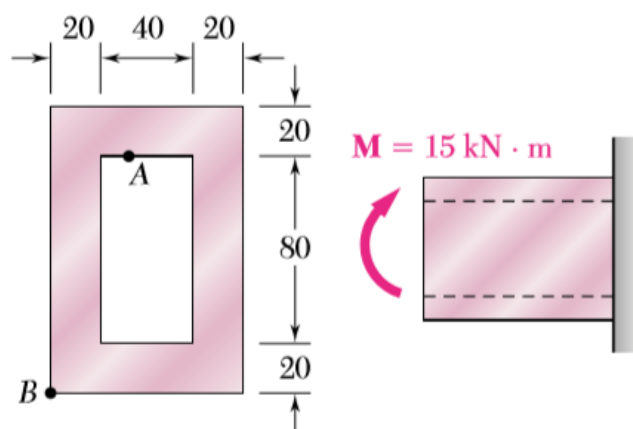
37. (Beer)

Uma peça de máquina feita de ferro fundido está submetida a um momento fletor de $3 \text{ kN} \cdot \text{m}$ conforme mostra a figura. Sabendo que $E = 165 \text{ GPa}$ e desprezando o efeito dos adocamentos, determine (a) as tensões de tração e compressão máximas na peça fundida e (b) o raio de curvatura dessa peça.



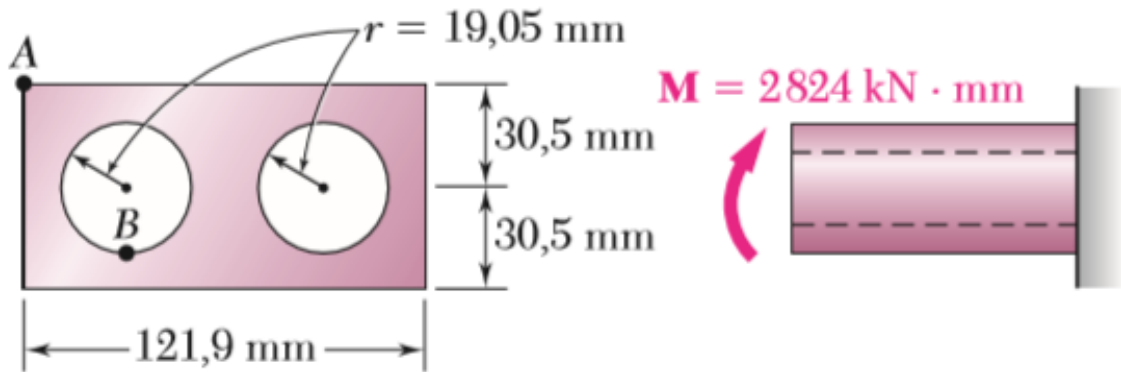
Obs.: O raio de curvatura (ρ) é dado por: $1/\rho = M/(EI)$

38. (Adaptado de Beer) Obtenha a tensão no ponto A e B.

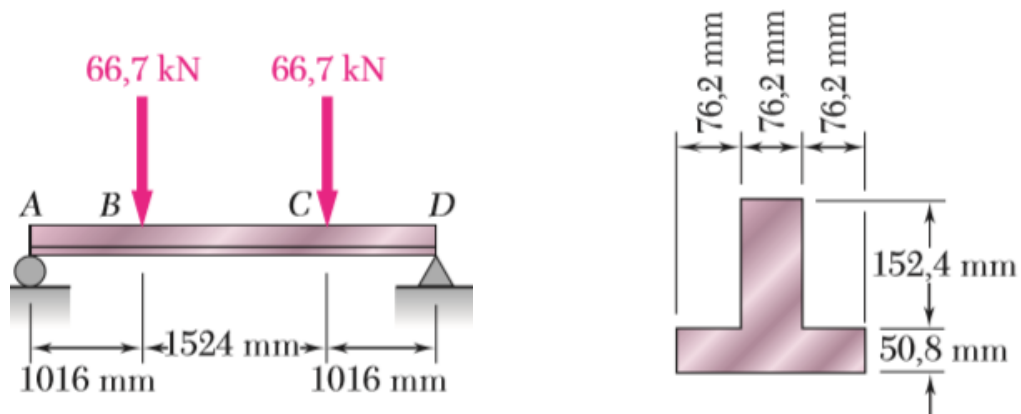


Dimensões em mm

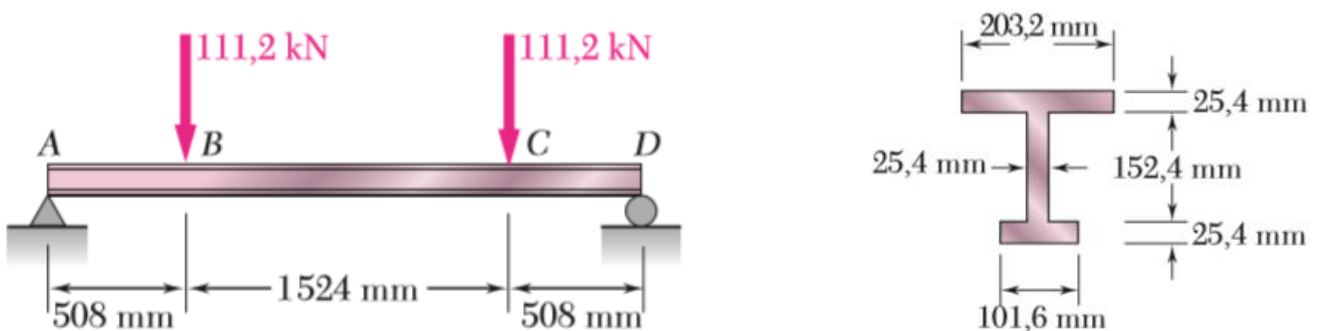
39. (Adaptado de Beer) Obtenha a tensão no ponto A e B.



40. (Beer) Duas forças verticais são aplicadas à viga com a seção transversal mostrada na figura. Determine as tensões de tração e de compressão máximas na parte BC da viga.

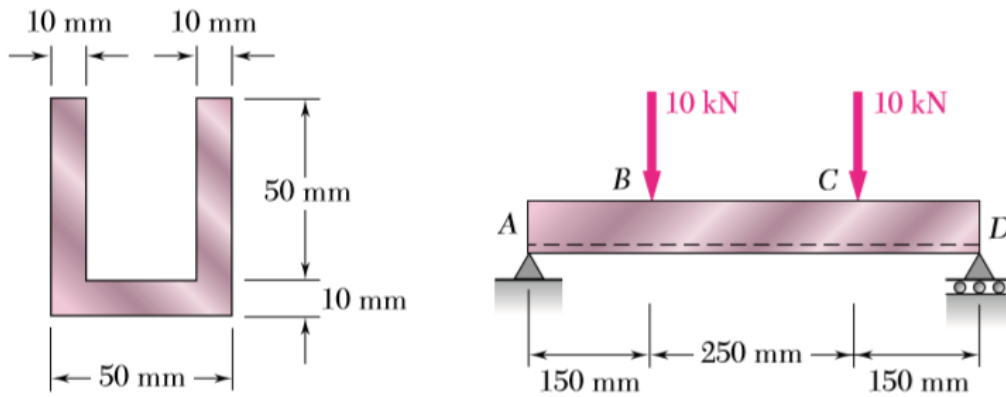


41. (Beer) Duas forças verticais são aplicadas à viga com a seção transversal mostrada na figura. Determine as tensões de tração e de compressão máximas na parte BC da viga.

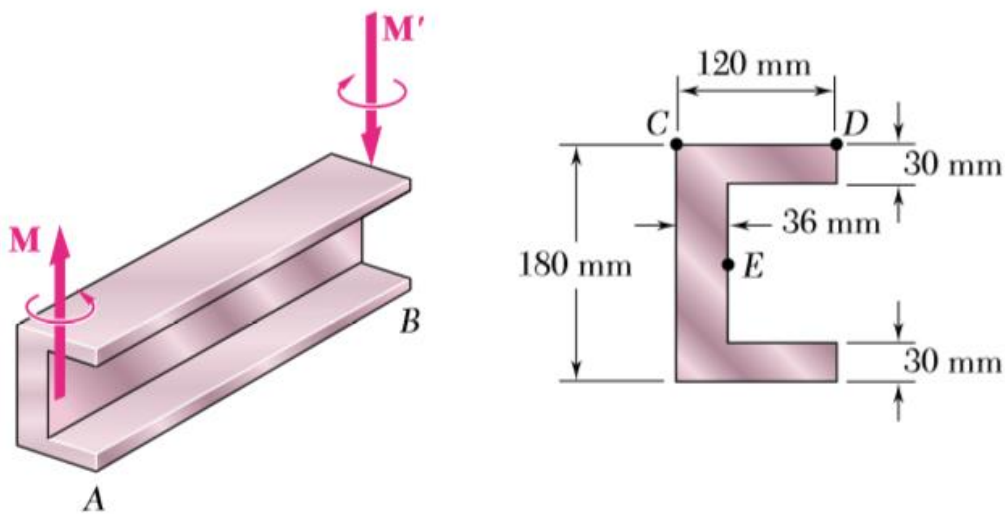


Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

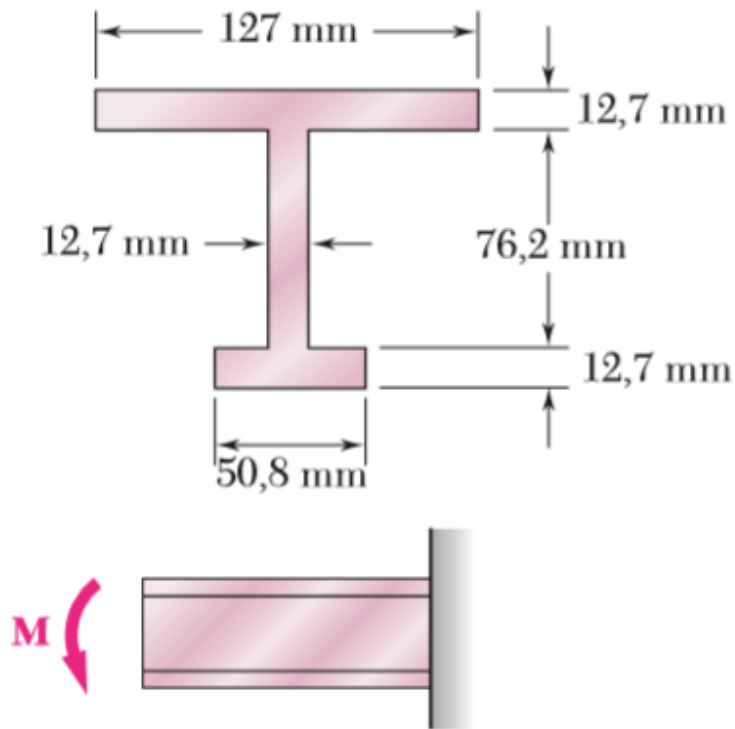
42. (Beer) Duas forças verticais são aplicadas à viga com a seção transversal mostrada na figura. Determine as tensões de tração e de compressão máximas na parte BC da viga.



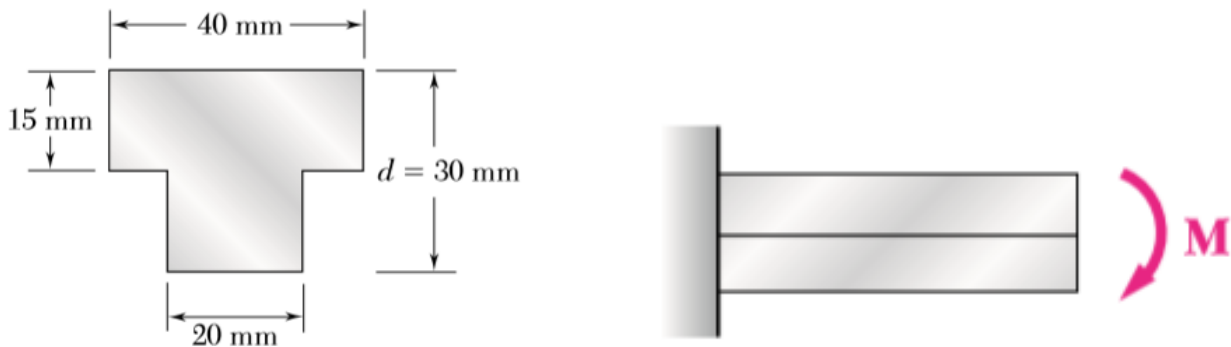
43. (Beer) Dois momentos fletores iguais e opostos de intensidade $M = 25 \text{ kN m}$ são aplicados à viga AB constituída de um perfil U. Observando que fazem a viga flexionar em um plano horizontal, determine a tensão no (a) ponto C, (b) ponto D e (c) ponto E.



44. (Beer) Sabendo que para a peça fundida mostrada na figura as tensões admissíveis na tração e na compressão são, respectivamente, $\sigma_{adm} = + 41,4 \text{ MPa}$ e $\sigma_{adm} = - 103,4 \text{ MPa}$, determine o maior momento fletor M que poderá ser aplicado.



45. (Beer) A viga mostrada na figura é feita de um tipo de náilon para o qual a tensão admissível é de 24 MPa em tração e de 30 MPa em compressão. Determine o maior momento fletor M que pode ser aplicado à viga.

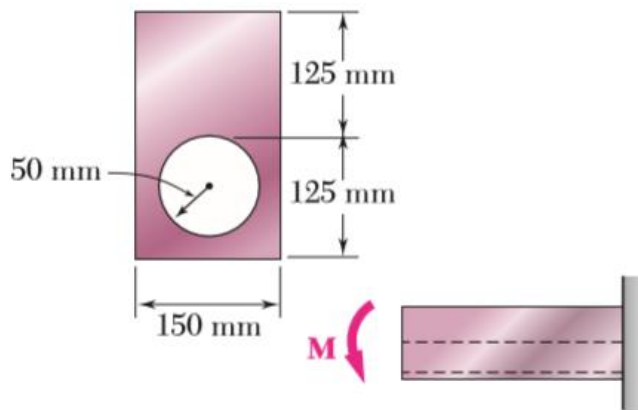


46. (Beer) Sabendo que, para a viga extrudada mostrada na figura, a tensão admissível é de 120 MPa em tração e de 150 MPa em compressão, determine o maior momento fletor M que lhe pode ser aplicado.

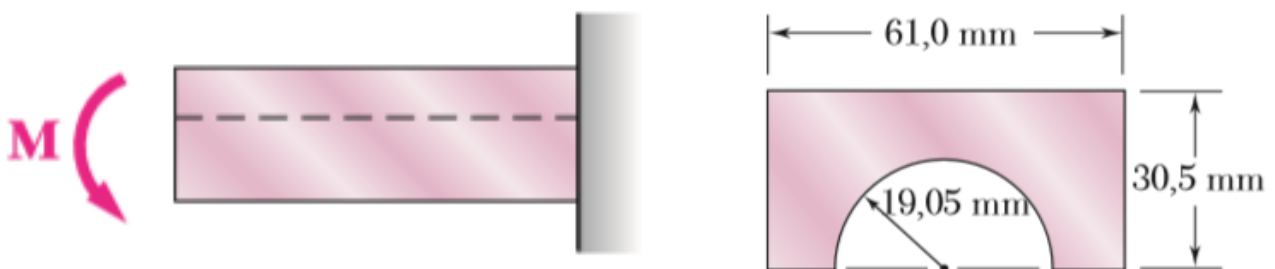
Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA



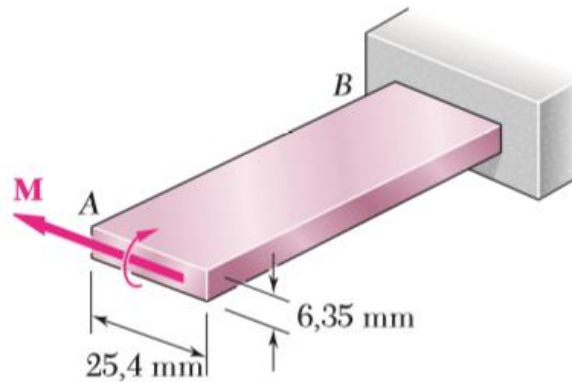
47. (Beer) Sabendo que, para a viga extrudada mostrada na figura, a tensão admissível é de 120 MPa em tração e de 150 MPa em compressão, determine o maior momento fletor M que lhe pode ser aplicado.



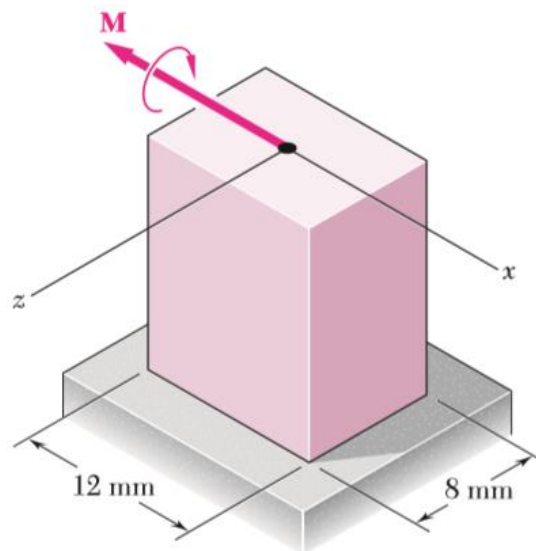
48. (Beer) Sabendo que, para a viga mostrada na figura a tensão admissível é de 82,7 MPa em tração e de 110,3 MPa em compressão, determine o maior momento fletor M que lhe pode ser aplicado.



49. (Beer) Sabendo que $\sigma_{adm} = 164$ MPa para a barra de aço AB, determine (a) o maior momento fletor M que pode ser aplicado e (b) o raio de curvatura correspondente. Use $E = 200$ GPa. Obs.: O raio de curvatura (ρ) é dado por: $1/\rho = M/(EI)$

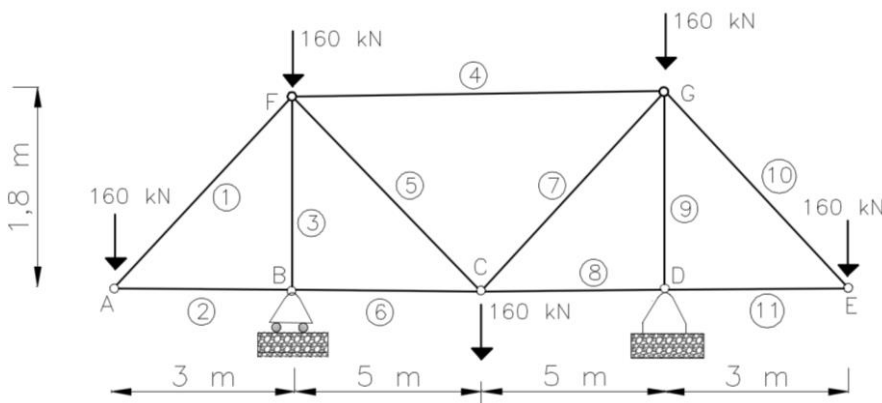
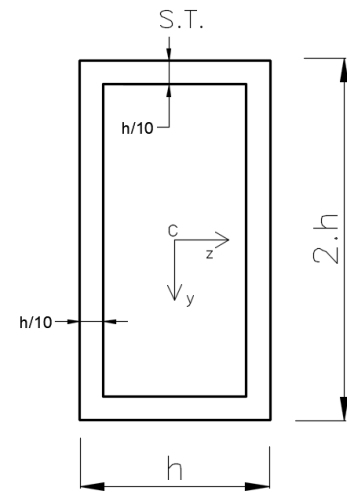
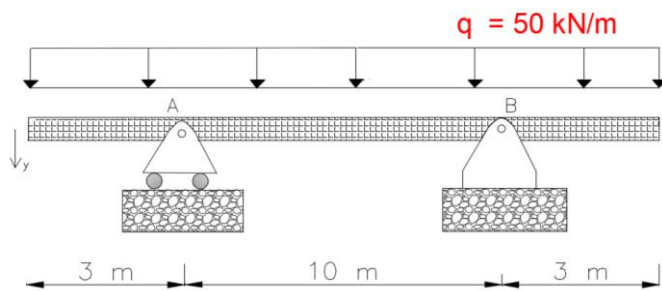


50. Para a barra da figura, determine o máximo valor do momento \$M\$ aplicado, sabendo que a tensão admissível para tração seja de 210 MPa e de compressão de 250 MPa. Para esse valor máximo de \$M\$, e considerando que \$E = 200\$ GPa, obtenha o seu raio de curvatura. O raio de curvatura (\$\rho\$) é dado por: \$1/\rho = M/(EI)\$.



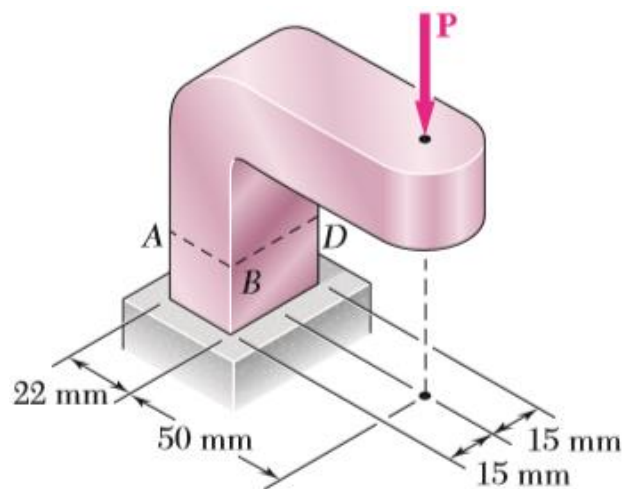
51. Para construir uma ponte, duas possibilidades são idealizadas. A primeira, a viga bi-apoiada com balanços e a segunda uma treliça. Considere para ambas a seção transversal vazada indicada e as tensões admissíveis de 300 MPa e 200 MPa, respectivamente, para tração e compressão. Obtenha:

- O menor valor admissível de \$h\$ para a viga;
- O menor valor admissível de \$h\$ para as barras da treliça, considere uma única possibilidade de seção para todas barras;
- A razão entre os volumes totais (\$V_b/V_a\$) obtidos para ambos os projetos dos itens a) e b);
- Otimizando as seções da treliça, usando \$h\$ diferentes para cada barra, obtenha a razão entre os volumes totais da treliça e da viga: \$V_b/V_a\$.



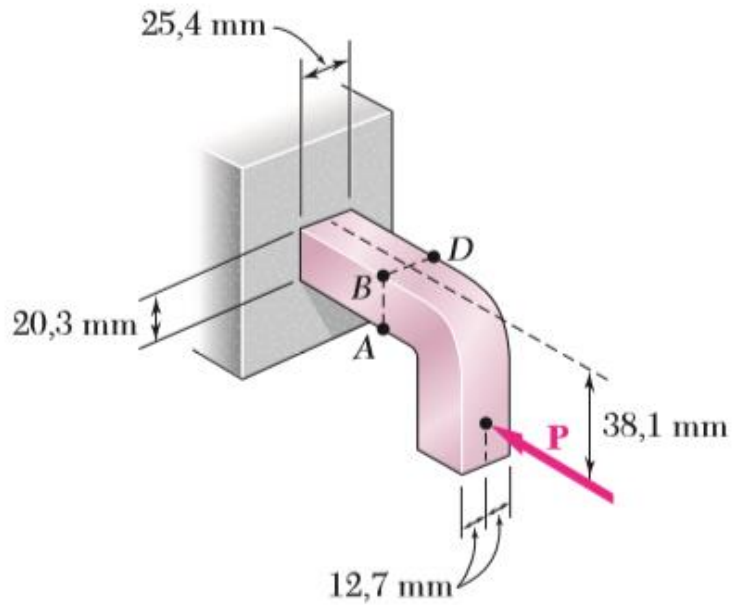
Resposta:

52. (Beer J.) Sabendo que a força P vertical tem intensidade de 2 kN, determine a tensão no (a) ponto A e (b) ponto B.

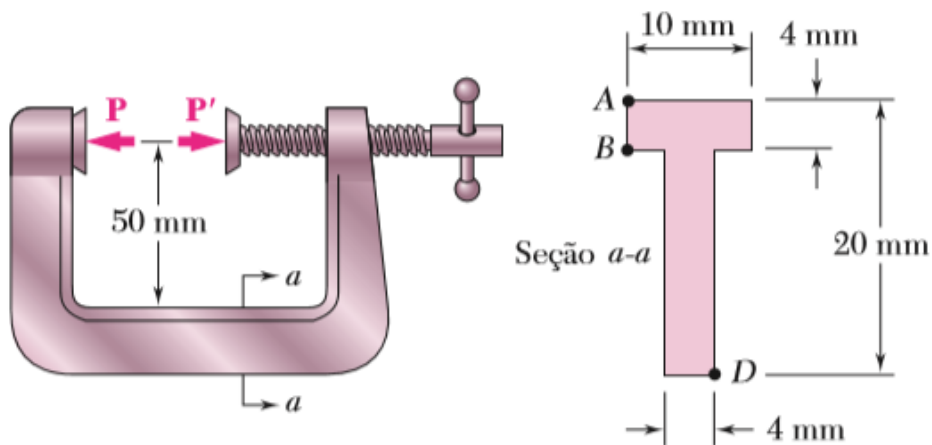


Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

53. (Beer J.) Sabendo que a tensão admissível na seção ABD é de 69 MPa, determine a máxima intensidade da força horizontal P a ser aplicada ao suporte mostrado.

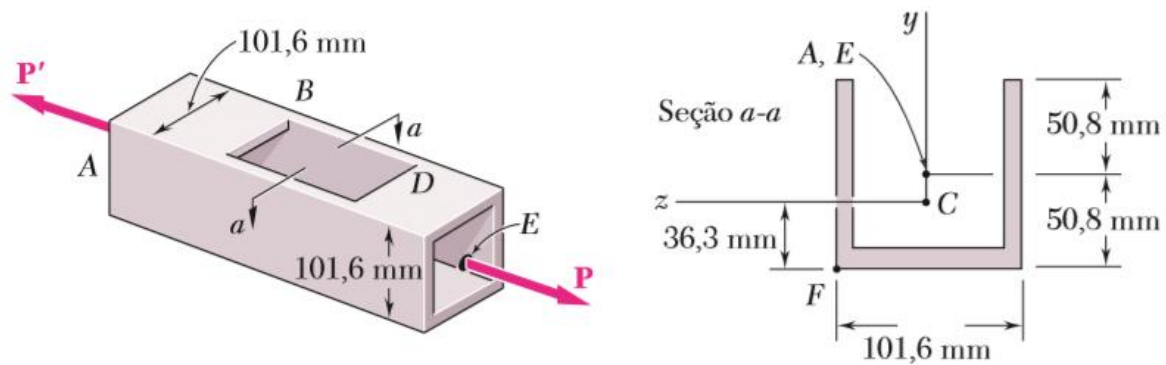


54. (Beer J.) Sabendo que o grampo mostrado na figura foi usado para prensar pranchas de madeira que estão sendo coladas até $P = 400$ N, determine na seção a-a (a) a tensão no ponto A, (b) a tensão no ponto D e (c) a localização da linha neutra.

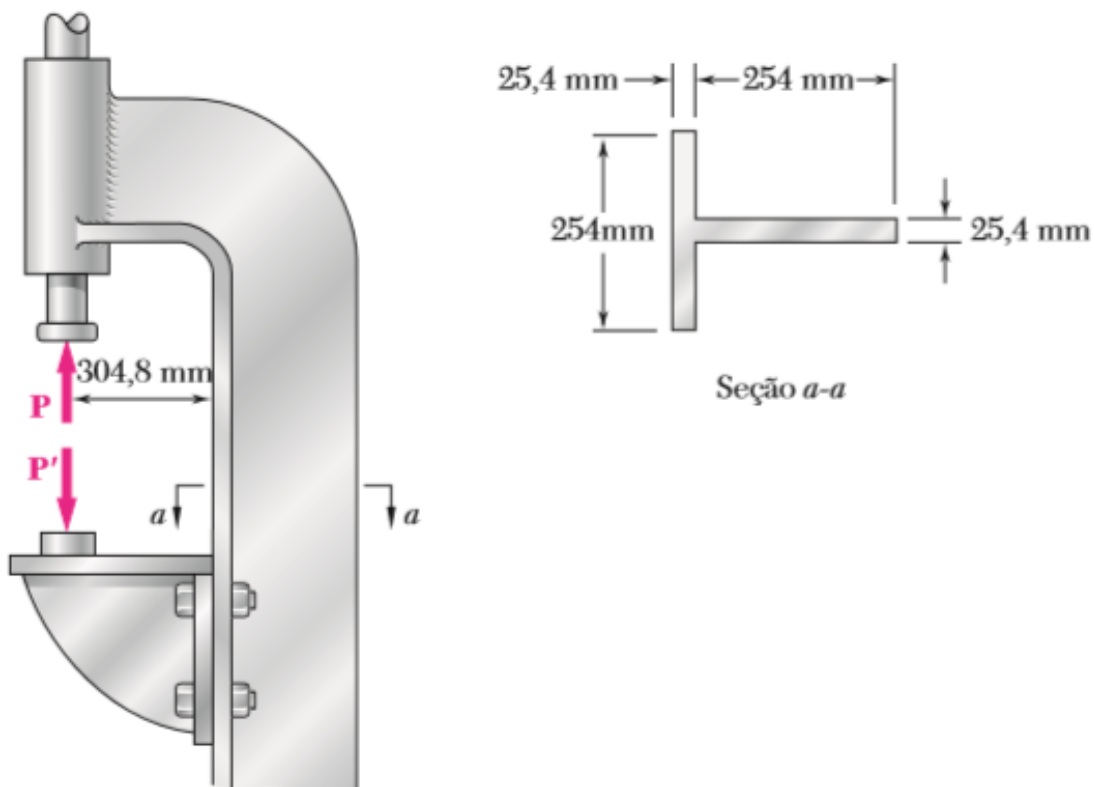


55. (Beer J.)

Para possibilitar o acesso ao interior de um tubo quadrado vazado de 6,35 mm de espessura na parede, a parte BD de um lado do tubo foi removida. Sabendo que o carregamento do tubo é equivalente a duas forças iguais e opostas de 66,7 kN atuando nos centros geométricos A e E das extremidades do tubo, determine (a) a tensão máxima na seção $a-a$, (b) a tensão no ponto F . *Dados:* o centroide da seção transversal está em C e $I_z = 2,0 \times 10^6 \text{ mm}^4$.



56. (Beer J.) Sabendo que a tensão admissível na seção $a-a$ da prensa hidráulica mostrada na figura é de 41,4 MPa em tração e de 82,7 MPa em compressão, determine a maior força P que pode ser aplicada pela prensa.



Exercícios de flexão pura composta e oblíqua - Departamento de Estruturas e Geotécnicas- USP - Prof. Valério SA

57. (Beer J.) As quatro barras mostradas na figura têm a mesma área de seção transversal. Para os carregamentos dados, mostre que (a) as tensões de compressão máximas estão na relação 4:5:7:9 e (b) as tensões de tração máximas estão na relação 2:3:5:3. (Sugestão: a seção transversal de uma barra triangular é um triângulo equilátero.)

