PEF – 3202 – Introdução à Mecânica dos Sólidos

Prof. Dr. Rodrigo Provasi

e-mail: provasi@usp.br

Sala 11 – Prédio de Engenharia Civil

Figuras Planas

Introdução

- Porque estudarmos as propriedades das figuras planas?
  - As tensões podem ser escritas em função do esforço solicitante e de alguma propriedade da seção transversal
  - Essas podem ser áreas e momentos de inércia de áreas

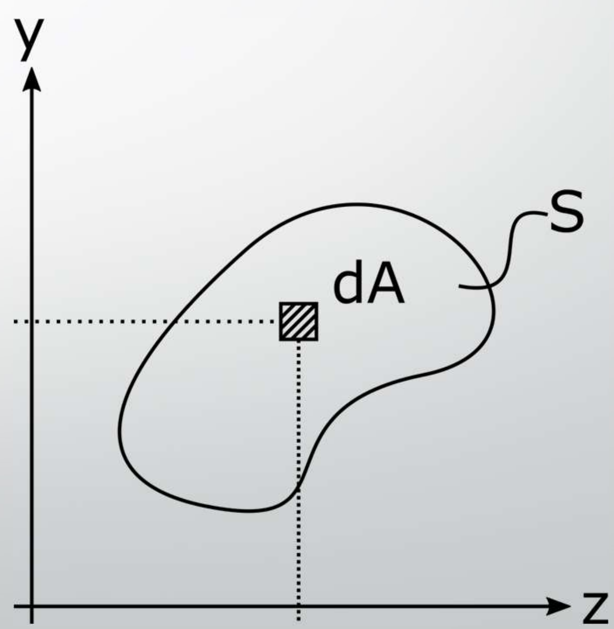
$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \sigma = \frac{M}{I_{z0}} y \quad \tau = \frac{T}{J} r$$

Definições

- Para uma figura plana qualquer, definimos:

- Área da figura S:

$$A = \int_S dA$$

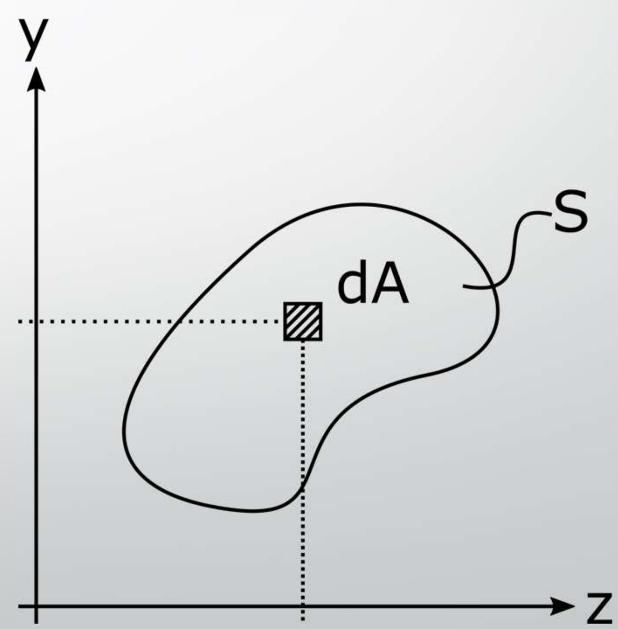


Definições

- Momento estático de S:

$$M_z = \int_S y\, dA\,, em\, relação\, à\, z$$

$$M_y = \int_S z\, dA\,, em\, relação\, à\, y$$

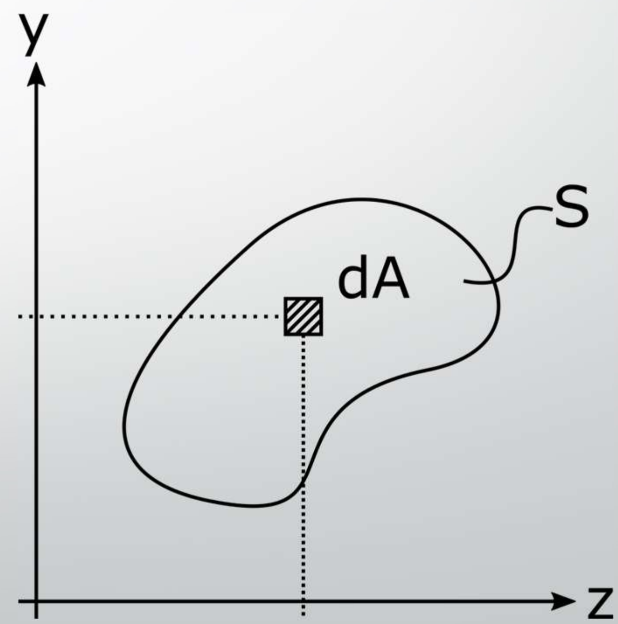


Definições

- Momento de inércia de S:

$$I_z = \int_S y^2 \, dA \, , em \; relação \; à \; z$$

$$I_y = \int_S z^2 \, dA \, , em \; relação \; à \; y$$

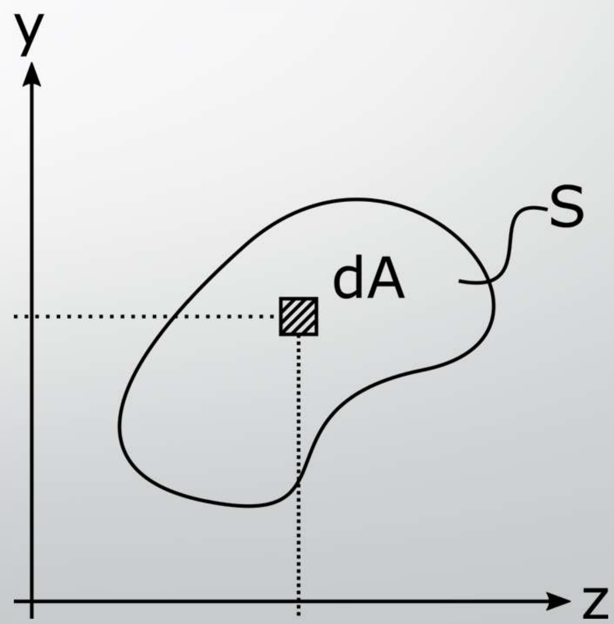


Definições

- Momento polar de inércia de S:

$$J = \int_S r^2 \, dA$$

onde r é a posição radial da área infinitesimal dA,
ou seja $r^2 = y^2 + z^2$.



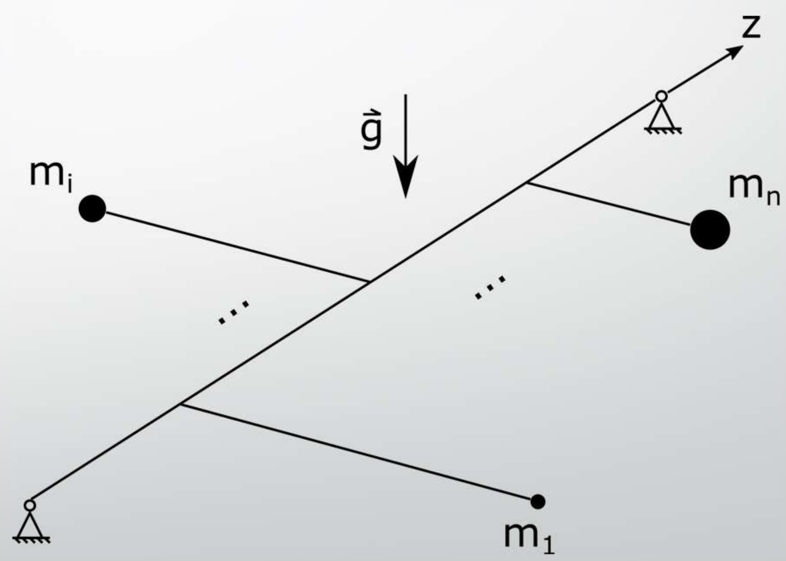
Propriedades do Momento Estático

- Considere o problema da figura.

- Para haver equilíbrio ao redor de z, temos:

$$\sum_i m_i \, \boldsymbol{g} \, d_i = \boldsymbol{0} \rightarrow \sum_i m_i \, d_i = 0$$

Importante: d_i tem sinal!



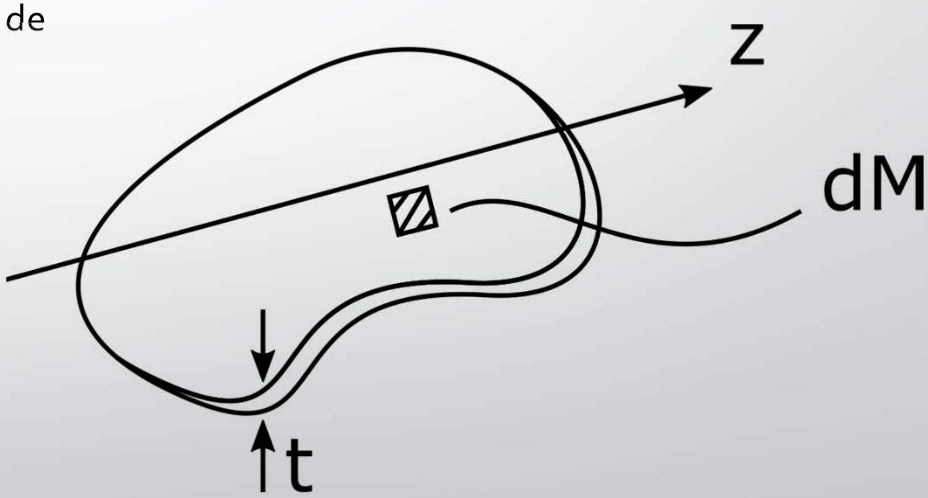
Propriedades do Momento Estático

- Se estendermos o mesmo conceito para um sólido de densidade γ e espessura t constante:

$$\int_S y\, dm = \int_S y\, \gamma\, t\, dA = 0$$

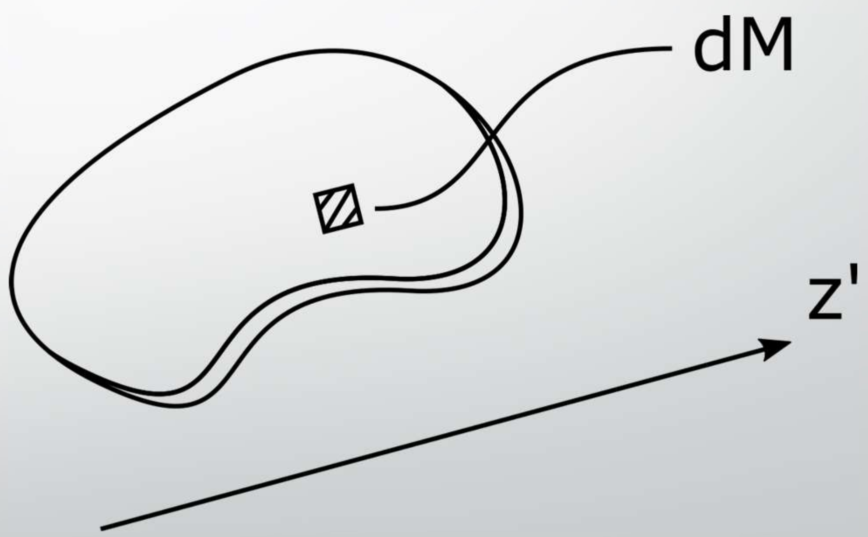
$$\gamma\, t \int_S y\, dA = \gamma\, t\, M_z = 0$$

Logo, para haver equilíbrio: $M_z = 0$

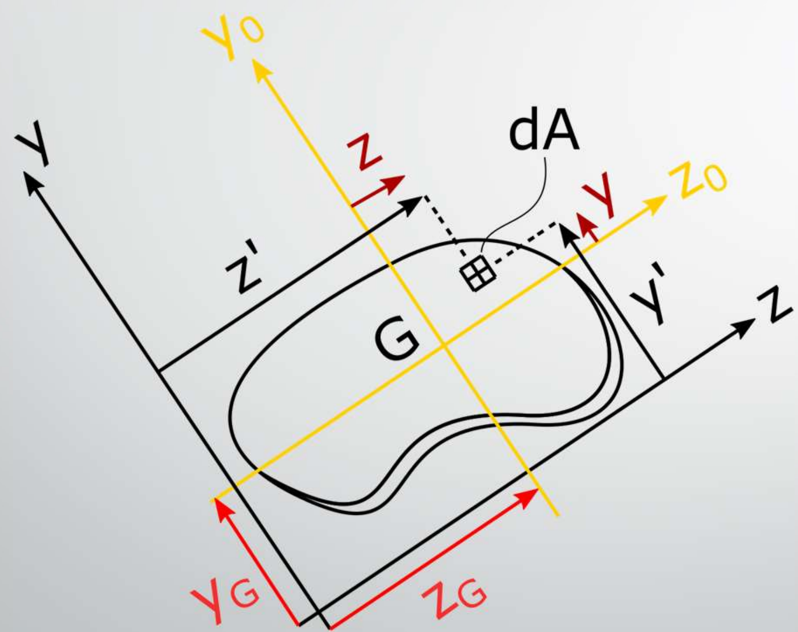


Propriedades do Momento Estático

- Agora, não é todo o eixo que apresenta a propriedade anteriormente descrita.
- É fácil ver na figura que $M_{z'} \neq 0$



Baricentro de uma figura plana

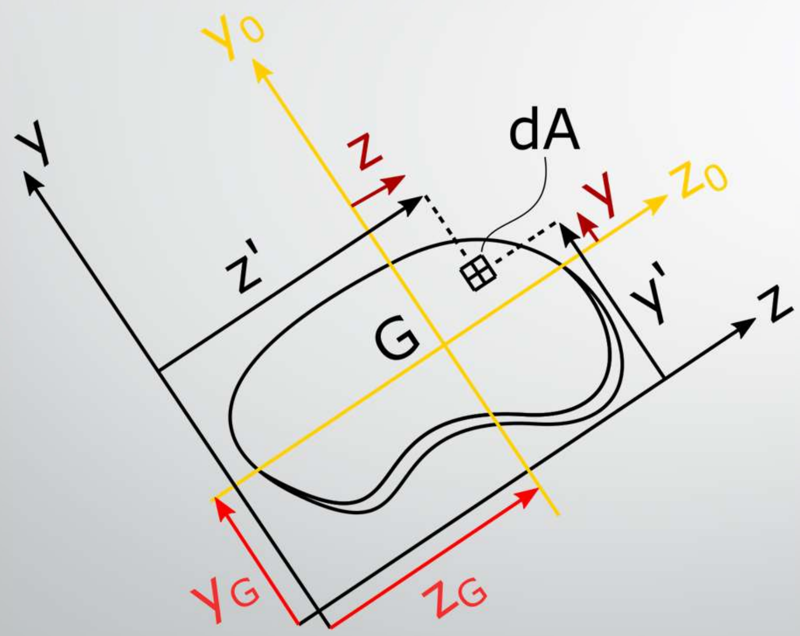


- O baricentro (G) é o centro de massa da figura.
- Por ele passam dois eixos principais que satisfazem:

$$M_{s,z_0} = \int_S y \, dA = 0$$

$$M_{s,y_0} = \int_S z \, dA = 0$$

Baricentro de uma figura plana



- Observando a figura:

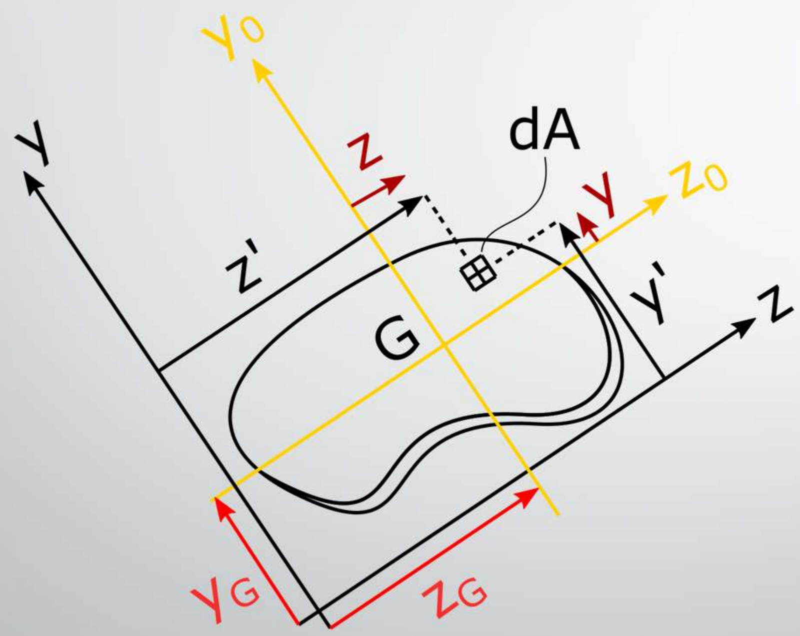
$$y' = y + y_G$$

- Assim, o momento estático em relação ao eixo z pode ser escrito como:

$$M_{s,z} = \int_S y' dA = \int_S (y + y_G)\, dA = \int_S y\, dA + \int_S y_G\, dA$$

$$M_{s,z} = M_{s,z_0} + y_G \int_S dA = y_G A$$

Baricentro de uma figura plana



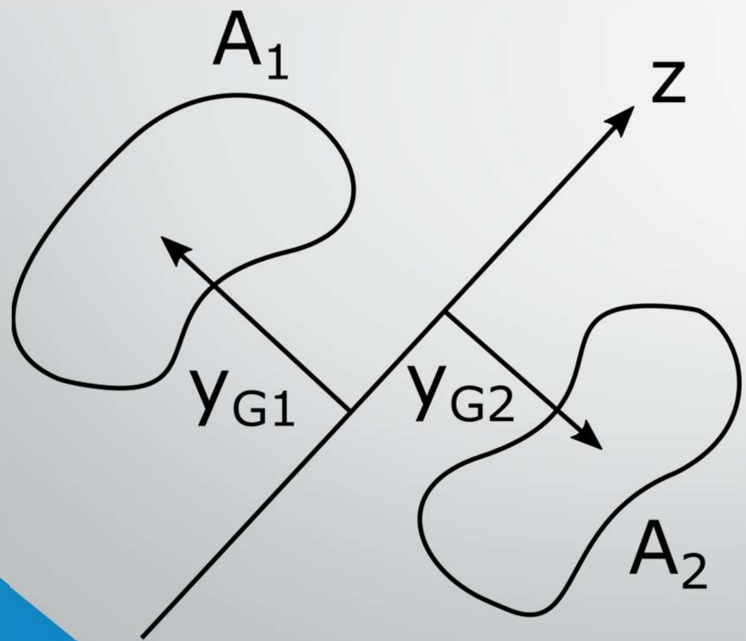
- Logo:

$$y_G = \frac{M_{s,z}}{A}$$

- Analogamente:

$$z_G = \frac{M_{s,y}}{A}$$

Baricentro de figuras compostas



- Para determinar o baricentro de figuras compostas:

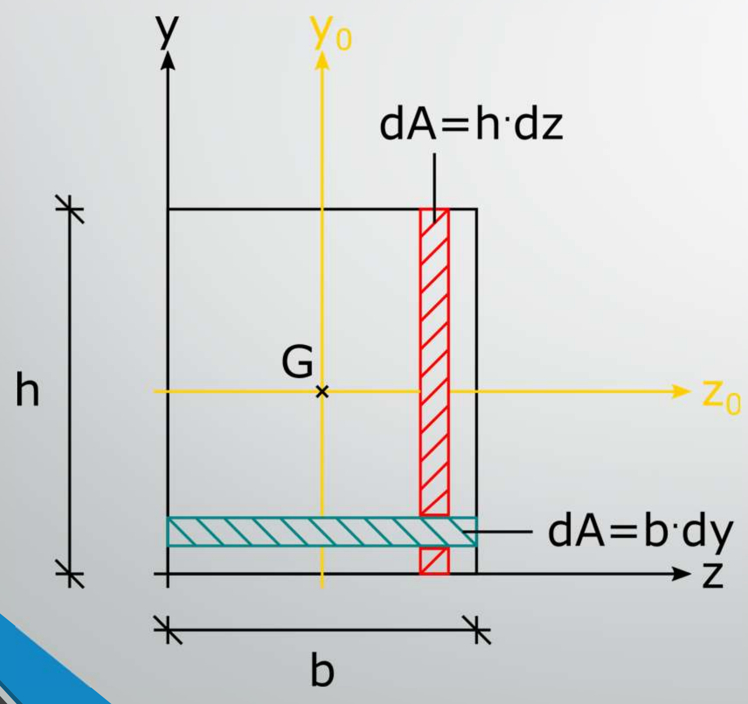
$$M_{s,z}^{total} = \sum_{i=1}^{n} y_{Gi}\, A_i = y_G\, A$$

- Logo:

$$y_G = \frac{M_{s,z}^{total}}{A}$$

com $A = \sum A_i$.

Exemplo: Retângulo



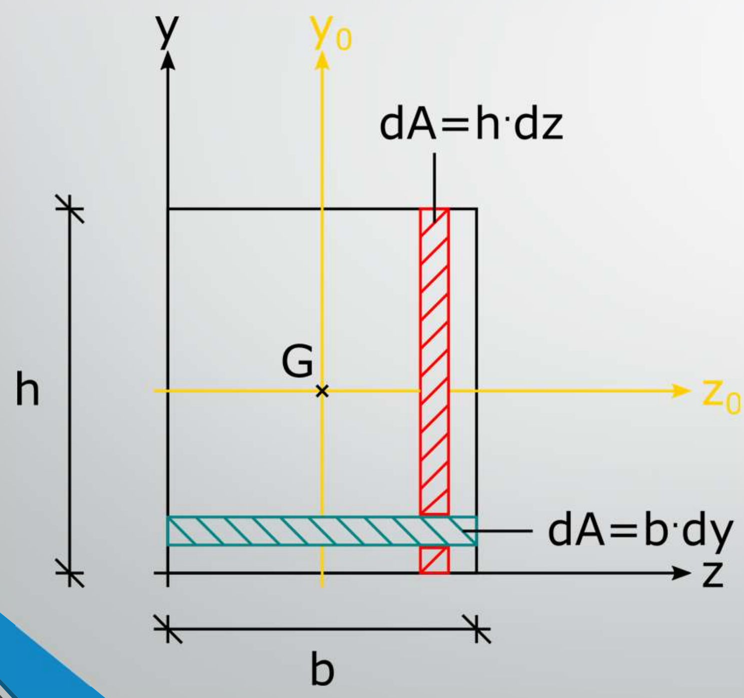
- Vamos fazer os cálculos para determinar o baricentro do retângulo:

$$y_G = \frac{M_{s,z}}{A}, A = b\ h$$

$$M_{s,z} = \int_S y\ dA = \int_0^h y\ b\ dy = b\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h = \frac{b\ h^2}{2}$$

$$y_G = \frac{\frac{b\ h^2}{2}}{b\ h} = \frac{h}{2}$$

Exemplo: Retângulo



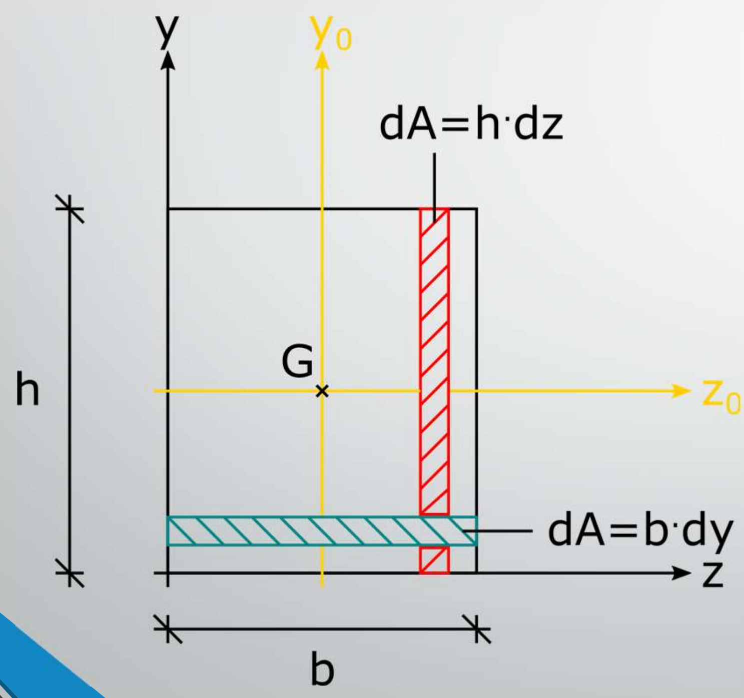
- Agora, para a posição z_G:

$$z_G = \frac{M_{s,y}}{A}, A = b\ h$$

$$M_{s,y} = \int_S z\ dA = \int_0^b z\ h\ dz = h\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^b = \frac{h\ b^2}{2}$$

$$z_G = \frac{\frac{h\ b^2}{2}}{b\ h} = \frac{b}{2}$$

Exemplo: Retângulo



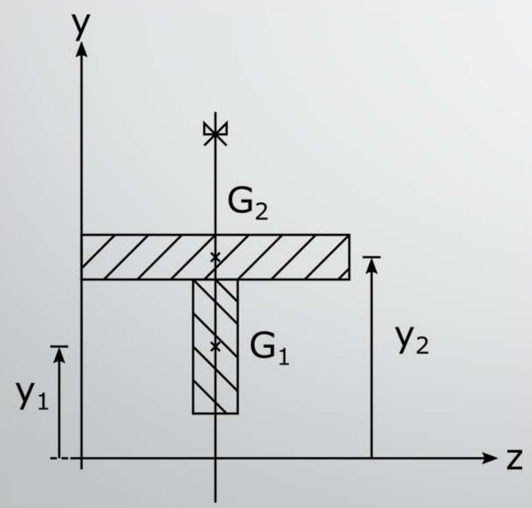
- Para mostrar que o eixo z_0 é o eixo no qual o momento estático é zero:

$$M_{s,z_0} = \int_S y\, dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y\, b\, dy = b \left[\frac{y^2}{2}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

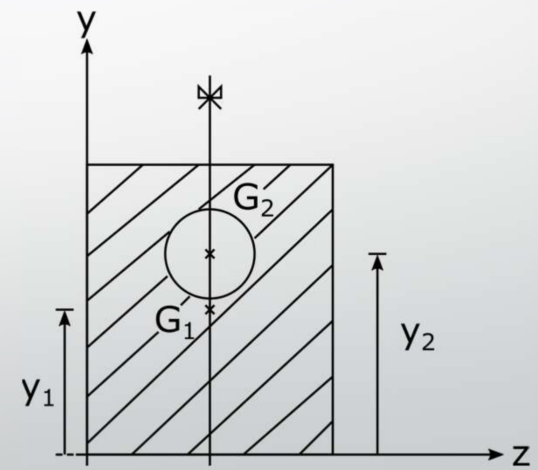
$$M_{s,z_0} = b \left[\frac{1}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{h}{2}\right)^2\right] = 0$$

Baricentro

- Nota importante: o baricentro **sempre** está sobre os eixos de simetria da área!

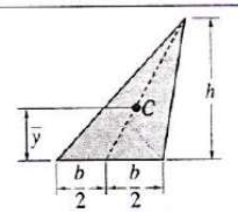
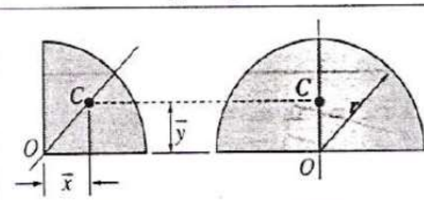


$$y_g = \frac{y_1 A_1 + y_2 A_2}{A_1 + A_2}$$



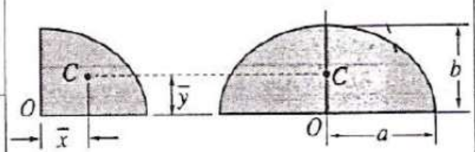
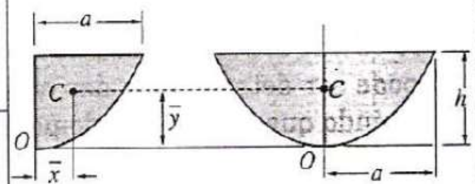
$$y_g = \frac{y_1 A_1 - y_2 A_2}{A_1 - A_2}$$

Baricentro ou centroide

Forma de Superfície		$\bar{x}$	$\bar{y}$	Área
Triângulo			$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarto de círculo		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicírculo		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$

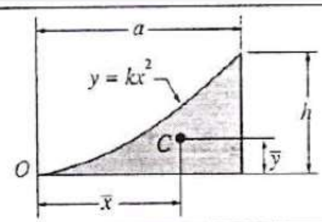
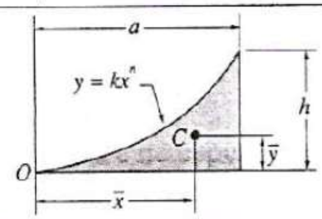
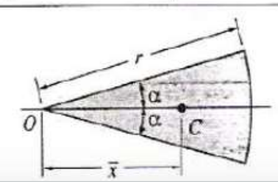
extraído de Beer, F. P. & Johnston Jr., R.

Baricentro ou centroide

Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um quarto de elipse		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Limitada por um segmento de reta e uma semi-elipse		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e uma semiparábola		$\frac{3a}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2ah}{3}$
Limitada por um segmento de reta e uma parábola		0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4ah}{3}$

extraído de Beer, F. P. & Johnston Jr., R.

Baricentro ou centroide

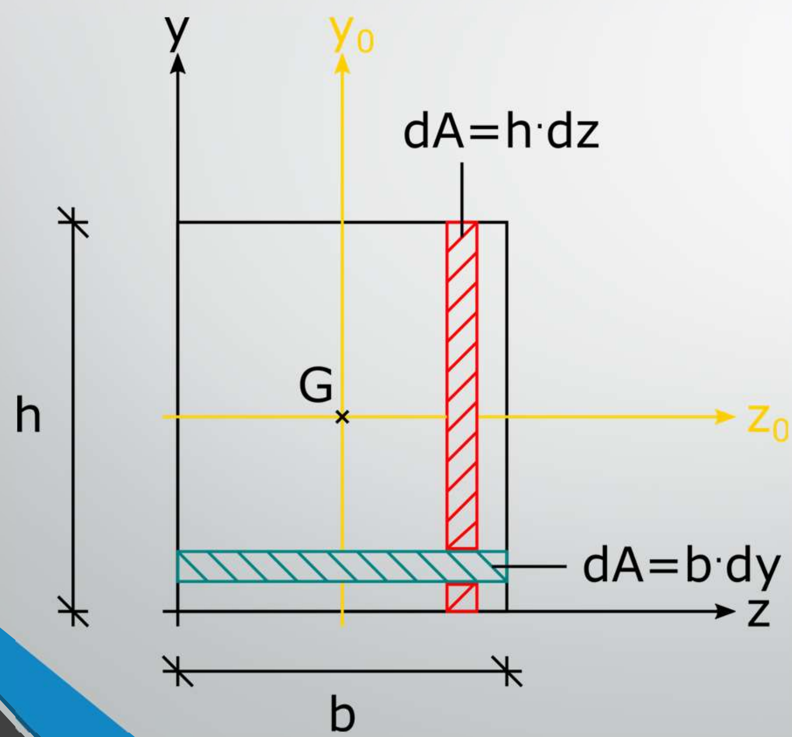
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do 2º grau.		$\dfrac{3a}{4}$	$\dfrac{3h}{10}$	$\dfrac{ah}{3}$
Limitada por dois segmentos de reta perpendiculares e um arco de parábola do grau n.		$\dfrac{n+1}{n+2}a$	$\dfrac{n+1}{4n+2}h$	$\dfrac{ah}{n+1}$
Setor circular		$\dfrac{2r \operatorname{sen} \alpha}{3\alpha}$	0	αr^2

extraído de Beer, F. P. & Johnston Jr., R.

Momentos de Inércia

- Os momentos de inércia são importantes para a flexão → Determinam a rigidez a flexão (com o módulo de elasticidade do material determinam quão rígido uma barra é em relação à Flexão)

Momento de inércia: retângulo

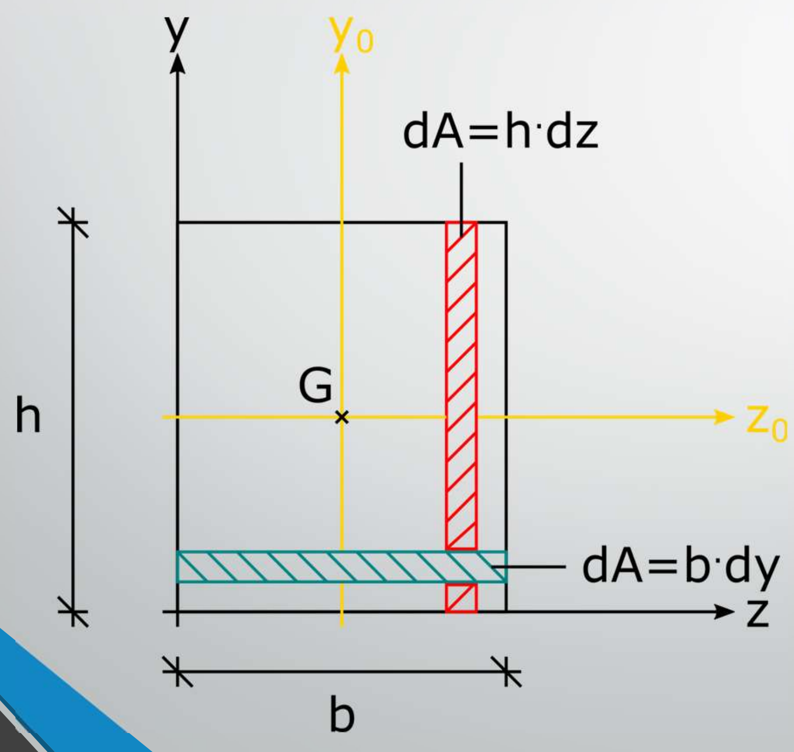


- Para o retângulo que vimos anteriormente, vamos calcular os momentos de inércia em relação aos eixos y e z.

- Para o eixo z:

$$I_z = \int_S y^2 \, dA = \int_0^h y^2 \, b \, dy = b \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{b \, h^3}{3}$$

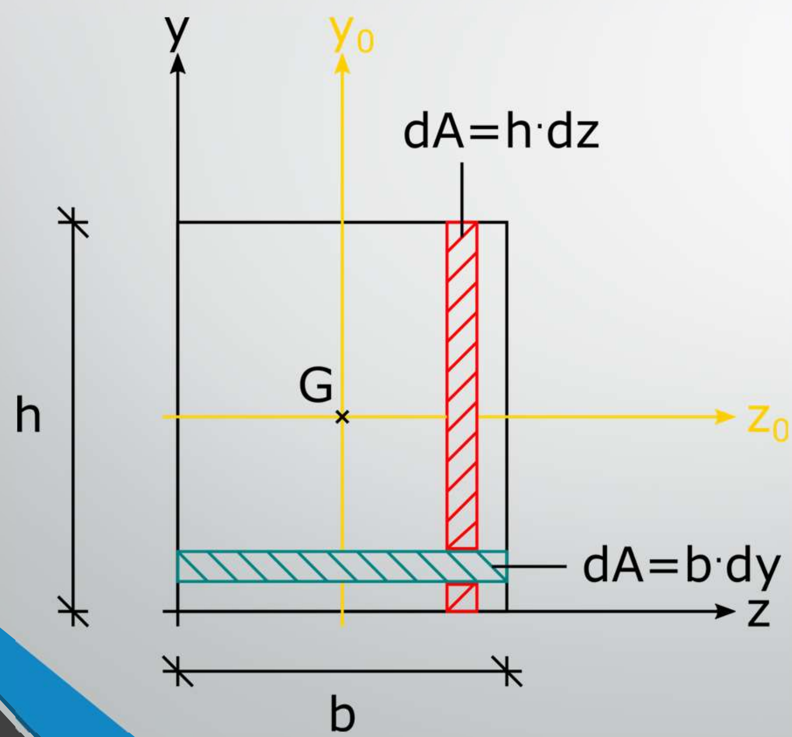
Momento de inércia: retângulo



- Para o eixo y:

$$I_y = \int_S z^2 \, dA = \int_0^b z^2 \, h \, dz = h \left[\frac{z^3}{3}\right]_0^b = \frac{h \, b^3}{3}$$

Momento de inércia: retângulo



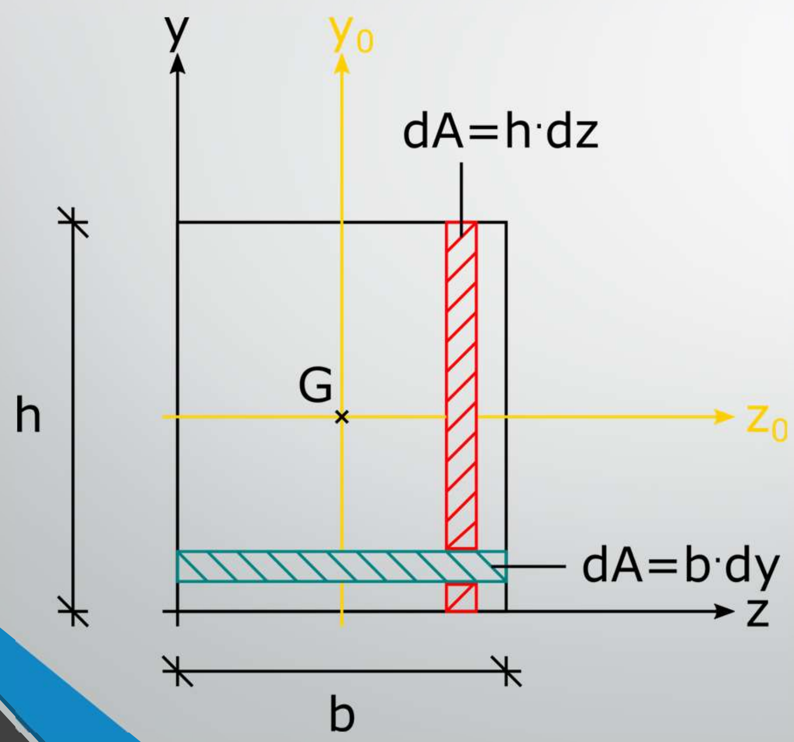
- Vamos repetir o procedimento para os eixos y_0 e z_0.

- Para o eixo z_0:

$$I_{z_0} = \int_S y^2 \, dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \, b \, dy = b \left[\frac{y^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}$$

$$I_{z_0} = b \left[\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(-\frac{h}{2}\right)^3\right] = \frac{b\,h^3}{12}$$

Momento de inércia: retângulo

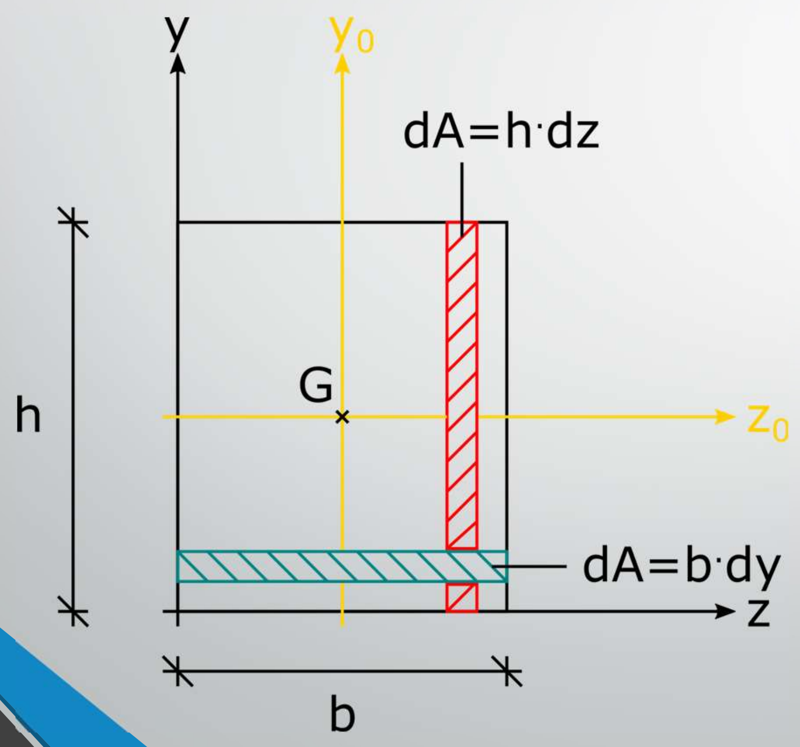


- Para o eixo y_0:

$$I_{y_0} = \int_S z^2\, dA = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} z^2\, h\, dz = b\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}$$

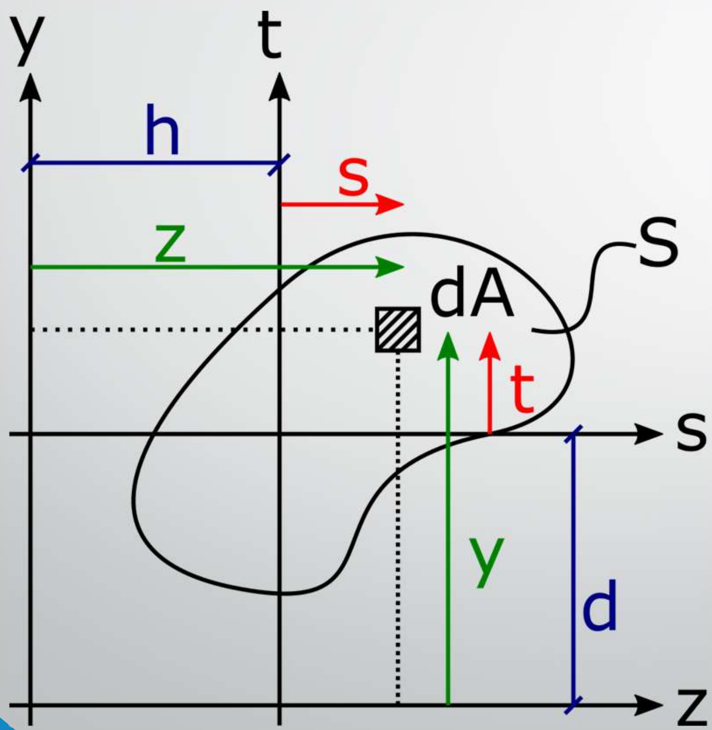
$$I_{y_0} = h\left[\frac{1}{3}\left(\frac{b}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(-\frac{b}{2}\right)^3\right] = \frac{h\, b^3}{12}$$

Momento de inércia: retângulo



- Como pode ser visto, os momentos de inércia em relação aos eixos que passam pelo baricentro não são nulos, porém são mínimos!
- Como relacionar os momentos de inércia dos dois sistemas?

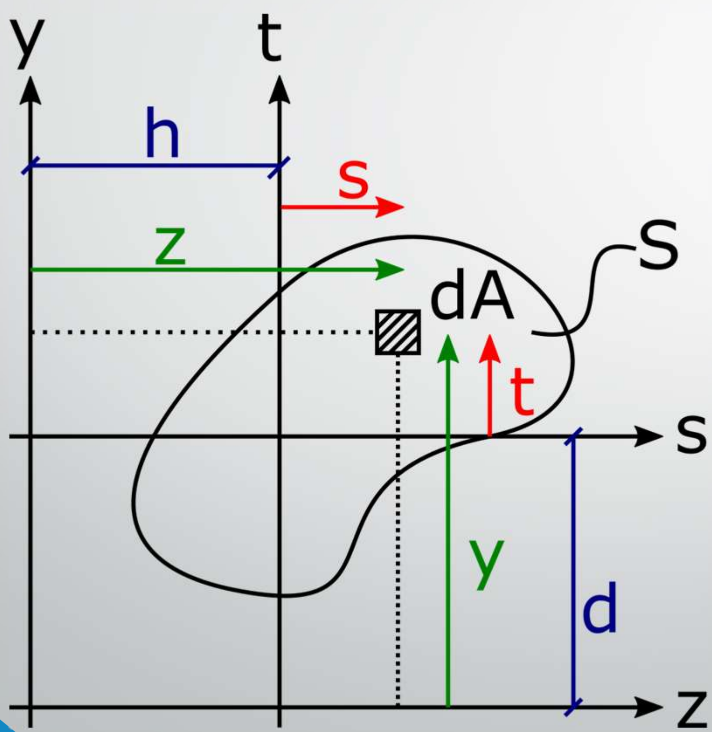
Teorema de Steiner



- Vamos analisar a relação entre os eixos z e s. Podemos escrever a relação entre as distâncias medidas entre a área infinitesimal e os eixos como:

$$y = t + d$$

Teorema de Steiner



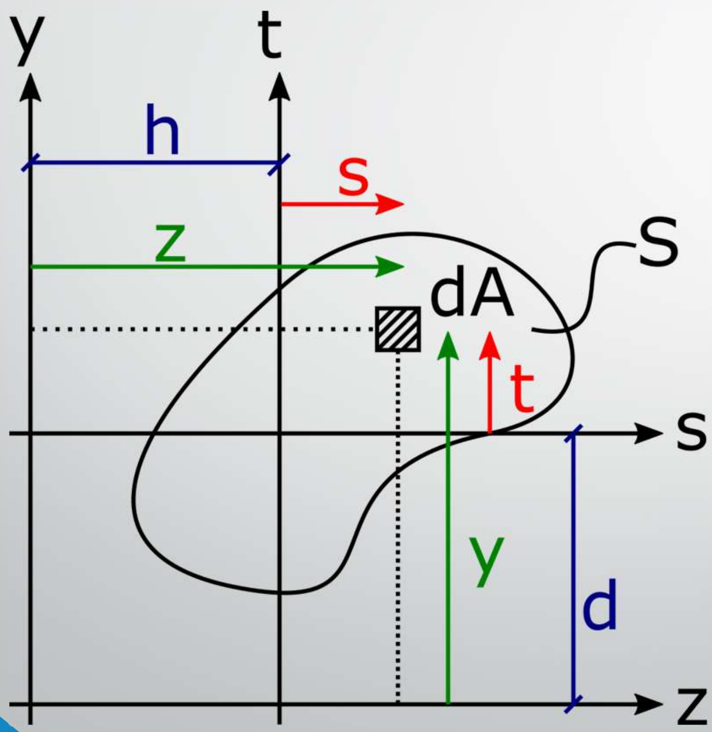
- Assim, podemos escrever o momento de inércia em relação ao eixo z como:

$$I_z = \int_S y^2 \, dA = \int_S (t+d)^2 \, dA = \int_S (t^2 + 2td + d^2) \, dA$$

$$I_z = \int_S t^2 \, dA + 2d \int_S t \, dA + d^2 \int_S dA$$

$$I_z = I_s + 2d \, M_{S,s} + d^2 A$$

Teorema de Steiner



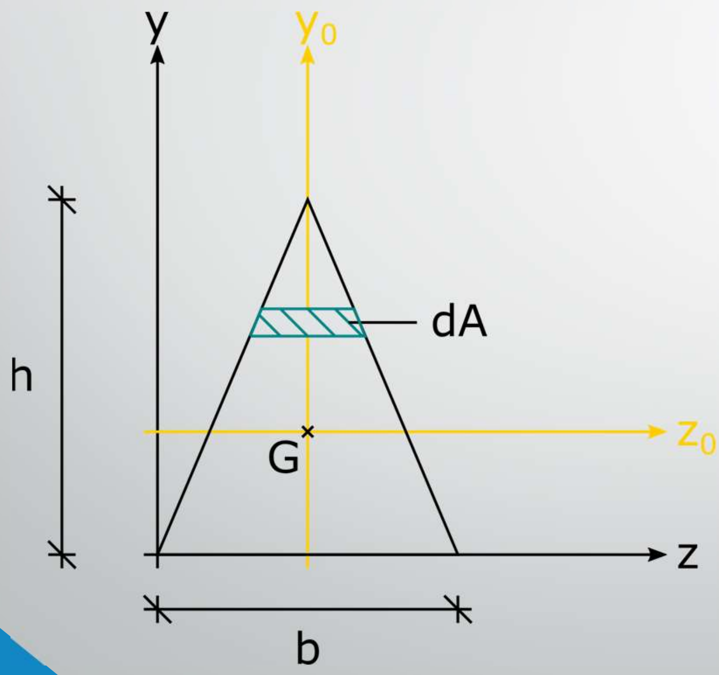
- Se o eixo s coincidir com o eixo que passa pelo baricentro z_0 (ou seja, $M_{z_0} = 0$):

$$I_z = I_{z_0} + d^2 A$$

- Se a figura é composta, é possível obter o baricentro da figura composta transportando todos os momentos de inércia para o eixo do baricentro da figura composta:

$$I_{z_0} = \sum_{i=1}^{n} \left(I_{z_o,i} + d_i^2 A_i \right)$$

Momento de inércia de um triângulo

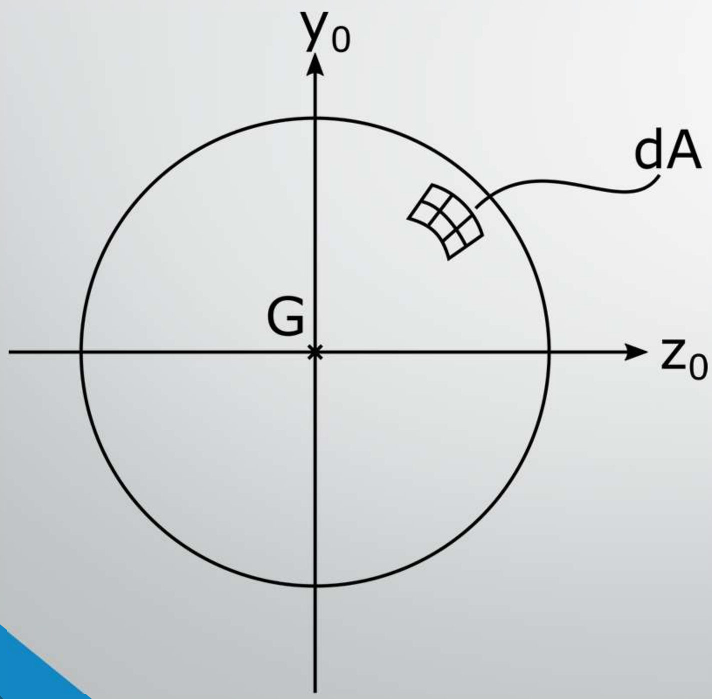


- É possível demonstrar que:

$$I_z = \frac{b\,h^3}{12}$$

$$I_{z_0} = \frac{b\,h^3}{36}$$

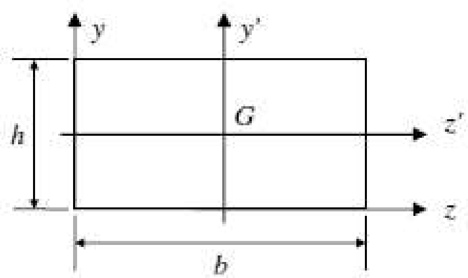
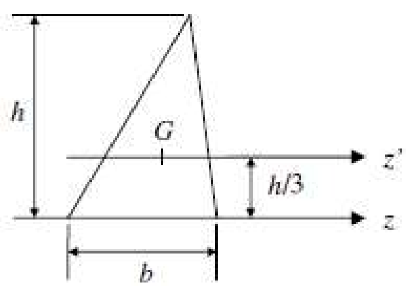
Momento de inércia de um círculo



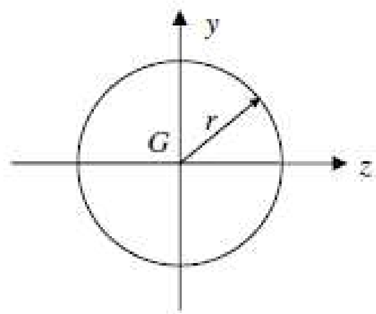
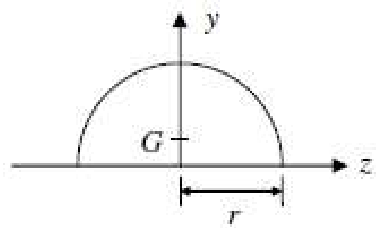
- É possível demonstrar que:

$$I_z = I_y = \frac{\pi\, R^4}{4}$$

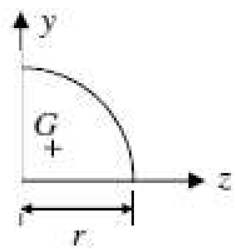
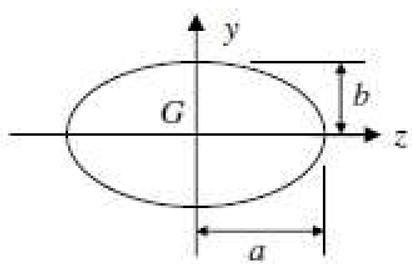
Momento de inércia de figuras geométricas comuns

Retângulo		$I_{z'} = \frac{b \cdot h^3}{12}$ $I_{y'} = \frac{b^3 \cdot h}{12}$ $I_z = \frac{b \cdot h^3}{3}$ $I_y = \frac{b^3 \cdot h}{3}$
Triângulo		$I_{z'} = \frac{b \cdot h^3}{36}$ $I_z = \frac{b \cdot h^3}{12}$

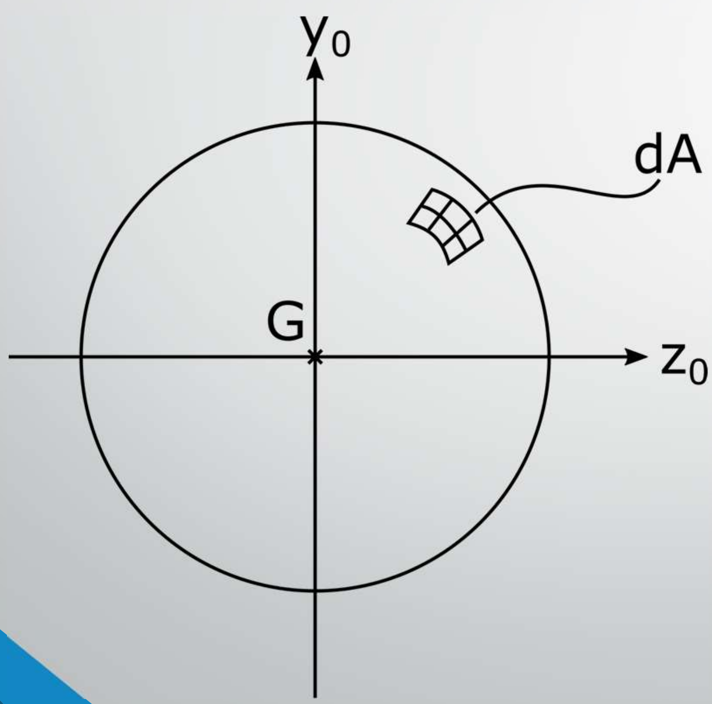
Momento de inércia de figuras geométricas comuns

Círculo		$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{4}$
Semicírculo		$I_z = I_y = \frac{\pi \cdot r^4}{8}$

Momento de inércia de figuras geométricas comuns

Quadrante		$I_z = I_y = \dfrac{\pi \cdot r^4}{16}$
Elipse		$I_z = \dfrac{\pi \cdot a \cdot b^3}{4}$ $I_z = \dfrac{\pi \cdot a^3 \cdot b}{4}$

Momento Polar de Inércia



- Para calcular o momento polar de inércia vamos utilizar um círculo. Assim:

$$J = \int_S r^2 \, dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \, r \, dr \, d\theta$$

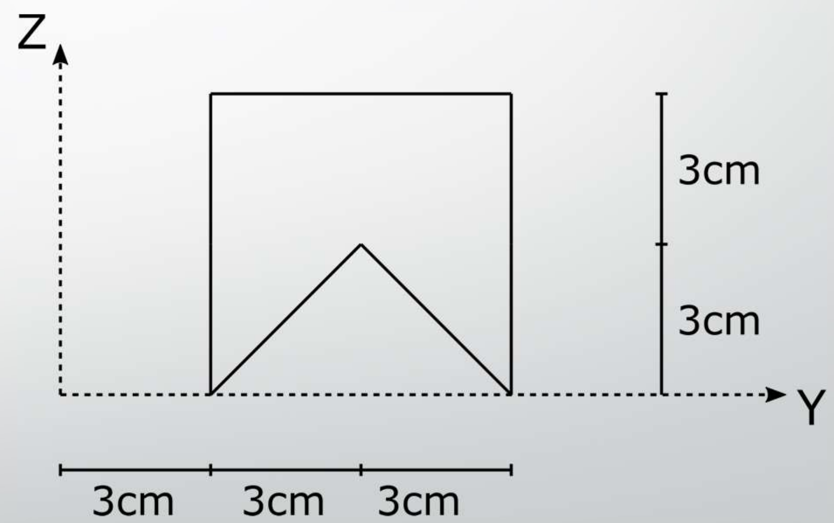
$$J = 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R = \frac{\pi \, R^4}{2}$$

Exemplo: Prova P2 / 2019

1ª Questão: Considere a figura plana data (pentágono) e determine:

A) O centro de gravidade G em relação aos eixos Y e Z dados;

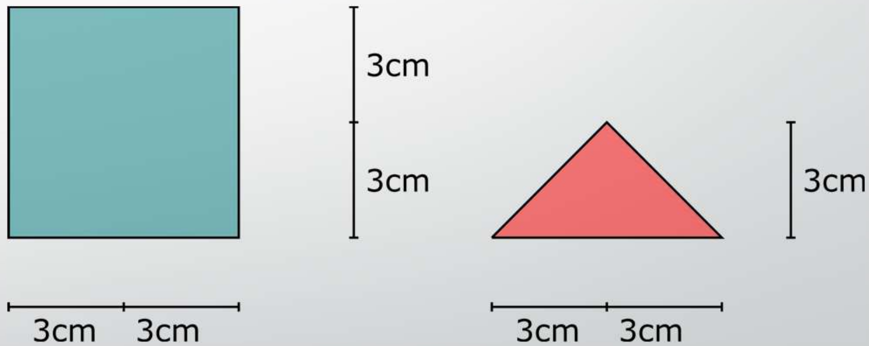
B) O momento de inércia em torno do **eixo vertical** que passa por G.



Exemplo: Prova P2 / 2019

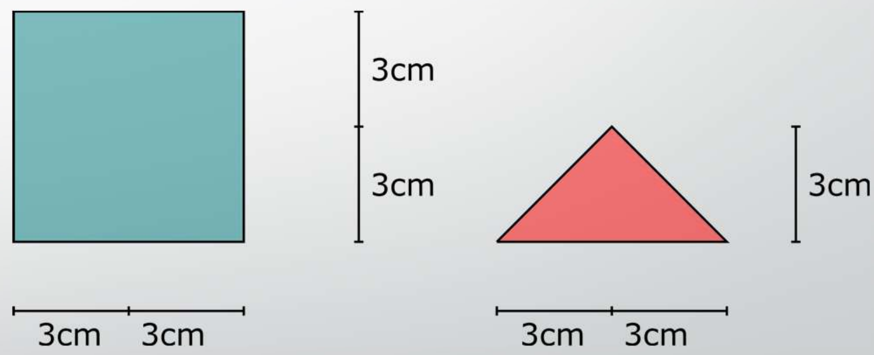
Para o cálculo do item A) precisamos dividir a figura em áreas mais simples para o cálculo:

Considerando as figuras ao lado, podemos construir uma tabela com os valores e posições dos baricentros das figuras em relação aos eixos dados.



Exemplo: Prova P2 / 2019

Área	y_G	z_G	A
I – Quadrado	6	3	36
II - Triângulo	6	1	9



$$y_G = \frac{y_I A_I - y_{II} A_{II}}{A_I - A_{II}} = \frac{6 \cdot 36 - 6 \cdot 9}{36 - 9} = 6\ cm$$

Está sobre o eixo de simetria

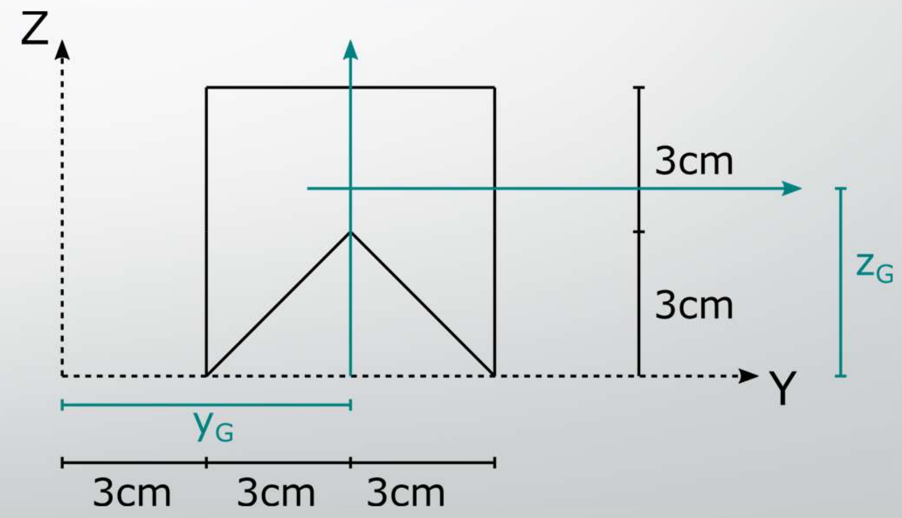
$$z_G = \frac{z_I A_I - z_{II} A_{II}}{A_I - A_{II}} = \frac{6 \cdot 36 - 1 \cdot 9}{36 - 9} = \frac{11}{3} = 3{,}67\ cm$$

Exemplo: Prova P2 / 2019

Sendo assim:

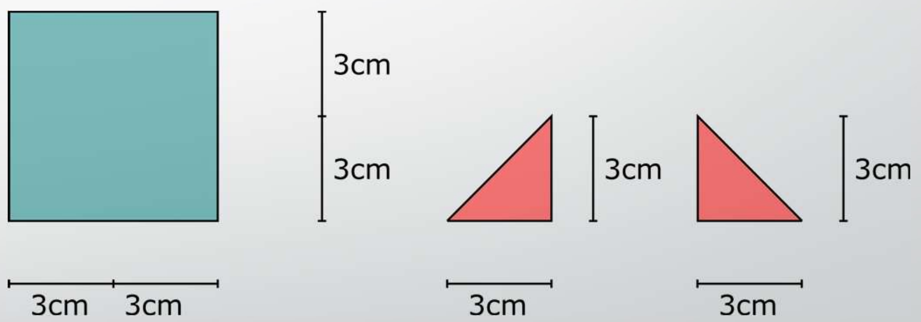
A) As coordenadas do baricentro G são (6; 3,67).

Já para o item B, precisamos redividir as áreas com o triângulos cuja base esteja paralela ao eixo z.



Exemplo: Prova P2 / 2019

Já para o item B, precisamos redividir as áreas com o triângulos cuja base esteja paralela ao eixo z.



Exemplo: Prova P2 / 2019

Dessa forma:

$$I_{z0} = I_{zo}^{quad} - 2I_{zo}^{tri}$$

$$I_{z0} = \left(\frac{6 \cdot 6^3}{12}\right) - 2\left(\frac{3 \cdot 3^3}{36} + 1^2 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2}\right)$$

$$I_{z0} = 108 - 2(2{,}25 + 4{,}5) = 94{,}5\ cm^4$$

Dessa forma:

$$I_{z0} = I_{zo}^{quad} - 2I_{zo}^{tri}$$

$$I_{z0} = \left(\frac{6 \cdot 6^3}{12}\right) - 2\left(\frac{3 \cdot 3^3}{36} + 1^2 \cdot \frac{3 \cdot 3}{2}\right)$$

$$I_{z0} = 108 - 2(2{,}25 + 4{,}5) = 94{,}5\ cm^4$$

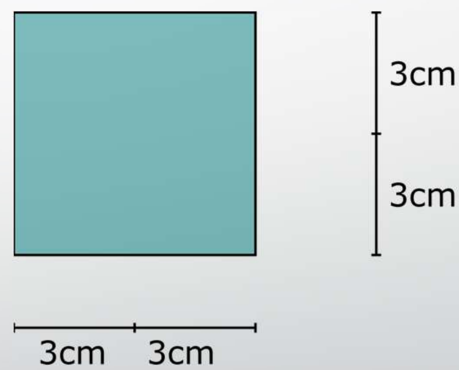
Exemplo: Prova P2 / 2019

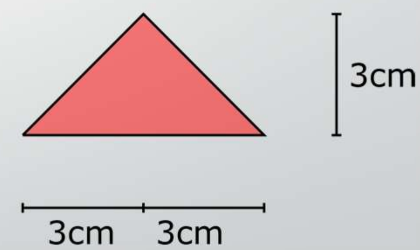
Apesar de não ser pedido no exercício, vamos calcular o momento de inércia na outra direção:

$$I_{y0} = I_{yo}^{quad} - I_{zo}^{tri}$$

$$I_{y0} = \left(\frac{6 \cdot 6^3}{12} + |3 - 3{,}67|^2 \cdot 36\right) - \left(\frac{6 \cdot 3^3}{36} + |2 - 3{,}67|^2 \cdot 9\right)$$

$$I_{y0} = (108 + 16) - (4{,}5 + 25) = 153{,}5\ cm^4$$



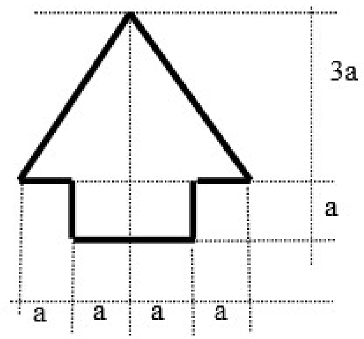


Exemplo: Prova Sub / 2019

Questão B (3 pontos): Para a seção transversal da figura, determine:

a) a posição de centro de gravidade G, fornecendo coordenadas e indicando os eixos de referência;

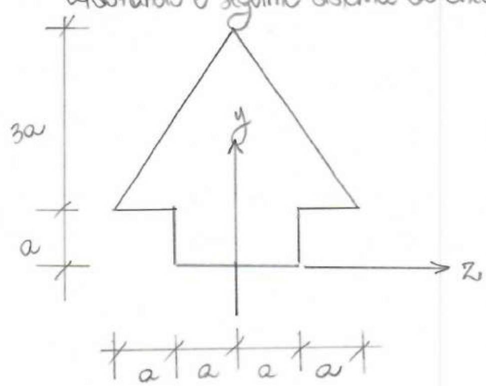
b) o momento de inércia em relação ao eixo horizontal passando por G.



Exemplo: Prova Sub / 2019

QB 3,0

Adotando o seguinte sistema de eixos:



a) Por simetria, $z_G = 0$. 0,75

$$y_G = \frac{\frac{4a \cdot 3a}{2} \cdot 2a + 2a \cdot a \cdot \frac{a}{2}}{\frac{4a \cdot 3a}{2} + 2a \cdot a} = \frac{12a^3 + a^3}{6a^2 + 2a^2} = \frac{13}{8}a \quad (1{,}625a) \; 0{,}75$$

Exemplo: Prova Sub / 2019

b) $I_{x0} = ?$

$$I_{x0} = \left[\left(\frac{2a \cdot a^3}{12}\right) + \left(\frac{a}{2} - \frac{13}{8}a\right)^2 \cdot 2a^2\right] + \left[\left(\frac{4a \cdot 3a^3}{36}\right) + \left(2a - \frac{13}{8}a\right)^2 \cdot 6a^2\right]$$

$$I_{x0} = \left[\frac{a^4}{6} + \frac{81}{64}a^2 \cdot 2a^2\right] + \left[3a^4 + \frac{9}{64}a^2 \cdot 6a^2\right] =$$

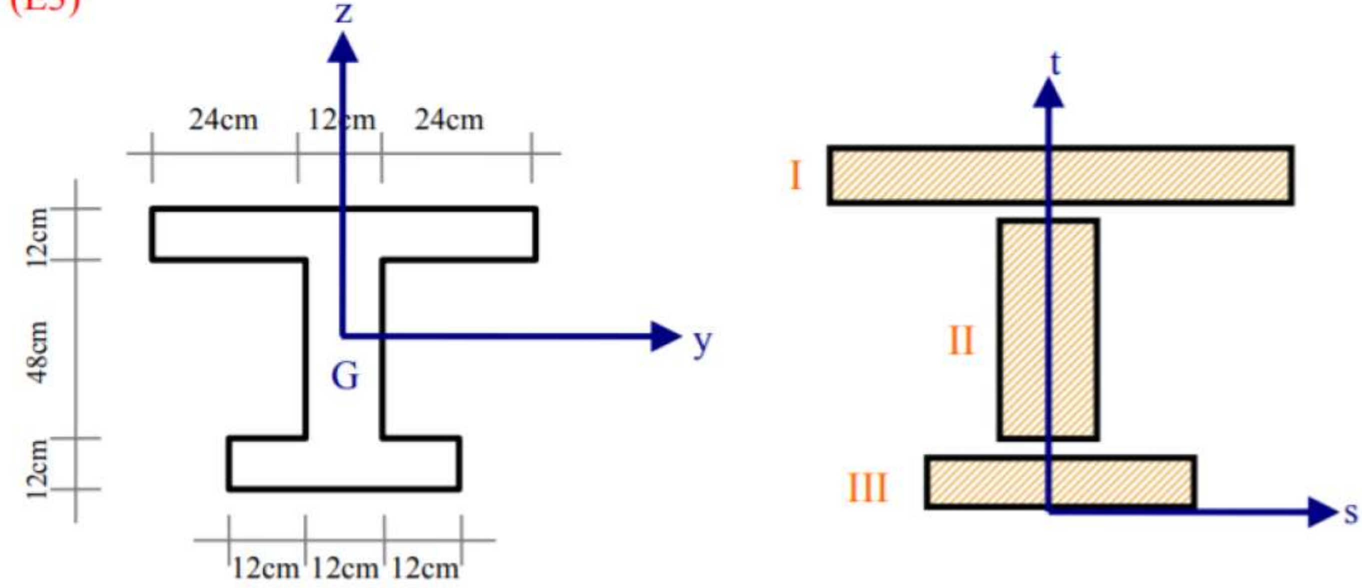
$$\boxed{I_{x0} = \frac{157}{24}a^4 \quad (6{,}541\overline{6}a^4)}$$

1,5

Exemplo

Calcule os Momentos de Inércia em relação aos seus eixos principais de inércia.

(E3)



Exemplo

1) Calculo do Centro de Gravidade.

$s_{CG} = 0$ Pois Ot é um eixo de simetria da peça.

$$t_{CG} = \frac{A_I \cdot t_{CGI} + A_{II} \cdot t_{CGII} + A_{III} \cdot t_{CGIII}}{A_I + A_{II} + A_{III}}$$

$$t_{CG} = \frac{60.12.66 + 12.48.36 + 36.12.6}{60.12 + 12.48 + 36.12} \rightarrow t_{CG} = 41 \text{ cm}$$

Exemplo

2) Momento de Inércia em relação ao eixo Oy.

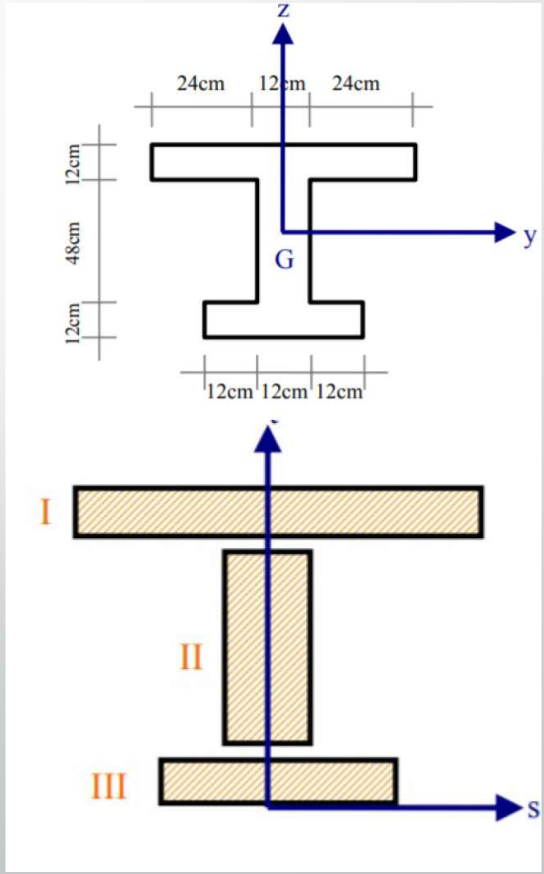
$$I_y = I_{Iy} + I_{IIy} + I_{IIIy}$$

$$I_{Iy} = I_{Is} + A_I \cdot d^2 \rightarrow I_{Iy} = \frac{60.12^3}{12} + 60.12.(66-41)^2 = 458\ 640\ cm^4$$

$$I_{IIy} = I_{IIs} + A_{II} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIy} = \frac{12.48^3}{12} + 12.48.(36-41)^2 = 124\ 992\ cm^4$$

$$I_{IIIy} = I_{IIIs} + A_{III} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIIy} = \frac{36.12^3}{12} + 36.12.(6-41)^2 = 534\ 384\ cm^4$$

$$\therefore I_{IIIy} = 1\ 118\ 016\ cm^4$$



Exemplo

3) Momento de Inércia em relação ao eixo Oz.

$$I_z = I_{Iz} + I_{IIz} + I_{IIIz}$$

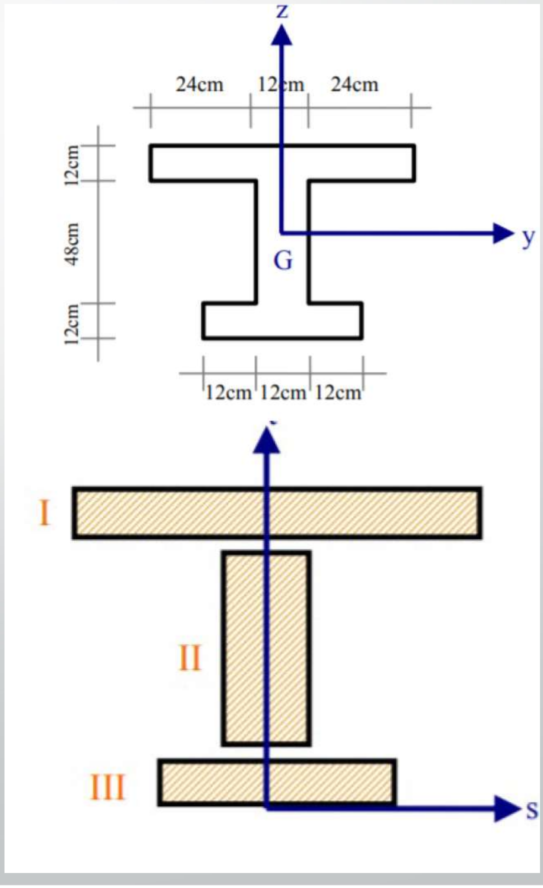
$$I_{Iz} = I_{It} + A_I.0^2 \rightarrow I_{Iz} = \frac{12.60^3}{12} = 216\ 000\ cm^4$$

$$I_{IIz} = I_{IIt} + A_{II}.0^2 \rightarrow I_{IIz} = \frac{48.12^3}{12} = 6\ 912\ cm^4$$

$$I_{IIIz} = I_{IIIt} + A_{III}.0^2 \rightarrow I_{IIIz} = \frac{12.36^3}{12} = 46\ 656\ cm^4$$

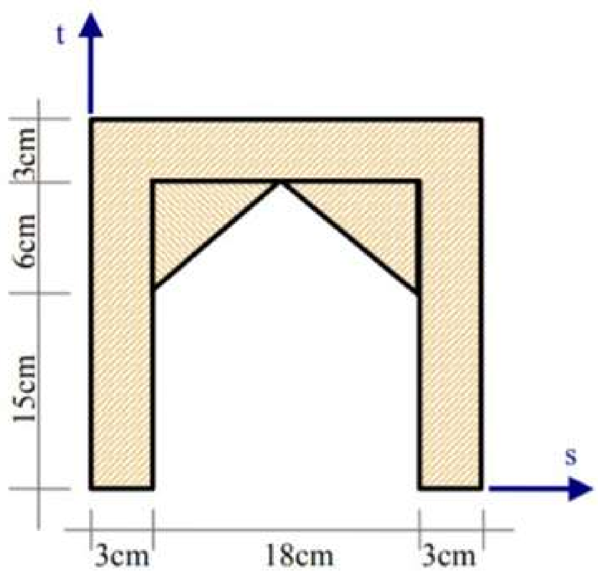
$$\therefore I_{IIIz} = 269\ 568\ cm^4$$

4) Conclusão: a peça é mais estável em torno do eixo Oy.



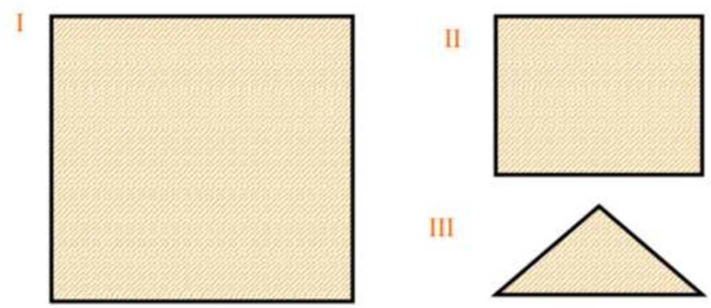
Exemplo

(E5) Para a seção transversal da figura abaixo, determine:
a) A posição do centro de gravidade (fornecer as coordenadas e indicar os eixos de referência).
b)Os momentos principais (centrais) de inércia.
c) As direções dos eixos principais (centrais) de inércia.



Exemplo

Decompondo a peça em 3 partes temos:



1) Cálculo da Área.

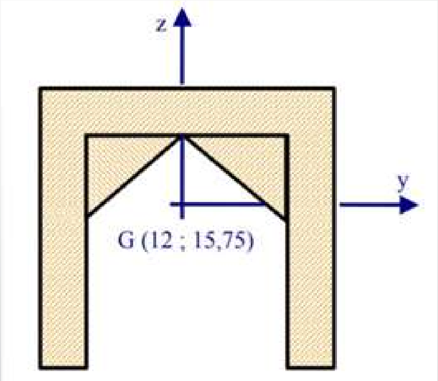
$$A = A_I - A_{II} - A_{III} \rightarrow A = 24.24 - 18.15 - \frac{18.6}{2} \rightarrow A = 252\ cm^2$$

2) Cálculo do Centro de Gravidade.

$s_{CG} = 12$ cm   Pois um eixo perpendicular a Os em 12 cm divide a peça simetricamente.

$$t_{CG} = \frac{A_I \cdot t_{CGI} - A_{II} \cdot t_{CGII} - A_{III} \cdot t_{CGIII}}{A_I - A_{II} - A_{III}}$$

$$t_{CG} = \frac{24.24.12 - 18.15.7{,}5 - \frac{18.6}{2}.17}{252} \rightarrow t_{CG} = 15{,}75\ cm$$



Exemplo

3) Momento de Inércia em relação ao eixo Oy.

$$I_y = I_{Iy} - I_{IIy} - I_{IIIy}$$

$$I_{Iy} = I_{Is} + A_I \cdot d^2 \;\rightarrow\; I_{Iy} = \frac{24.24^3}{12} + 24.24.(12 - 15,75)^2 = 35\ 748\ \text{cm}^4$$

$$I_{IIy} = I_{IIs} + A_{II} \cdot d^2 \;\rightarrow\; I_{IIy} = \frac{18.15^3}{12} + 18.15.(7,5 - 15,75)^2 = 23\ 439\ \text{cm}^4$$

$$I_{IIIy} = I_{IIIs} + A_{III} \cdot d^2 \;\rightarrow\; I_{IIIy} = \frac{18.6^3}{36} + \frac{18.6}{2}.(17 - 15,75)^2 = 192\ \text{cm}^4$$

$$\therefore I_{IIIy} = 12\ 116\ \text{cm}^4$$

Exemplo

4) Momento de Inércia em relação ao eixo Oz.

$$I_z = I_{Iz} - I_{IIz} - I_{IIIz}$$

$$I_{Iz} = I_{It} + A_I \cdot 0^2 \rightarrow I_{Iz} = \frac{24 \cdot 24^3}{12} = 27\,648 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIz} = I_{IIt} + A_{II} \cdot 0^2 \rightarrow I_{IIz} = \frac{15 \cdot 18^3}{12} = 7\,290 \text{ cm}^4$$

$$I_{IIIz} = I_{IIIt} + A_{III} \cdot d^2 \rightarrow I_{IIIz} = 2 \cdot \left(\frac{6 \cdot 9^3}{36} + \frac{6 \cdot 9}{2} \cdot 3^2 \right) = 729 \text{ cm}^4$$

$$\therefore I_{IIIz} = 19\,629 \text{ cm}^4$$

5) Conclusão: a peça é mais estável em torno do eixo Oz.

Exercício (Presença)

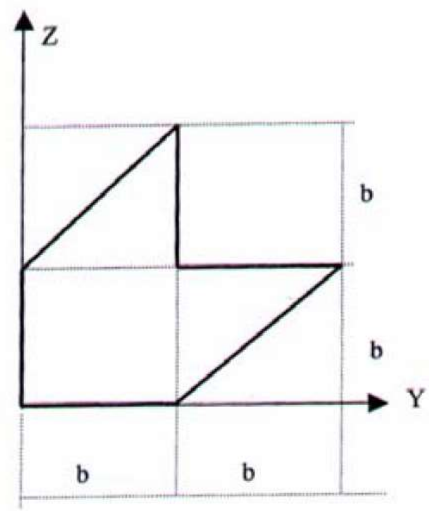
Questão 2

Considere a figura plana dada (hexágono) e determine:

(a) o centro de gravidade em relação ao eixo Y e Z dados;

(b) os momentos centrais de inércia.

Considere b = (algarismo das dezenas do número USP) + 1.



Agradecimento

Gostaria de agradecer aos professores Martin Paul Schwark e Osvaldo Nakao pelas sugestões e por exercícios extras.