7600054 — Sistemas Complexos

Gonzalo Travieso

2020-05-06

Outline

Exercício (aula anterior)

Considere o sistema anterior com $\mu_2 = 3$:

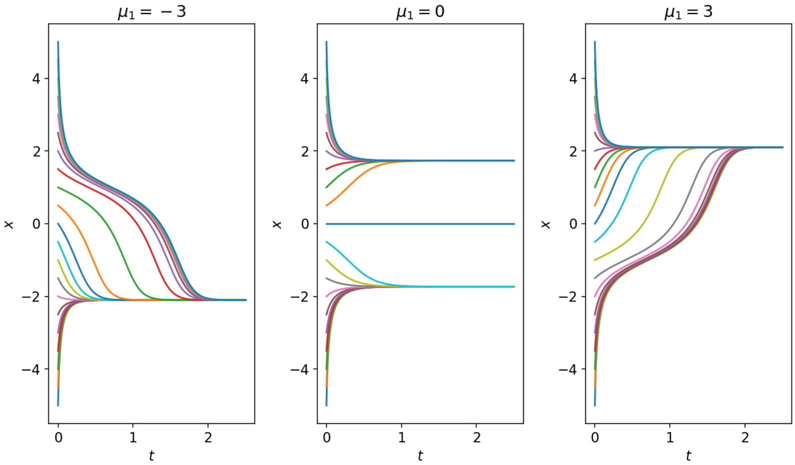
$$\dot{x} = \mu_1 + 3x - x^3.$$

Exercício

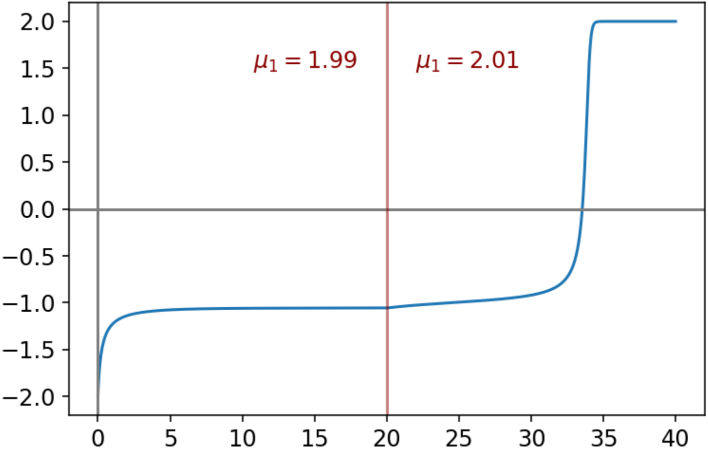
1. Simule esse sistema para μ_1 valendo -3, 0 e 3, em cada caso partindo de valores iniciais entre -5 e 5 a intervalos de 0.5. O resultado é consistente com as análises anteriores?
2. Simule o sistema partindo de $x_0 = -2$ tal que para $0 \leq t \leq 20$, ele tem $\mu_1 = 1.99$. No instante $t = 20$ há uma ligeira alteração e o sistema fica com $\mu_1 = 2.01$ para $20 < t \leq 40$. Verifique e explique o resultado.

   Dica: Faça uma simulação com $\mu_1 = 1.99$ em $0 \leq t \leq 20$ e guarde os resultados. Em seguida, realize uma nova simulação para $20 \leq t \leq 40$ com $\mu_1 = 2.01$ e colocando para valor inicial o valor calculado anteriormente para $x(20)$. Em seguida, junte os dois resultados para plotar.

Trajetórias



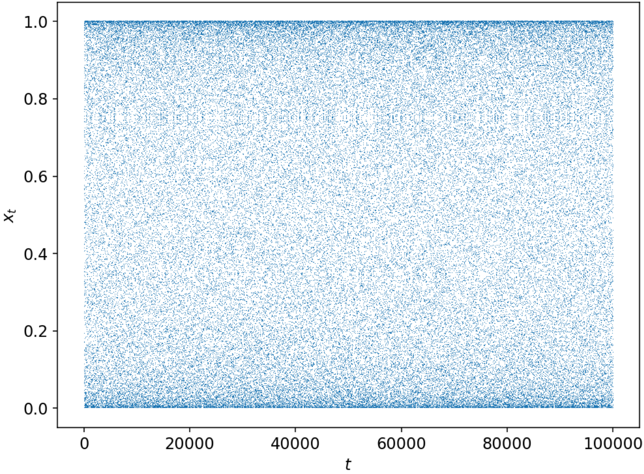
Mudança de parâmetro



Mapa logístico acima de r_∞

- O mapa logístico $L(x, r) = rx(1 - x)$ tem uma sequência infinita de duplicações de período, com limite em r_∞.
- O que acontece após r_∞?
- Vamos ver o caso $r = 4$.

Trajetória partindo de $x_0 = \sqrt{2} - 1$

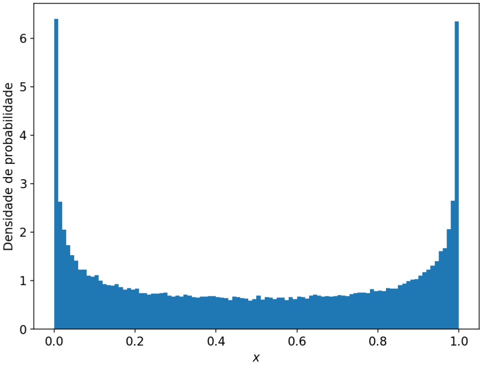


Trajetória é densa

Subconjunto denso Dado um intervalo fechado $\mathcal{I}$, o subconjunto $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ é dito um subconjunto denso de $\mathcal{I}$ se, para qualquer vizinhança $N(x)$ de um ponto $x \in \mathcal{I}$, $N(x) \cap \mathcal{J} \neq \varnothing$.

A trajetória apresentada anteriormente é um subconjunto denso de $[0, 1]$.

Histograma dos pontos da trajetória



Os valores de x se distribuem por todo o intervalo $[0, 1]$, mas não com a mesma probabilidade.

Exercício

Considere o mapa de tenda

$$T_2(y) = \begin{cases} 2y & 0 \le y \le 1/2 \\ 2 - 2y & 1/2 \le y \le 1 \end{cases}$$

Exercício

Encontre o histograma de pontos da trajetória de $T_2(y)$:

1. Sorteie um ponto inicial y_0 aleatório entre 0 e 1 (use `np.random.random()`).
2. Evolua a trajetória de $T_2(y)$ até t grande (para ter boa estatística).
3. Descarte alguns dos primeiros pontos (sugestão: 100) para evitar dependência com o valor inicial, e plote o histograma de densidade dos valores restantes (use `plt.hist` de Matplotlib).
4. Repita os passos anteriores algumas vezes (sugestão: 10), para ver que o resultado não depende fortemente dos pontos iniciais sorteados.

Mapa de tenda

- Considere agora o mapa de tenda com parâmetro 2:

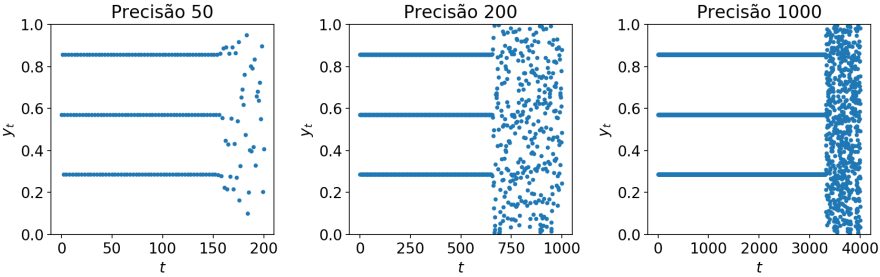
$$T_2(y) = \begin{cases} 2y & 0 \leq y \leq 1/2 \\ 2 - 2y & 1/2 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

- Se $y_0 = 4/7$ temos a sequência:

$$\frac{4}{7} \to \frac{6}{7} \to \frac{2}{7} \to \frac{4}{7}, \dots$$

  e portanto temos um ciclo de período 3.
- No entanto, a trajetória é instável e depende da precisão.

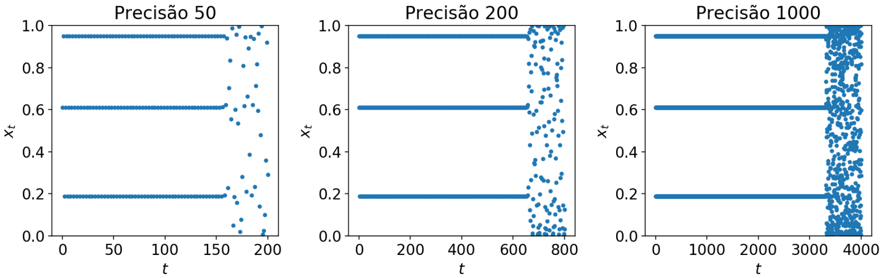
Trajetória período 3 de $T_2(y)$



Trajetória período 3 em $L(x, 4)$

- Como visto anteriormente, os mapas $T_2(y)$ e $L(x, 4)$ são conjugados através do homeomorfismo
$$x = h(y) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}y\right).$$
- Isto significa que se $T_2(y)$ tem uma trajetória de período 3, então também existe uma trajetória com esse período para $L(x, 4)$.
- Para isso, usamos $x_0 = h(4/7) = \sin^2(\frac{2\pi}{7})$ como ponto de partida.

Trajetória período 3 de $L(x,4)$



Transitividade topológica

- Um mapa $\mathbf{f} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ é dito topologicamente transitivo se para qualquer par de subconjuntos abertos $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{S}$ existe $t > 0$ tal que $\mathbf{f}^t(\mathcal{U}) \cap \mathcal{V} \neq \varnothing$.
- O espaço de estado de um mapa topologicamente transitivo não pode ser decomposto em subconjuntos distintos que são invariantes sob o mapa. [Um subconjunto é invariante sob um mapa se a aplicação do mapa em um elemento do subconjunto resulta em outro elemento desse subconjunto.]

Sensibilidade a condições iniciais

Um mapa $\mathbf{f} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ tem sensibilidade a condições iniciais se existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer $\mathbf{x} \in \mathcal{S}$ e vizinhança $N(\mathbf{x})$, então existe $\mathbf{y} \in N(\mathbf{x})$ e $t > 0$ tal que $\|\mathbf{f}^t(\mathbf{x}) - \mathbf{f}^t(\mathbf{y})\| > \delta$.

Caos

Um mapa $\mathbf{f} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ é dito caótico se ele satisfaz as seguintes condições:

1. Ele tem sensibilidade a condições iniciais.
2. Ele é topologicamente transitivo.
3. O subconjunto de seus pontos periódicos é denso em $\mathcal{S}$.

Na realidade, é demonstrado que a condição 1 acima é uma consequência das condições 2 e 3.

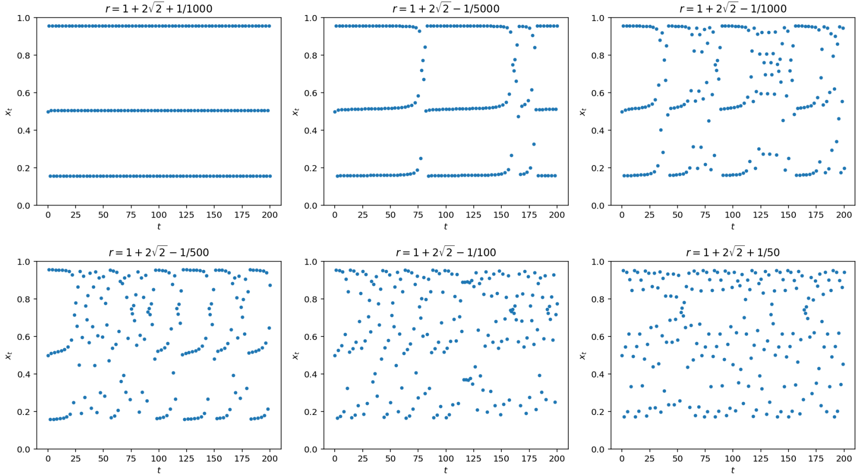
Rotas para o caos

- Vimos que para certos valores de parâmetro os sistemas podem ter comportamentos regulares, enquanto para outros valores o comportamento será caótico.
- A forma como o comportamento se tranforma de regular para caótico conforme os parâmetros são variados é denominada rota para o caos.
- No caso do mapa logístico, vimos que o sistema tem um comportamento de uma sequência de duplicações de período até r_∞. Após esse ponto o comportamento será em geral caótico. Essa é a chamada rota de duplicação de período.

Rota de intermitência

- Uma outra rota é a de intermitência. Neste caso, o sistema começa com um comportamento regular. À medida que um parâmetro é variado, começam a aparecer intervalos breves de irregularidade, que vão surgindo mais frequentemente conforme o parâmetro vai sendo mudado, até que em um ponto o comportamento fica totalmente irregular.
- Como exemplo, vamos usar o mapa logístico com r próximo de $1 + 2\sqrt{2}$.

Rota de intermitência



Mapas ergódicos

- Lembrando que um subconjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ é invariante sob $\mathbf{f} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ se $\mathbf{f}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.
- Uma métrica μ é invariante sob $\mathbf{f} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ se para qualquer $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ invariante sob $\mathbf{f}$ temos

$$\mu(\mathcal{A}) = \mu(\mathbf{f}^{-1}(\mathcal{A})),$$

  isto é, a métrica do conjunto é igual à métrica dos pontos que geram o conjunto sob $\mathbf{f}$.
- O mapa $\mathbf{f} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ é ergódico com respeito a uma métrica invariante μ se, para qualquer $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ invariante, então

$$\mu(\mathcal{A}) = \mu(\mathcal{S})$$

  ou

$$\mu(\mathcal{A}) = 0.$$

Densidade de probabilidade

- Se a métrica invariante μ é tal que

$$\mu(\mathcal{S}) = 1$$

ela é denominada uma métrica de probabilidade.

- No caso comum em que podemos escrever

$$d\mu(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}$$

então $\rho(\mathbf{x})$ é uma densidade de probabilidade invariante.

Ergodicidade

- Considere $\mathbf{f} : \mathcal{S} \mapsto \mathcal{S}$ ergódica com relação à metrica invariante de probabilidade μ.
- Considere que $d\mu(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}$.
- Considere $g : \mathcal{S} \mapsto \mathbb{R}$ integrável com relação a μ.
- Então teremos, para quase todos os $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{S}$:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \sum_{i=0}^{t} g(\mathbf{f}^i(\mathbf{x}_0)) = \int g(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})d\mathbf{x}.$$

- Resumindo: a média temporal ao longo dos pontos de uma trajetória partindo de um $\mathbf{x}_0$ quase arbitrário é igual à média no espaço de estado ponderada pela distribuição de probabilidade $\rho(\mathbf{x})$.

Equação de Perron-Frobenius

- Uma pré-imagem do ponto **x** sob **f** é um ponto **y** tal que

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{y}).$$

- Sabemos da teoria de probabilidades que se as variáveis x e y são relacionadas por $x = f(y)$ então as densidades de probabilidade de x, $\rho(x)$ e de y, $\phi(y)$, são relacionadas por:

$$\rho(x)|dx| = \phi(y)|dy| \Rightarrow \rho(x) = \frac{\phi(y)}{|f'(y)|}.$$

- Se um ponto **x** tem k pré-imagens distintas $y_i, i = 1, \ldots, k$, então as densidades das várias pré-imagens se acumulam:

$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\phi(y_i)}{|f'(y_i)|}.$$

Equação de Perron-Frobenius

- No caso de um mapa, a densidade de probabilidade invariante deve portanto satisfazer
$$\rho(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\rho(y_i)}{|f'(y_i)|}$$
com y_i sendo os pontos de $[0, 1]$ que são levados pelo mapa ao ponto x.
- Este é a equação de Perron-Frobenius.

Mapa da tenda

- Por exemplo, no caso de $T_2(y)$ cada ponto y (com exceção de $y = 1/2$) pode provir de dois outros pontos, um na parte ascendente e outro na parte descendente da tenda. Usando $\phi(y)$ para a densidade de probabilidade invariante de $T_2(y)$:

$$\phi(y) = \frac{\phi\left(\frac{1}{2}y\right)}{2} + \frac{\phi\left(1 - \frac{1}{2}y\right)}{2} = \frac{1}{2}\left[\phi\left(\frac{1}{2}y\right) + \phi\left(1 - \frac{1}{2}y\right)\right].$$

- Esta equação é satisfeita por

$$\phi(y) = 1.$$

Mapa logístico

- Sabemos que $L_4(x) = L(x, 4)$ e $T_2(y)$ são conjugados por meio de $h(y) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}y\right)$, isto é
$$L_4 = h \circ T_2 \circ h^{-1}.$$
- A aplicação múltipla de $L_4(x)$ corresponde portanto a:
$$h \circ T_2 \circ h^{-1} \circ h \circ T_2 \circ h^{-1} \circ \cdots \circ h \circ T_2 \circ h^{-1}.$$
Isto se reduz a:
$$h \circ T_2 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_2 \circ h^{-1}.$$
- Neste processo, a aplicação inicial de h^{-1} vai apenas calcular o ponto inicial das aplicações sucessivas de T_2, portanto ao fim da última aplicação de T_2 teremos uma distribuição na variável y dada pela densidade de probabilidade invariante de T_2:
$$\phi(y) = 1.$$

Densidade de probabilidade invariante do mapa logístico

- O último passo será aplicar h para transformar a variável y do mapa T_2 na variável x do mapa L_4, portanto, a distribuição de x será relacionada com a distribuição de y por

$$\rho(x)dx = \phi(y)dy$$

- Juntando com o anterior resulta em

$$\rho(x) = \frac{\phi(y)}{h'(y)} = \frac{dh^{-1}}{dx}\phi(h^{-1}(x)),$$

a última igualdade vem de $\frac{1}{dy/dx} = dx/dy$.

Densidade de probabilidade invariante do mapa logístico

- Sabemos que $\phi(y) = 1$.
- Já
$$h^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x},$$
que tem como derivada
$$\frac{dh^{-1}}{dx} = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$
- Portanto concluimos que, para $L(x, 4)$:
$$\rho(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}.$$

Densidade de probabilidade invariante do mapa logístico