Teoria de perturbação

Como vimos anteriormente, em sistemas integráveis podemos lançar mão das variáveis de ação e ângulo para sua solução. Contudo, sabemos também que sistemas integráveis são raros, especialmente se lidamos com mais de um grau de liberdade. O objetivo desse capítulo é estudar o efeito de pequenas perturbações em sistemas integráveis

- Um grau de liberdade

Vamos considerar uma Hamiltoniana da forma

$$H(I,\phi) = H_0(I) + \varepsilon \underbrace{H_1(I,\phi)}_{\mathrm{K}} + \varepsilon^2 H_2(I,\phi),$$

$I, \phi \rightarrow$ variáveis de ação e ângulo para H_0

$\varepsilon \rightarrow$ controla a intensidade da perturbação.
número adimensional

Para $\varepsilon = 0$ temos

$$I = I_0 \;;\; \phi = \phi_0 \;;\; \omega_0 = \frac{\partial H_0}{\partial I_0}$$

$$\phi_0(t) = \omega t + \beta$$

(2)

Buscamos então uma transformação canônica $(I_0, \phi_0) \longrightarrow (I, \phi)$ de tal forma que $K \equiv K(I)$ novamente.

Desse modo, temos uma solução simples nas novas variáveis. Por termos apenas um grau de liberdade, e estudarmos sistemas conservativos, sabemos que ele é integrável e essa transformação deve existir $\forall \varepsilon$.

Vamos considerar uma transformação canônica infinitesimal independente de t

$$F_2(\underset{q}{\phi_0}, \underset{p}{I}) = \phi_0 I + \varepsilon G_1(\phi_0, I) + \varepsilon^2 G_2(\phi_0, I) + \cdots$$

Para $\varepsilon = 0$ recuperamos a identidade e para fixarmos G_1 vamos impor que a nova Hamiltoniana não dependa de ϕ. Da definição de F_2 temos

$$I_0 = \frac{\partial F_2}{\partial \phi_0} = I + \varepsilon \frac{\partial G_1(\phi_0, I)}{\partial \phi_0} + O(\varepsilon^2) \quad \left(p = \partial F_2 / \partial q\right)$$

$$\phi = \frac{\partial F_2}{\partial I} = \phi_0 + \varepsilon \frac{\partial G_1}{\partial I}(\phi_0, I) + O(\varepsilon^2) \quad \left(Q = \partial F_2 / \partial p\right)$$

Podemos agora escrever as cordenadas originais em termos das novas. Faremos isso em primeira ordem em ε :

$$I_0 = I + \varepsilon \frac{\partial G_1(\phi,I)}{\partial \phi} + O(\varepsilon^2)$$

$$\phi_0 = \phi - \varepsilon \frac{\partial G_1(\phi,I)}{\partial I} + O(\varepsilon^2)$$

Substituindo essa transformação na Hamiltoniana obtemos

$$K(\phi,I) = H\left[\phi_0(\phi,I), I_0(\phi,I)\right]$$

$$= H_0\left[I_0(\phi,I)\right] + \varepsilon H_1\left[\phi_0(\phi,I), I_0(\phi,I)\right] + O(\varepsilon^2)$$

$$= H_0(I) + \overbrace{\frac{\partial H}{\partial I_0}}^{=\omega_0} \varepsilon \frac{\partial G_1^{(\phi,I)}}{\partial \phi} + \varepsilon H_1(\phi,I) + O(\varepsilon^2)$$

$$= H_0(I) + \varepsilon\left[\omega_0 \frac{\partial G_1^{(\phi,I)}}{\partial \phi} + H_1(\phi,I)\right] + O(\varepsilon^2)$$

$$\equiv K_0(I) + \varepsilon K_1(\phi,I)$$

$$\omega_0 = \frac{\partial H}{\partial I_0} \quad ; \quad K_1(\phi,I) = \omega \frac{\partial G_1(\phi,I)}{\partial \phi} + H_1(\phi,I)$$

freq. movimento não perturbado

Agora vamos fixar a função G_1 exigindo que $K_1 = K_1(I)$. Para tal, faremos

$$K_1(I) = \langle K_1(\phi, I) \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \; K_1(\phi, \overset{\nearrow \text{fixo}}{I})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\phi \left[\omega_0 \frac{\partial G_1(\phi, I)}{\partial \phi} + H_1(\phi, I) \right]$$

$$= \frac{\omega_0}{2\pi}\Big[\underbrace{G_1(2\pi, I) - G_1(0, I)}_{0} \Big] + \langle H_1 \rangle$$

Pois G_1 deve ser periódica em ϕ (nossa escolha). Se agora escrevemos

$H_1 = \tilde{H}_1 + \langle H_1 \rangle$ temos que

$K_1 = \omega_0 \dfrac{\partial G_1}{\partial \phi} + \tilde{H}_1 + \langle H_1 \rangle$, o que nos dá

$$\frac{\partial G_1}{\partial \phi} = -\frac{\tilde{H}_1}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{G_1 = -\frac{1}{\omega_0}\int \tilde{H}_1 \, d\phi}$$

Temos também que

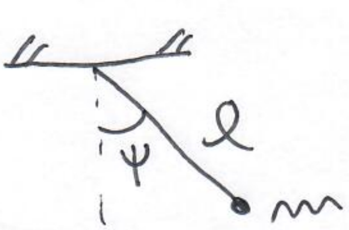
$K(I) = H_0(I) + \varepsilon\langle H_1\rangle$, o que nos dá

$$\omega = \frac{\partial K}{\partial I} = \frac{\partial H_0}{\partial I} + \varepsilon\frac{\partial\langle H_1\rangle}{\partial I} = \omega_0 + \omega_1 ,$$

e temos que a correção para a frequência do sistema é dada por $\omega_1 = \varepsilon\,\partial\langle H_1\rangle/\partial I$.

Reforçamos que para calcular apenas a frequência não precisamos de G_1.
A receita final é a seguinte: calcula-se $\langle H_1\rangle$ e obtém-se K. Define-se $\tilde{H}_1 \equiv H_1 - \langle H_1\rangle$ e integra-se para obter G_1.

- Exemplo: pêndulo simples



$$H = \frac{p_\psi^2}{2ml^2} + mgl(1-\cos\psi)$$

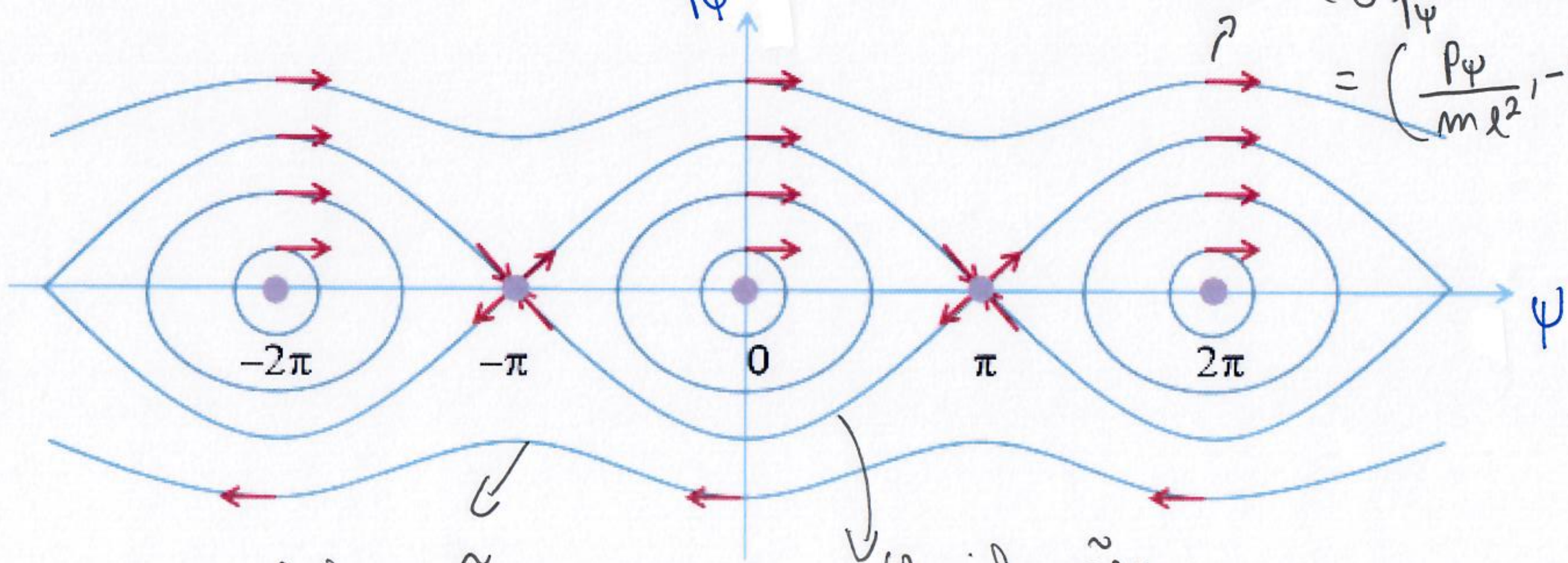
O espaço de fases do pêndulo é mostrado na próxima página, onde vemos os movimentos de oscilação e libração e os pontos de equilíbrio $\theta = 0$ (estável) e $\theta = \pi$ (instável)

5b

Projetamos nosso toro, nesse caso um cilindro, em um plano e aplicamos condições periódicas de contorno

$\vec{F} = E$ (conservado)

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial E}{\partial p_\psi}, -\frac{\partial E}{\partial \psi}\right) = \left(\frac{p_\psi}{m\ell^2}, -mg\ell\sin\psi\right)$$



Libração
(balançar em latim)

Oscilações

Sabemos que no limite harmônico $\omega = \sqrt{g/l}$. Considerando o limite de pequenas oscilações expandimos o cosseno, ao redor de $\psi = 0$, até ordem 4:

$$H = \frac{p_\psi^2}{2ml} + mgl\left(\frac{\psi^2}{2} - \frac{\psi^4}{24}\right) + O(\psi^6)$$

$$H = \underbrace{\frac{p_\psi^2}{2ml} + \frac{mgl\psi^2}{2}}_{H_0} \underbrace{- \frac{mgl\psi^4}{24}}_{H_1}$$

Para H_0, as variáveis de ação e ângulo são dadas por

$$p_\psi = \sqrt{2mglI_0/\omega_0}\,\cos\phi_0 \quad e \quad \psi = \sqrt{\frac{2\omega_0 I_0}{mgl}}\,\sin\phi$$

$$H = \omega_0 I_0 - \frac{I_0^2 \sin^4\phi_0}{6ml^2}$$

De nossa discussão anterior sabemos que

$$K = \omega_0 I - \frac{I^2}{6ml^2}\langle \sin^4\phi \rangle$$

$\langle \sin^4\phi \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^4\phi \, d\phi = \frac{3}{8}$,

e assim temos que

$$K = \omega_0 I - \frac{3I^2}{48ml^2} .$$

Essa é a forma perturbada de H, até primeira ordem.

A nova frequência de oscilação agora depende de I:

$$\omega = \frac{\partial K}{\partial I} = \omega_0 - \frac{I^2}{8ml^2}$$

Dado que $E = \omega_0 I - 3I^2/48ml^2$, podemos escrever I em termos de E (exercício) e assim vemos como a frequência depende da energia e, portanto, da amplitude das oscilações

– Dois ou mais graus de liberdade: caso não ressonante

Começamos escrevendo

$$H(\vec{I}^{(0)}, \vec{\phi}^{(0)}) = H_0(\vec{I}^{(0)}) + \varepsilon \, H_1(\vec{I}^{(0)}, \vec{\phi}^{(0)}) + \cdots$$

onde $\vec{I}^{(0)} = (I_1^{(0)}, I_2^{(0)}, \ldots, I_M^{(0)})$ e $\vec{\phi}^{(0)} = (\phi_1^{(0)}, \ldots, \phi_M^{(0)})$ são variáveis de ação e ângulo para H_0 com

$$\omega_K^{(0)} = \partial H_0 / \partial I_K^{(0)}$$

Novamente, buscamos uma transformação canônica: $(\vec{I}^{(0)}, \vec{\phi}^{(0)}) \longrightarrow (\vec{I}, \vec{\phi})$ tal que $K = K(\vec{I})$. Escrevemos assim

$$F_2(\vec{I}, \vec{\phi}^{(0)}) = \vec{I} \cdot \vec{\phi}^{(0)} + \varepsilon\, G_1(\vec{I}, \vec{\phi}^{(0)})$$

Assim como no caso unidimensional, podemos escrever as coordenadas antigas em termos das novas até $O(\varepsilon)$:

$$I_K^{(0)} = I_K + \varepsilon \frac{\partial G_1}{\partial \phi_K} \; ; \; \phi_K^{(0)} = \phi_K - \varepsilon \frac{\partial G_1}{\partial I_K}$$

De modo também análogo substituímos essa transformação na Hamiltonia:

$$K = H_0(J) + \varepsilon \overbrace{\Big[\underbrace{\sum_K \omega_K^{(0)} \frac{\partial G_1}{\partial \phi_K}}_{\equiv\, \vec{\omega}^{(0)} \cdot \nabla_\phi G_1} + H_1(\vec{I}, \vec{\phi}) \Big]}^{= K_1}$$

Nesse caso, também escolheremos G_1 tal que:

$$K = H_0(J) + \varepsilon \langle H_1 \rangle \text{, onde}$$

$$\langle H_1 \rangle \equiv \prod_{K=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_1(\vec{I}, \vec{\phi})\, d\phi_K$$

Contudo, a situação é mais complicada para determinarmos G_1 explicitamente. Primeiramente, consideramos que tanto G_1 quanto H_1 sejam periódicas em ϕ, de modo que:

$$G_1(\vec{I}, \vec{\phi}) = \sum_{\vec{m}} G_{1m}(\vec{I})\, e^{i\vec{m}\cdot\vec{\phi}}$$

$$H_1(\vec{I}, \vec{\phi}) = \sum_{\vec{m}} H_{1m}(\vec{I})\, e^{i\vec{m}\cdot\vec{\phi}}$$

$$\vec{m} = (m_1, \ldots, m_n) \text{ e } -\infty \leq m_i \leq \infty$$

Utilizando essa expansão em série de Fourier para as duas quantidades, temos que

$$K_1 = \vec{\omega}^{(0)} \cdot \nabla_\phi G_1 + H_1$$

$$= \sum_{\vec{m}} \left[i\,\vec{m}\cdot\vec{\omega}^{(0)} G_{1m}(\vec{I}) + H_{1m}(\vec{I}) \right] e^{i\vec{m}\cdot\vec{\phi}}$$

Como nossa escolha para K_1 não depende de $\vec{\phi}$, devemos fazer a seguinte escolha:

$$G_{1m} = \begin{cases} i\dfrac{H_{1m}(\vec{I})}{\vec{m}\cdot\vec{\omega}^{(0)}} , & \vec{m} \neq 0 \\ 0 , & \vec{m} = 0 \end{cases}$$

Isso automaticamente recupera nossa escolha para $K_1 = \langle H_1 \rangle$:

$$K_1 = H_{10}(\vec{I}) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi} \int H_1(\vec{I}, \vec{\phi})\, d\phi_k \equiv \langle H_1 \rangle ,$$

pela definição da transformada inversa de Fourier.

O problema em nossa abordagem ocorre quando o movimento não perturbado encontra-se em ressonância:

$$\vec{m}\cdot\vec{\omega}^{(0)} = \sum_k m_k \omega_k^{(0)} = 0 .$$

Desse modo, $\vec{m}\cdot\vec{\omega}^{(0)}$ pode ficar arbitrariamente pequeno e a série para G_1 pode não convergir. Note que essa convergência é, em princípio, independente da convergência ou não da série em ε!

Portanto, podemos ter problemas para determinarmos as novas variáveis de ação e ângulo se existe uma relação entre as frequências não perturbadas. Se o sistema original é não degenerado, "a maioria" dos toros invariantes não possuirá uma relação racional entre as frequências e uma expansão em ε em todas as ordens pode ser capaz de gerar novas variáveis de ação e ângulo mostrando que o sistema ainda é integrável. Que isso é verdade para perturbações suficientemente pequenas e "suficientemente irracionais" $\omega_k^{(0)}$ é a conclusão do famoso teorema KAM (Kolmogorov/Arnold/Moser)

(distorcemos nossos toros originais)

- Caso ressonante: exemplo com dois graus de liberdade

Para ilustrar o caso ressonante, considere um sistema com dois graus de liberdade tal que $\frac{\omega_1^{(0)}}{\omega_2^{(0)}} = r/s$ r e s inteiros e primos entre si. Esse é um toro ressonante

Agora $\vec{m}\cdot\vec{\omega}^{(0)} = \begin{cases} 0, & \text{se } m_1 = m_2 = 0 \\ 0, & \text{se } m_1 = ps \text{ e } m_2 = -pr \end{cases}$

$$ps\,\omega_1^{(0)} - pr\,\omega_2^{(0)} = \omega_2^{(0)}\left[ps\,r/s - pr\right] = 0$$

Precisamos então modificar nossa condição para zerar os termos em K_1

$$K_1 = \sum_{\vec{m}} \left[i\vec{m}\cdot\vec{\omega}^{(0)} G_{1m} + H_{1m} \right] e^{i\vec{m}\cdot\vec{\phi}}$$

Agora, devemos ter $G_{1m} = 0$ $\begin{cases} (m_1, m_2) = (0,0) \\ (m_1, m_2) = p(s, -r) \end{cases}$

Para os demais valores de $\vec{m}$, a condição $G_{1m} = i\,H_{1m}(I)/\vec{m}\cdot\vec{\omega}^{(0)}$ continua válida

Vemos então que

$$K_1 = H_{10} + \sum_{p\neq 0} H_{1,p}\, e^{ip(s\phi_1 - r\phi_2)}$$

Ou seja, não conseguimos eliminar a dependência angular do segundo termo $\Rightarrow$ quebra de integrabilidade (ao menos em primeira ordem em ε). Vamos mostrar que essa quebra de integrabilidade leva ao aparecimento de ilhas ressonantes cercadas de um mar caótico.

Como K_1 é real, devemos ter $K_1^* = K_1$

$$K_1^* = H_{10} + \sum_{p\neq 0} H_{1,p}^*\, e^{-ip(s\phi_1 - r\phi_2)}$$

$$= H_{10} + \sum_{q\neq 0} H_{1,-q}^*\, e^{iq(s\phi_1 - r\phi_2)}$$

$$\Rightarrow H_{1,-p}^* = H_{1,p}$$

Por simplicidade, tomaremos H_1 real, ~~não~~ altera as conclusões gerais, e temos

$$K_1 = H_{10} + \sum_{p>0} H_{1,p}\, e^{ip(s\phi_1 - r\phi_2)} + \underbrace{\sum_{p<0} H_{1,p}\, e^{ip(s\phi_1 - r\phi_2)}}_{\sum_{p>0} H_{1,-p}\, e^{-ip(s\phi_1 - r\phi_2)}}$$

$$K_1 = H_{10} + \sum_{p=1}^{\infty} 2H_{1,p} \cos\left[p(s\phi_1 - r\phi_2)\right]$$

Vamos agora fazer a seguinte transformação canônica $(\vec{I},\vec{\phi}) \longrightarrow (\vec{J},\vec{\theta})$

$$J_1 = I_1/s \; ; \; J_2 = I_2 + rI_1/s \; ; \; \theta_1 = s\,\phi_1 - r\phi_2 \; ; \; \theta_2 = \phi_2$$

Nessas novas variáveis temos que

$$K_1 = H_{10}(\vec{J}) + \sum_{p=1}^{\infty} 2H_{1,p}(\vec{J}) \cos\left[p\,\theta_1\right]$$

Vamos também assumir que apenas $H_{1,1}$ dê uma contribuição apreciável pois termos com $p>1$ "oscilam muito rapidamente"

$$H_{1,p} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \; e^{-ip\theta} \; H_1(\theta) \approx 0, \quad p>1$$

$$K_1 \simeq H_{10}(\vec{J}) + 2\alpha_1(\vec{J}) \cos(p\,\theta_1), \; \alpha_1(\vec{J}) \equiv H_{1,p}(\vec{J})$$

A forma final de nossa Hamiltoniana é

$$K = H_0(\vec{J}) + \varepsilon\, H_{10}(\vec{J}) + 2\varepsilon\alpha_1(\vec{J}) \cos\theta_1$$

Como θ_2 não aparece, reduzimos o problema a um movimento unidimensional

Os pontos de equilíbrio do sistema, que correspondem a órbitas periódicas, são dados por (J_1^*, θ_1^*):

$$\frac{\partial K}{\partial J_1} = \frac{\partial H_0}{\partial J_1} + \varepsilon \frac{\partial H_{10}}{\partial J_1} + 2\varepsilon \frac{\partial \alpha_1}{\partial J_1} \cos\theta_1 = 0 \quad (*)$$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta_1} = -2\varepsilon\alpha_1 \sin\theta_1 = 0 \Rightarrow \theta_1^* = 0 \text{ ou } \pi$$

Temos então dois pontos de equilíbrio $\theta_1^* = 0, \pi$. Isso é equivalente ao pêndulo simples. Para encontrar J_1^* temos resolver $(*)$. De qualquer modo, podemos expandir K ao redor de J_1^*

$$K \simeq K(\vec{J}_1^*) + \underbrace{\cancel{\frac{\partial K}{\partial J_1}\Big|_{J_1=J_1^*}}}_{0}(J_1 - J_1^*) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 K}{\partial J_1^2}\Big|_{J_1=J^*}(\overbrace{J_1 - J_1^*}^{=\Delta J_1})^2$$

Além disso $$\frac{\partial^2 K}{\partial J_1^2} = \overbrace{\frac{\partial^2 H_0}{\partial J_1^2}}^{G} + O(\varepsilon)$$

Com todas essas simplificações:

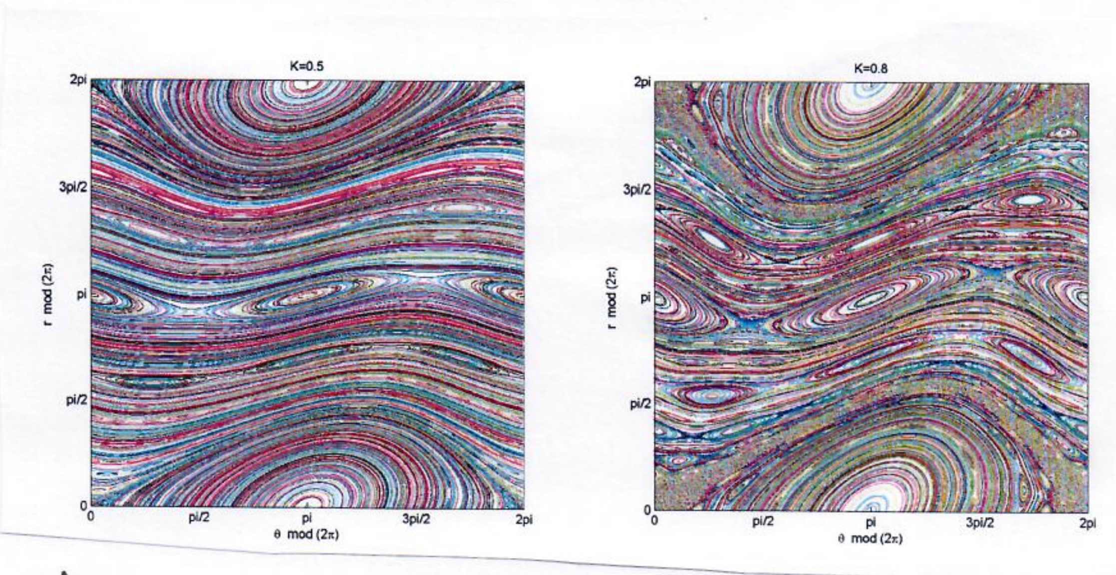
$$K = \frac{G}{2}(\Delta J_1)^2 - F\cos\theta_1 + \text{constantes}$$

$$G = \frac{\partial^2 H_0}{\partial J_1^2} \quad e \quad F = -2\varepsilon\alpha_1$$

Essa é a Hamiltoniana do pêndulo simples. A ilha de estabilidade corresponde ao movimento oscilatório do pêndulo.
A largura dessa ilha pode ser estimada fazendo $\Delta K = 0$ para $\theta_1 = 0$:

$$\Delta J_1 \sim \sqrt{F/G} \sim \sqrt{\frac{-2\alpha_1}{\underbrace{G}_{\text{tem que ser} > 0}}\varepsilon} \sim \sqrt{\varepsilon}$$

Vemos então que a largura da ressonância diminui com a raiz quadrada da perturbação



Nessa figura temos exemplos da formação dessas ilhas de estabilidade e do mar caótico no espaço de fase do "mapa padrão". Voltaremos a discuti-lo no futuro.