Exercícios do conteúdo da aula 8 - capítulo 4

(1) Sabe-se que os parafusos produzidos por uma certa companhia são defeituosos com probabilidade 0,01, independentemente uns dos outros (isto é, a fração não=conforme de parafusos na produção é 0,01). A companhia vende os parafusos em pacotes de dez unidades e oferece uma garantia de devolução do dinheiro caso existam dois ou mais parafusos defeituosos no pacote com dez parafusos

(a) Qual é a proporção de pacotes vendidos para os quais a companhia deve efetuar a devolução do dinheiro?

(b) Suponha que o número de parafusos defeituosos em um determinado pacote é independente dos demais pacotes, qual a probabilidade de que uma pessoa que compra dez pacotes de parafusos tenha que retornar a companhia para devolução do dinheiro?

(2) Suponha que o número de erros tipográficos em uma única página de um livro tem distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = \frac{1}{2}$

(a) Calcule a probabilidade de existir exatamente dois erros tipográficos em uma página

(b) Calcule a probabilidade de que exista pelo menos um erro em uma página

(c) Suponha agora que o livro em questão possui 20 páginas. Qual é a probabilidade de não existir erros tipográficos neste livro?

(6) Com a finalidade de aumentar a arrecadação do seu sistema de loterias, a Caixa Econômica Federal implantou um novo jogo chamando Loto II, no qual o apostador escolhe seis dezenas do conjunto $\{01,02,\cdots,50\}$. Toda semana, a Caixa sorteia seis dezenas desse conjunto e atribui prêmios aos acertadores da:

(a) Sena – as seis dezenas sorteadas

(b) Quina – cinco das dezenas sorteadas

(c) Quadra – quatro das dezenas sorteadas

Determine a probabilidade de que uma pessoa que aposta na Loto II ganhe algum dos prêmios oferecidos

(7) Um apostador da Loto II (descrita no exercício 6) é acusado de conhecer previamente o resultado das dezenas sorteadas, uma vez que ganhou doze prêmios da Loto II em um único ano, fato considerado extremamente raro. Construa um modelo probabilístico adequado ao problema e verifique a validade de tal acusação.

Veja a pouco edificante história do deputado federal João de Deus. Ele ganhou na loteria 200 vezes! Ele disse: “Deus me ajudou e eu ganhei muito dinheiro!”
https://pt.wikipedia.org/wiki/Jo%C3%A3o_Alves_de_Almeida

(1) Parafuso é uma prova de Bernoullie, e o número de parafusos com defeito no pacote tem uma distribuição Binomial

(a) $P(X \geq 2) = ?$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{N-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0{,}1^0 0{,}9^{10} \cong 0{,}349$$

$$P(X = 1) = \binom{10}{1} 0{,}1^1 0{,}9^9 \cong 0{,}387$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) \cong 1 - [0{,}349 + 0{,}387] \cong 0{,}264$$

(b) Agora há uma nova distribuição Binomial: a qtde de pacotes a serem devolvidos
N=10
p = 0,267

$P(X \geq 1) = ?$
$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$

$$P(X = 0) = \binom{10}{0} 0{,}264^0 0{,}736^{10} \cong 0{,}047$$

$$P(X \geq 1) \cong 1 - 0{,}047 \cong 0{,}953$$

(2) Distribuição de Poisson, λ = 1/2 e t =1 (1 página). S $\lambda = \lambda.t =$ 1/2

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} = \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!}$$

(a) $P(X = 2) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2!} \cong 7{,}58\%$

(b) $P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0)$

$$P(X = 0) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^0}{0!} = e^{-\frac{1}{2}} \cong 60{,}65\% \rightarrow P(X \geq 1) \cong 39{,}35\%$$

(c) Tem duas formas de resolver este problema.
A primeira e mudar o valor de "t" para 20 páginas

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} \rightarrow P(X = 0) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{1}{2}\times 20} \cong 0{,}0045\%$$

A outra forma é perceber que há uma distribuição Binomial aqui. Cada página é uma prova de Bernoulli com probabilidade de sucesso igual a 0,3935. Qual é a probabilidade de ZERO sucesso em 20 provas

$$P(X=0) = \binom{20}{0} 0{,}264^0 0{,}736^{10} \cong 0{,}0045\%$$

Caso você tenha encontrado um valor um pouco diferente, pode ter sido por conta da aproximação (número de casas decimais consideradas na conta)

(6) ganhar na Loto. Dentro 50 números, seis são sorteados

Número de resultados possíveis é a combinação de 50, 6 a 6

$$\binom{50}{6} = \frac{50!}{6!(50-6)!} = 28.989.675$$

Uma forma de ver o problema é que os 50 números se dividem em dois grupos: 6 números sorteados e 44 números não sorteados. E a aposta do jogador tem 6 numero que se diviem em dois grupos também: acertos e erros. Portanto a probabilidade de ter X acertos, onde X vai de 0 até 6, é dado por:

$$P(X = Acertos) = \frac{\binom{6}{Acertos}\binom{44}{Erros}}{\binom{50}{6}} = \frac{\binom{6}{Acertos}\binom{44}{6-Acertos}}{\binom{50}{6}}$$

Sena: $P(X=6) = 1{,}59 \times 10^{-5}$

Quina: $P(X=5) = 3{,}82 \times 10^{-4}$

Quadra: $P(X=4) = 4{,}3 \times 10^{-3}$

Probabilidade de ganhar algum prêmio: $P(X=6) + P(X=5) + P(X=4) \cong 0{,}47\%$

(7) Um apostador ganhou 12 vezes em um ano, em 50 extrações da loteria. Cada extração é uma prova de Bernoulli com taxa de sucesso 0,0047. Qual é a probabilidade de se ter 12 sucessos em 50 provas destas?

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

$$P(X = 12) = \binom{50}{12} 0{,}0047^{12} 0{,}9953^{38} = 1{,}18 \times 10^{-17}$$

Esta probabilidade é muito baixa! Houve trapaça!!

(a) A probabilidade de acertar na sena com uma aposta é $= \frac{1}{28.989.675}$

(b) O jogo do apostar pode ganhar em uma