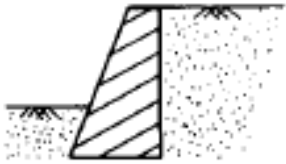


# Empuxos

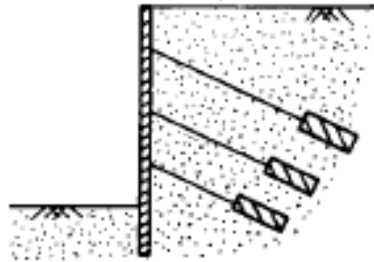
Fernando A. M. Marinho  
2015

Waldmar Hachich  
2019

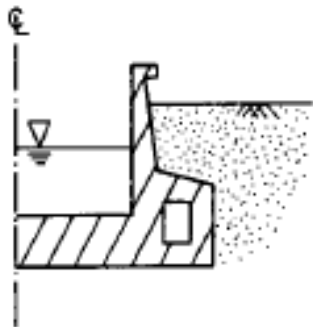
# Estruturas de Contenção



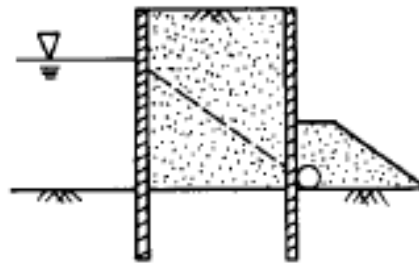
Rigid Gravity Retaining Wall



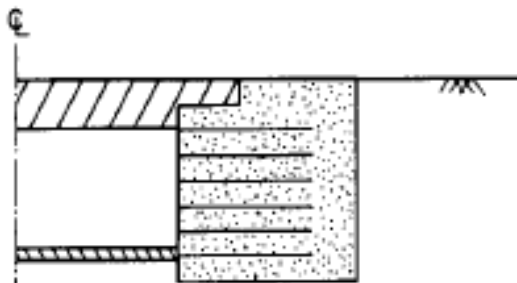
Flexible Tied Back Excavation Support Wall



U-Frame Navigation Lock



Cellular Cofferdam



Reinforced Earth Fill



# Problemas... e arte



# Coeficiente de empuxo lateral

Na Água

$$K = \frac{\sigma_h}{\sigma_v} = 1$$

No Gelo

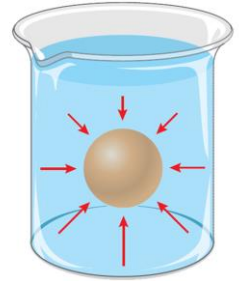
$$K = \frac{\sigma_h}{\sigma_v} < 1$$

No Solo ou Rocha

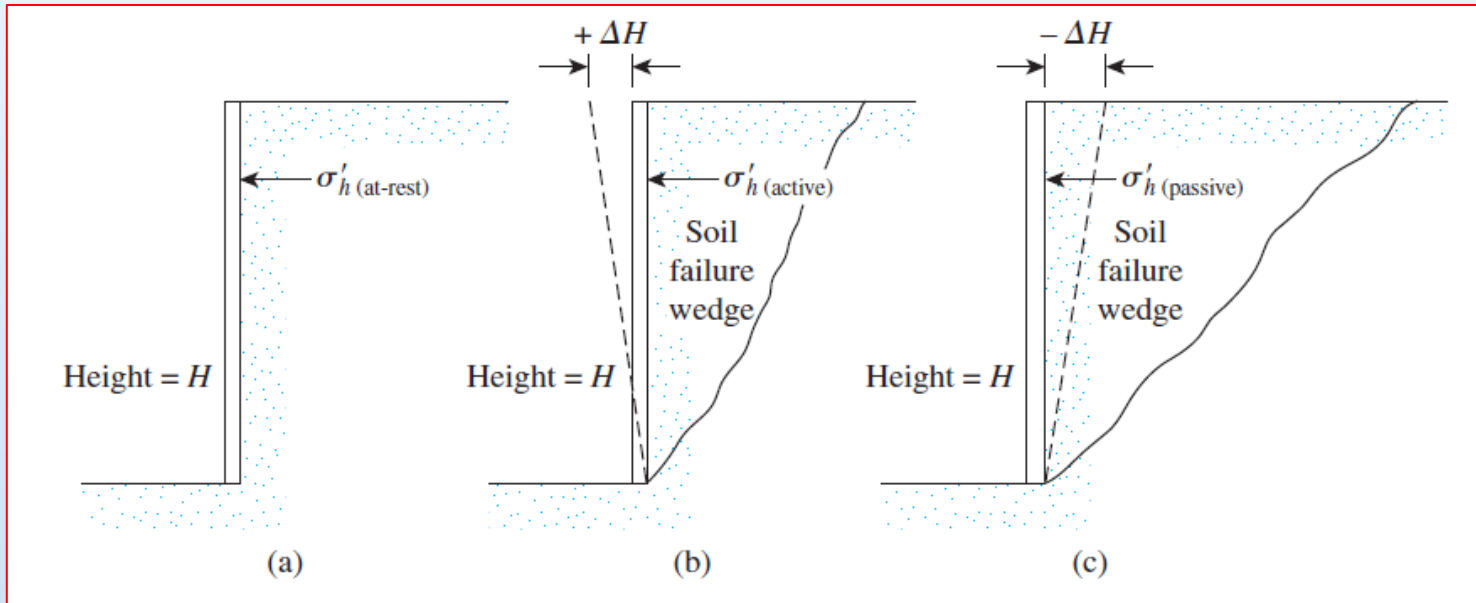
$$K = \frac{\sigma_h}{\sigma_v} \text{ de } < 1 \text{ a } > 1$$



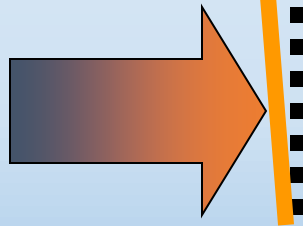
Pressão em um corpo imerso



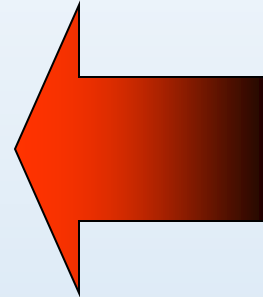
## Natureza do Empuxo de Terra em Contenções



**Empuxo Passivo:** É a tensão limite entre o solo e o anteparo, decorrente de tendência de aproximação do anteparo em relação ao solo, no sentido de comprimir / “empurrar” o solo horizontalmente.



**Empuxo Ativo:** É a tensão limite entre o solo e um anteparo, decorrente de tendência de afastamento do anteparo em relação ao solo, no sentido de expandir / “aliviar” o solo horizontalmente.



# Coeficientes de empuxo de terra

- Relação **SEMPRE** entre tensões **EFETIVAS** !

- $K = \frac{\sigma'_h}{\sigma'_v}$

- $K_a = \frac{\sigma'_a}{\sigma'_v}$

ATIVO

- $K_0 = \frac{\sigma'_{h_0}}{\sigma'_{v_0}}$

REPOUSO

(SUBSCRITO 0 INDICA "SEM DESLOCAMENTO")

- $K_p = \frac{\sigma'_p}{\sigma'_v}$

PASSIVO

A rigor deveria ser  $K'$  (em vez de  $K$ ), para explicitar o “**efetivo**”.

Mas, como se trata de ponto pacífico, imaginado de conhecimento geral, em todo o tratamento do assunto “empuxos” é usual não utilizar o apóstrofo.

# Coeficiente(s) de empuxo de água

- $K_w = \frac{u_h}{u_v} = 1$

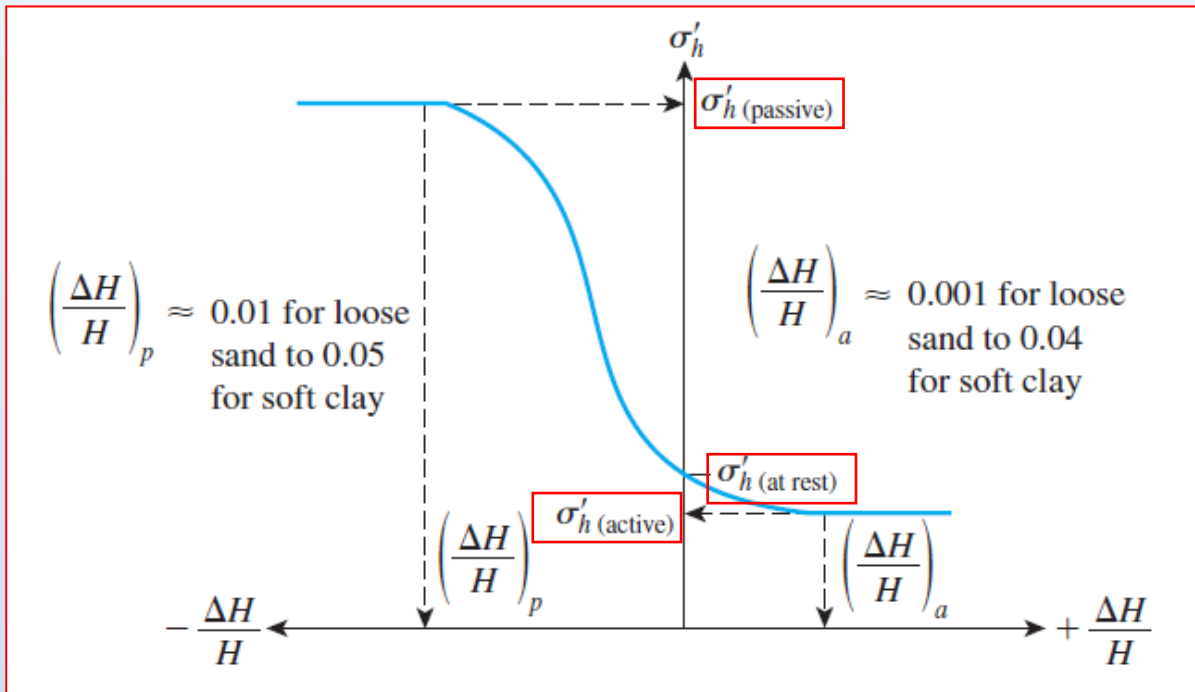
- $K_{w_a} = \frac{u_a}{u_v} = 1$       ATIVO

- $K_{w_0} = \frac{u_{h_0}}{u_{v_0}} = 1$       REPOUSO  
(SUBSCRITO 0 INDICA "SEM DESLOCAMENTO")

- $K_{w_p} = \frac{u_p}{u_h} = 1$       PASSIVO

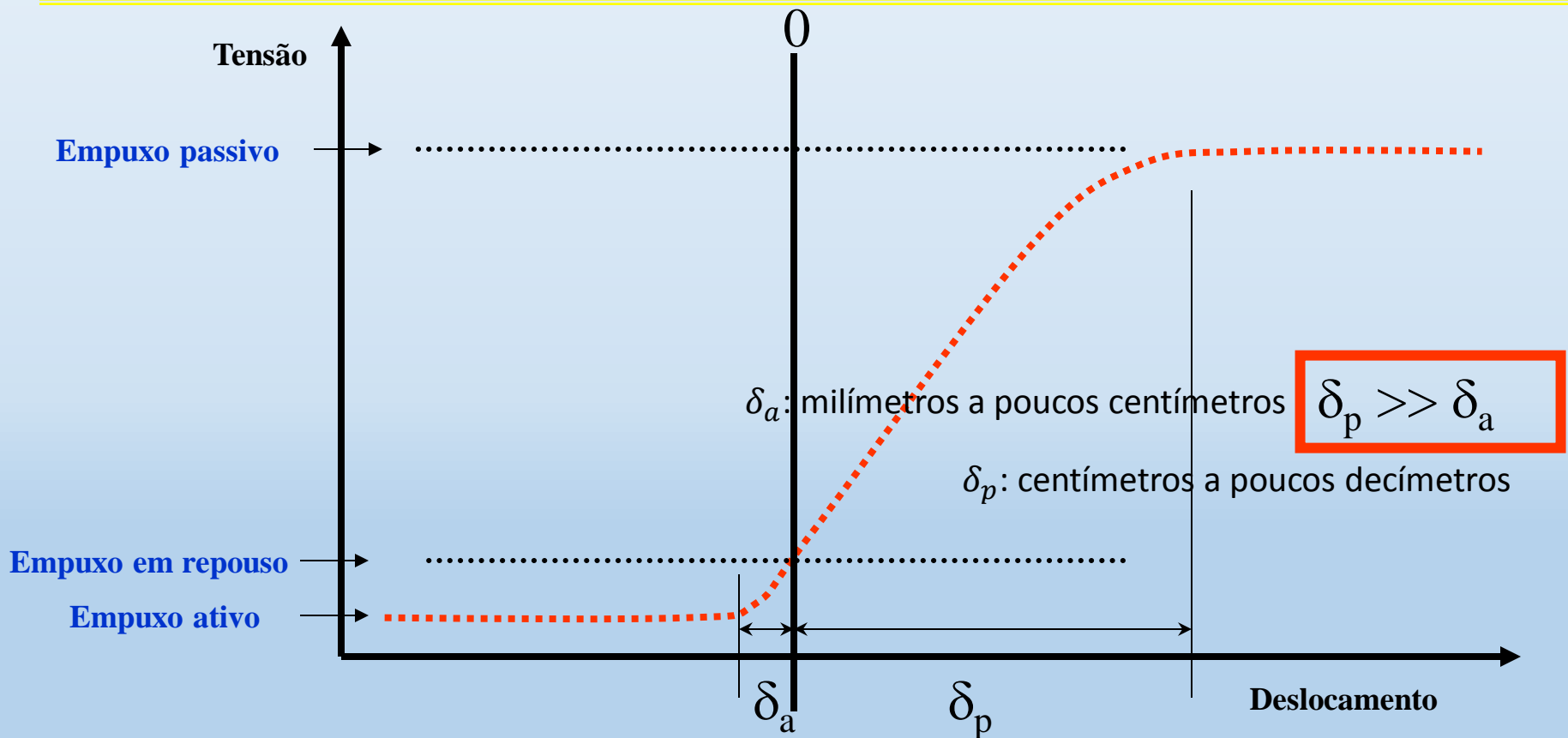


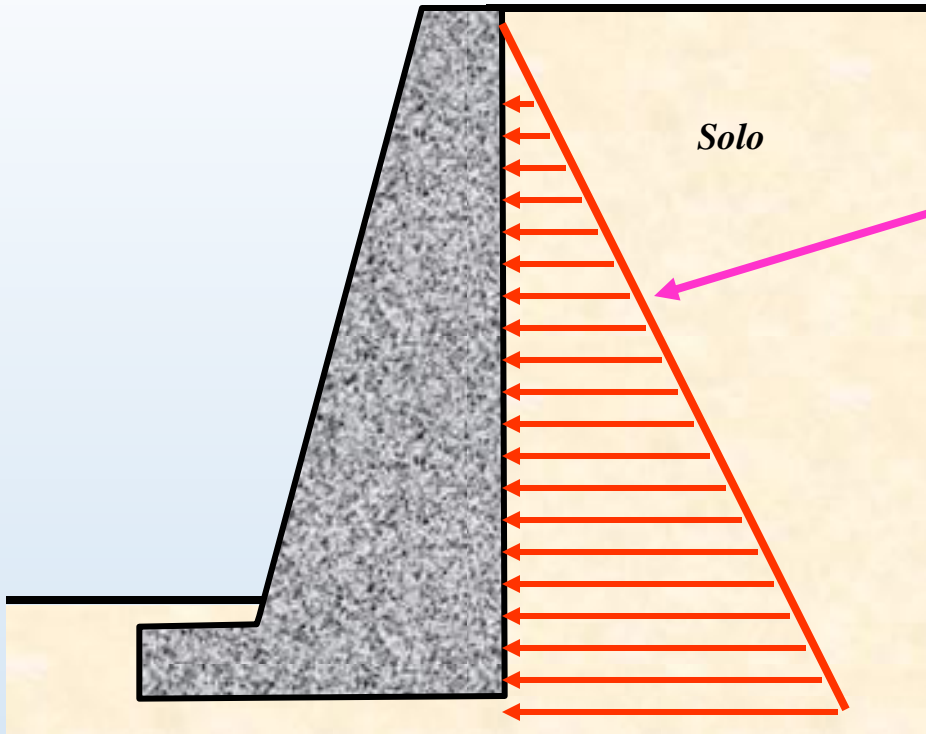
### Natureza da variação do empuxo lateral a uma certa profundidade



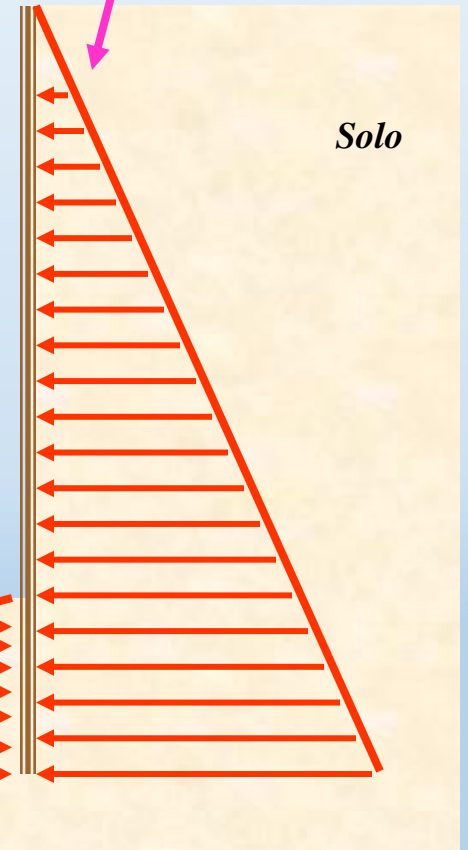
# Empuxo de Terra

- ❖ Empuxo em Repouso (nenhum deslocamento do muro e nenhuma mudança nas tensões horizontais).
- ❖ Empuxo Ativo (afastamento do muro e decréscimo das tensões horizontais).
- ❖ Empuxo Passivo (aproximação do muro e aumento das tensões horizontais).



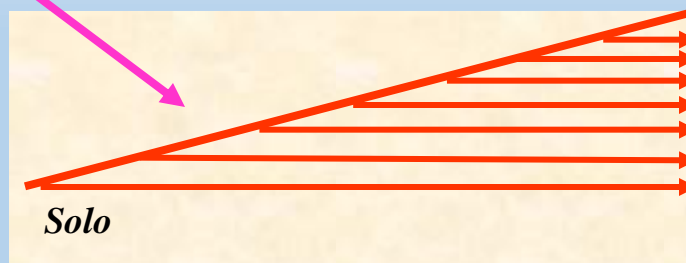


*Distribuição teórica do empuxo ativo*



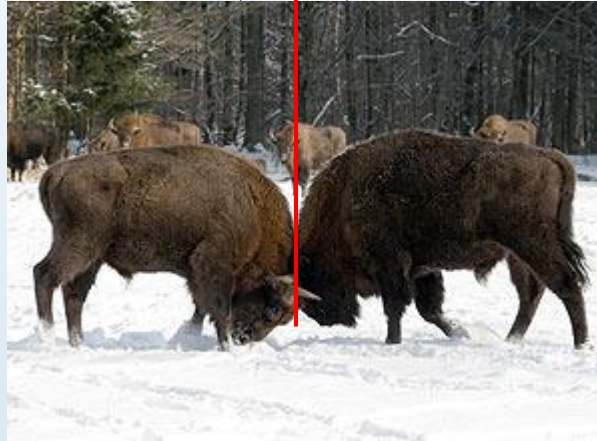
*Solo*

*Distribuição teórica do empuxo passivo*



*Solo*

Repouso  $\Rightarrow |F_E| = |F_D|$

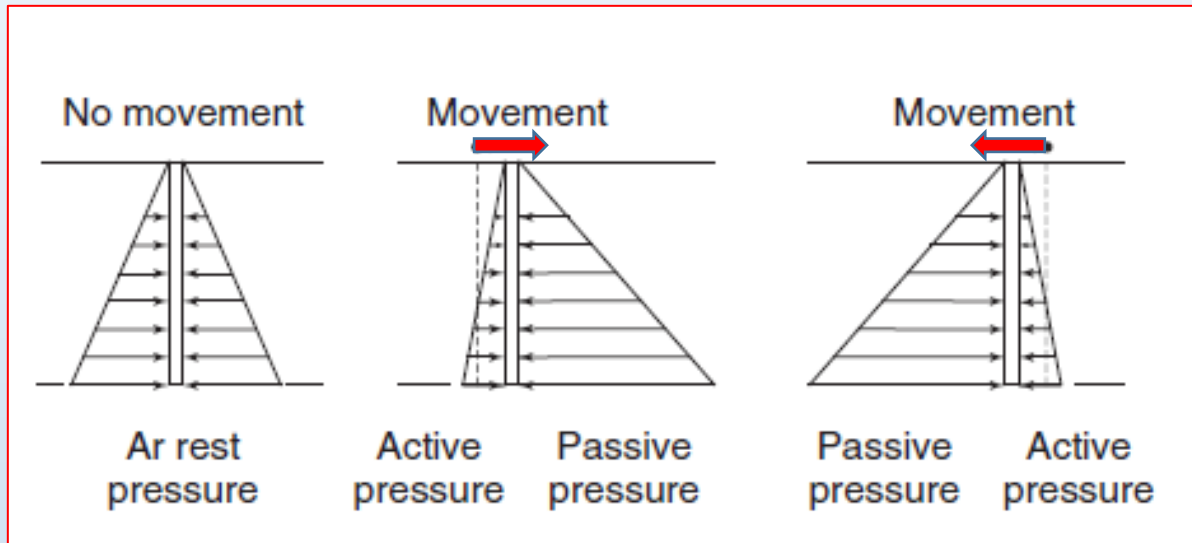


No sistema,  
 $\vec{F}_E + \vec{F}_D = 0.$

Lei de movimento de Newton: objeto em repouso  
Quando um objeto está sujeito a forças iguais e opostas ele está em repouso.



## Natureza do Empuxo de Terra



Repouso

$$s = c' + \sigma' \tan \phi'$$

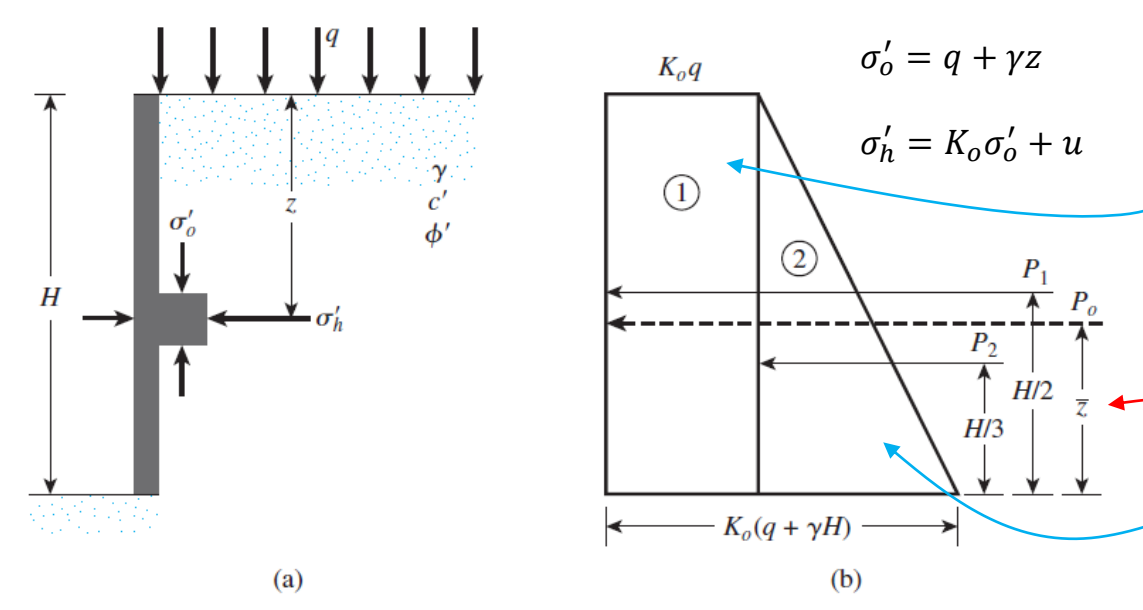
where  
 $c'$  = cohesion  
 $\phi'$  = effective angle of friction  
 $\sigma'$  = effective normal stress

Jaky (1944) – Normalmente adensado

$$K_o \approx 1 - \text{sen}\phi'$$

Mayne & Kihawy (1982) – Sobre-adensado

$$K_o = (1 - \text{sen}\phi')OCR^{\text{sen}\phi'}$$



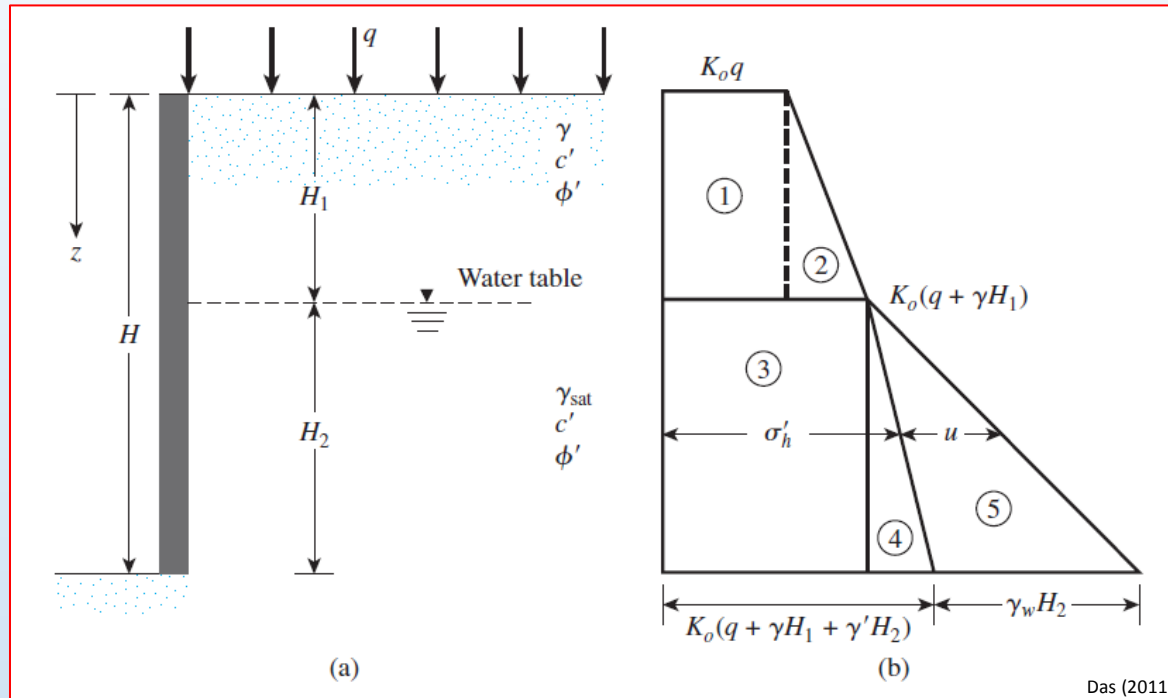
Das (2011)

$$P_o = P_1 + P_2 = qK_oH + \frac{1}{2}\gamma H^2 K_o$$

Se a sobrecarga é zero e não há pressão de água o diagrama é triangular

$$\bar{z} = \frac{P_1 \left(\frac{H}{2}\right) + P_2 \left(\frac{H}{3}\right)}{P_o}$$

Presença do nível de água



$$P_o = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

where  $A$  = area of the pressure diagram.

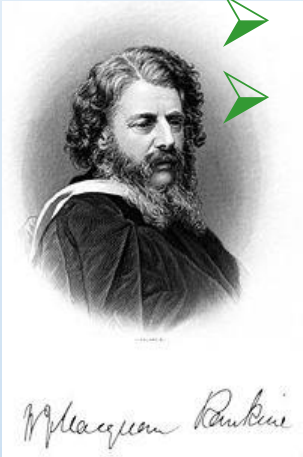
So,

$$P_o = K_o q H_1 + \frac{1}{2} K_o \gamma H_1^2 + K_o (q + \gamma H_1) H_2 + \frac{1}{2} K_o \gamma' H_2^2 + \frac{1}{2} \gamma_w H_2^2 \quad (7.7)$$

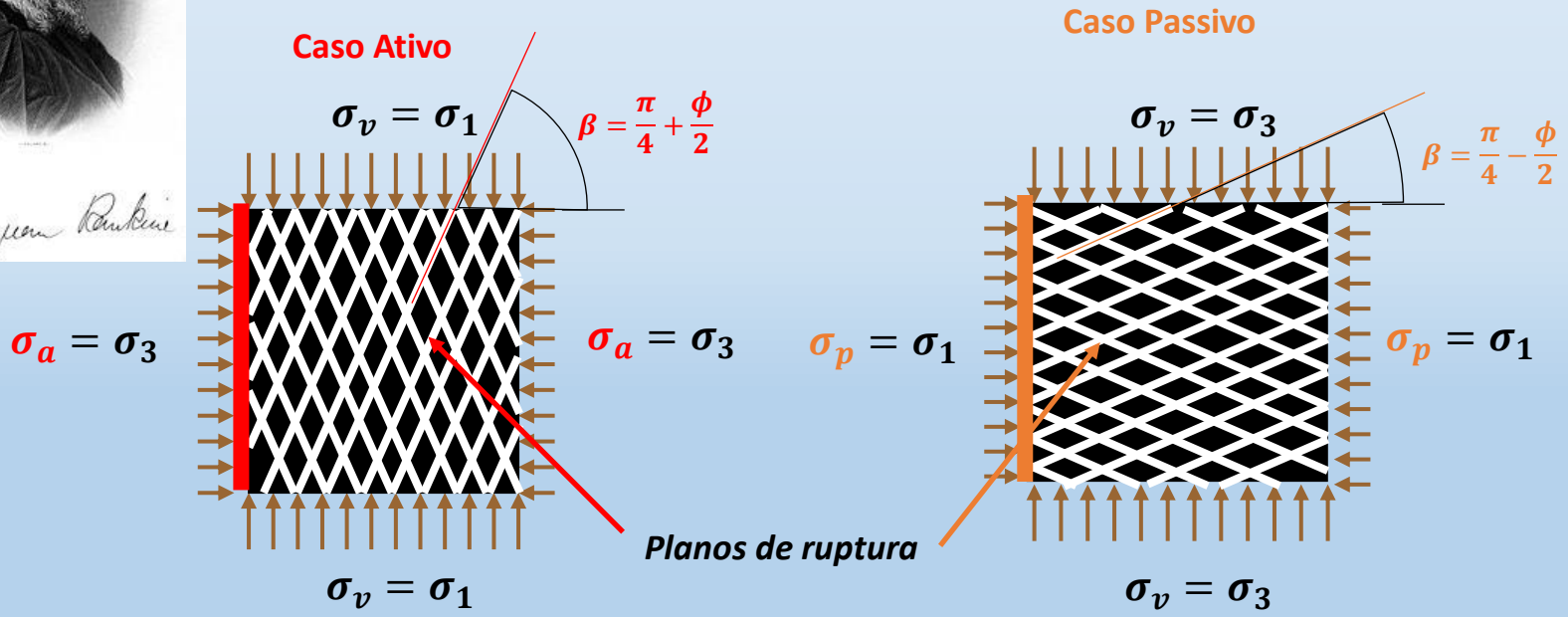
➤ Teoria de Empuxo de **Rankine (1857)** admite (em sua forma original):

- interface muro-solo sem atrito
- paramento do muro é vertical
- o terrapleno é horizontal
- o muro é flexível e em semi-espaco infinito
- solo não coesivo

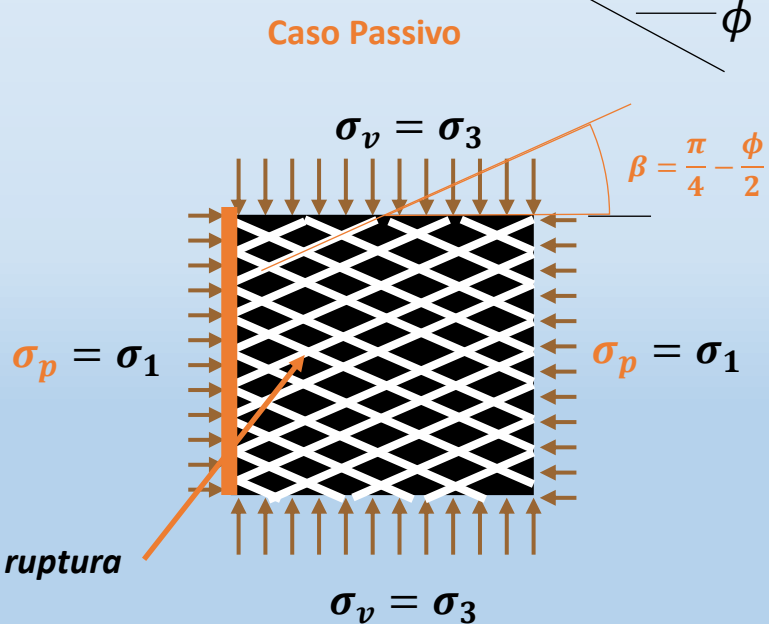
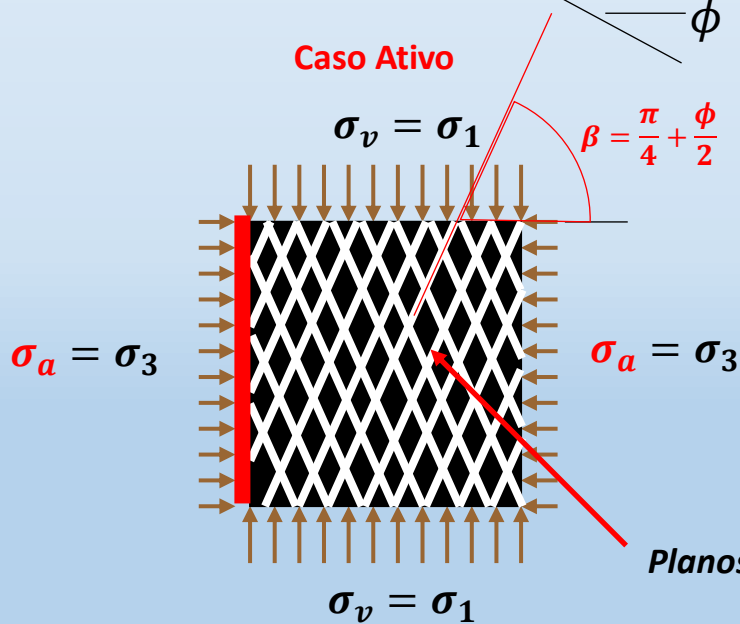
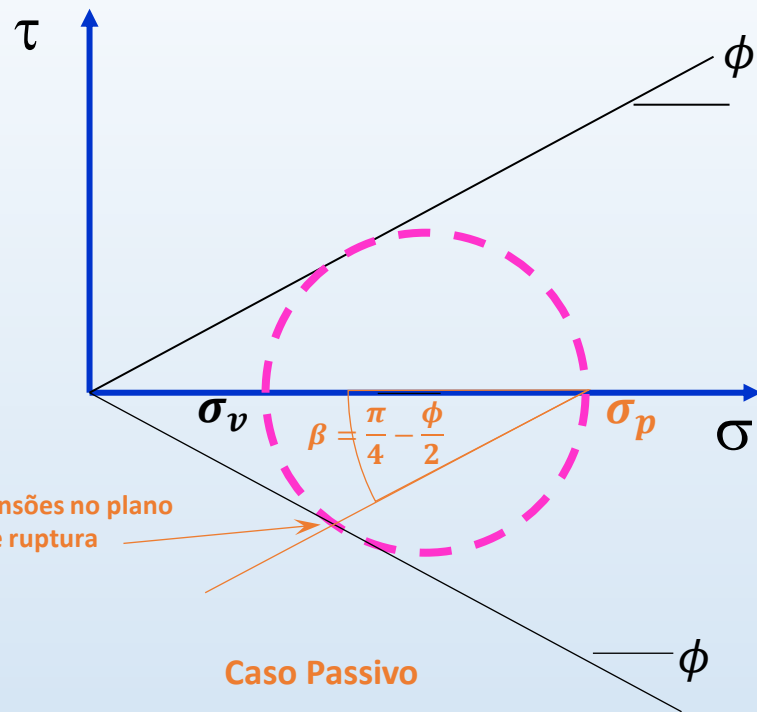
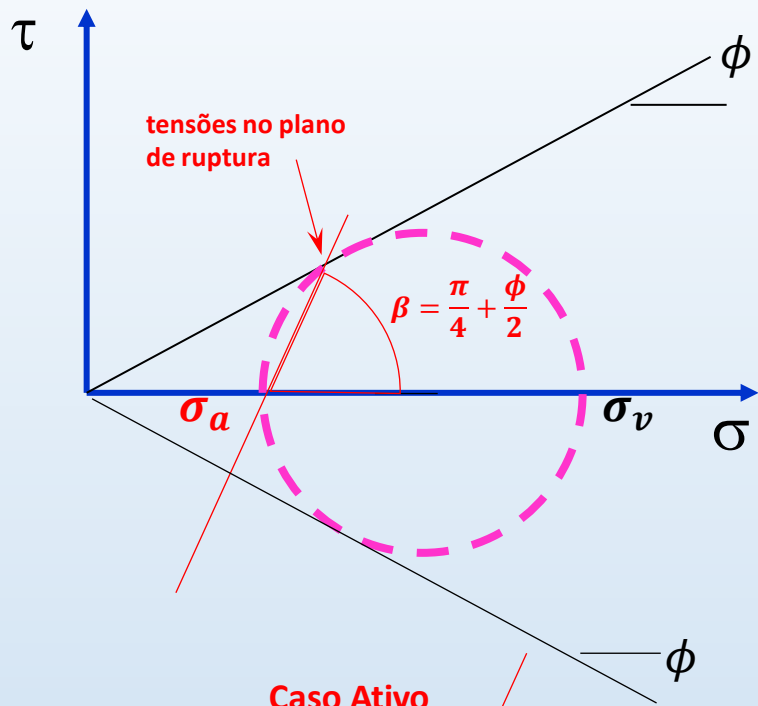
→  
Decorre diagrama triangular de tensões de empuxo (só normais)



William Rankine

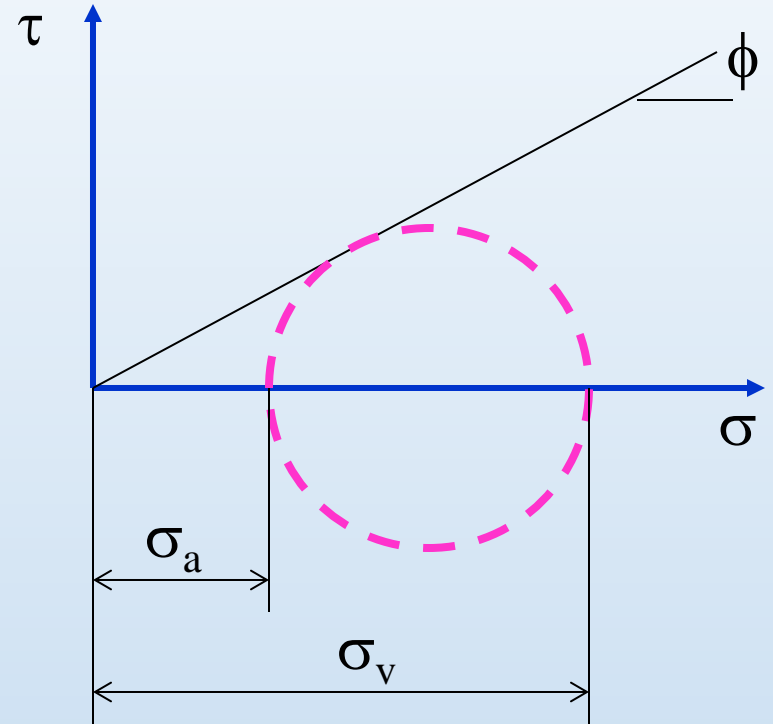
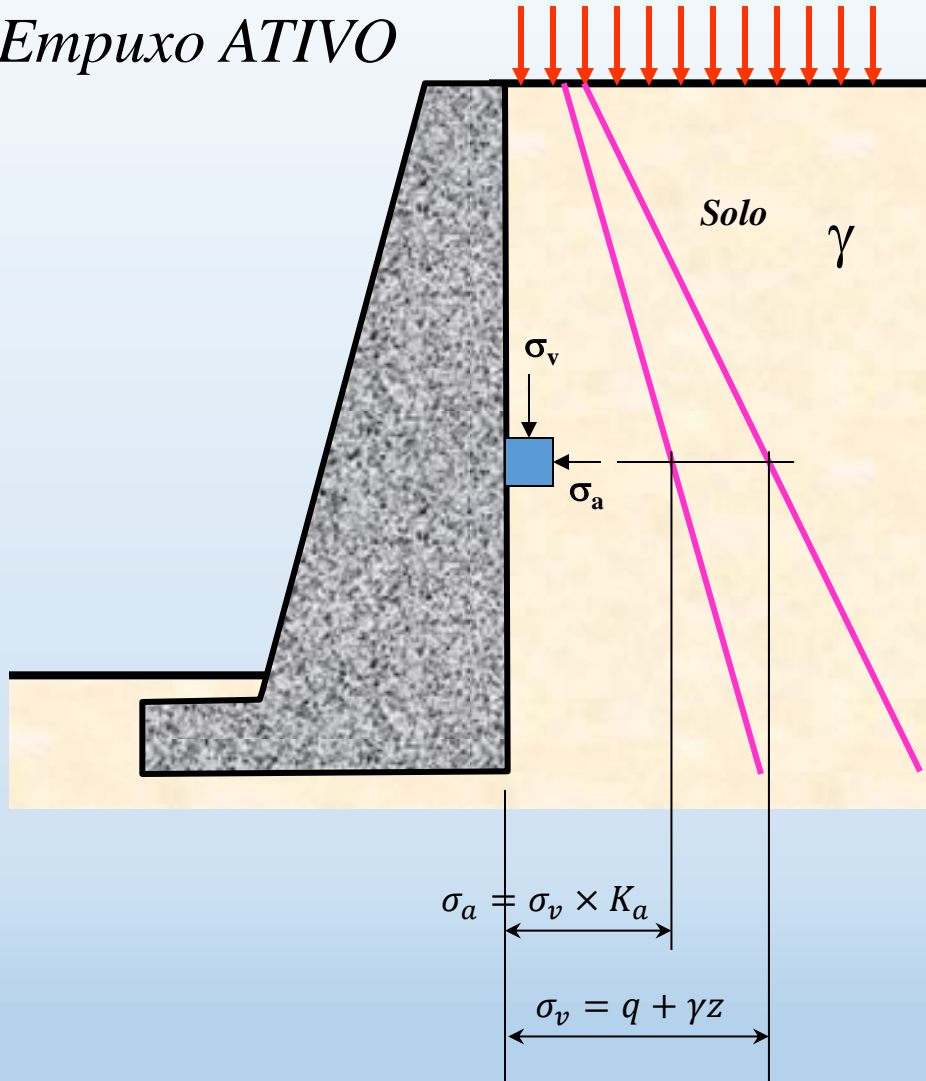






# Rankine (com sobrecarga)

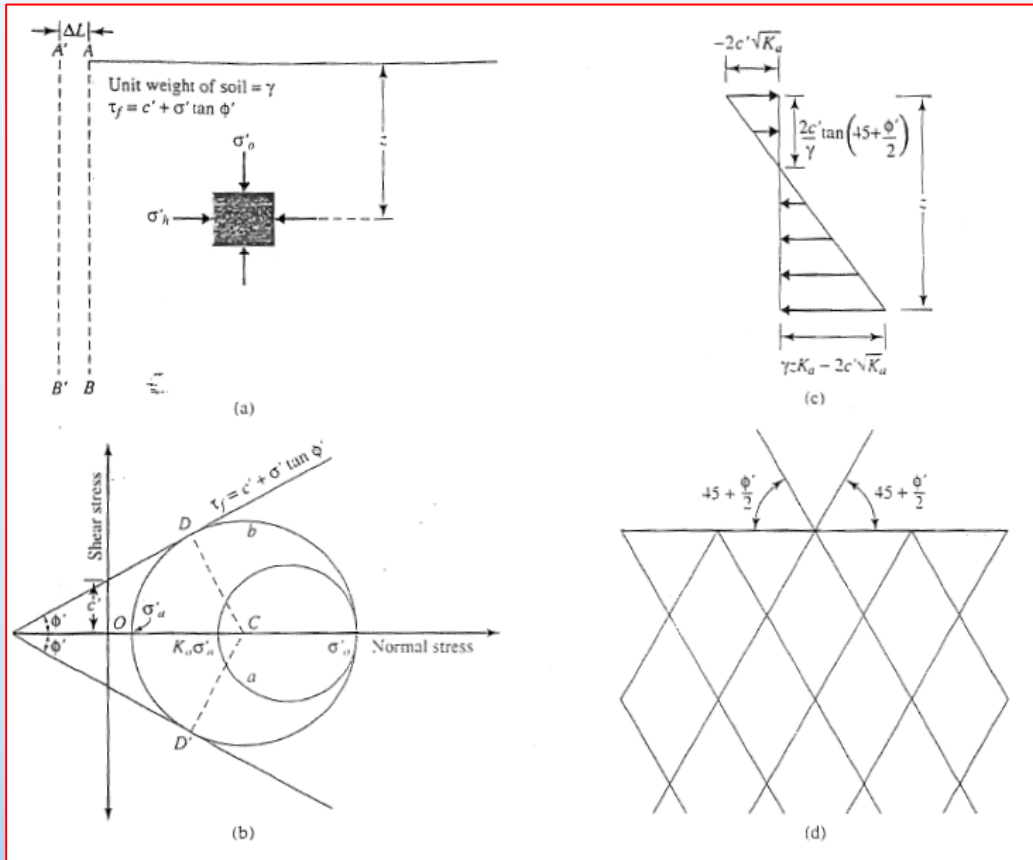
*Empuxo ATIVO*



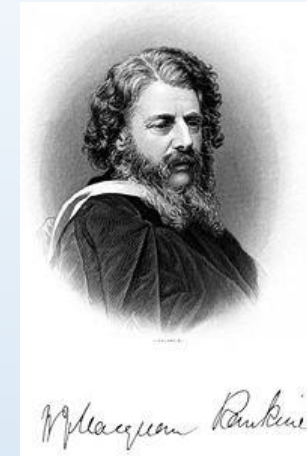
$$K_a = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = \tan^2 \left( 45 - \frac{\phi}{2} \right)$$

**RELEBRANDO: O COEFICIENTE DE EMPUXO SÓ SE APLICA A TENSÕES EFETIVAS**

Empuxo ativo, agora em solo cuja resistência apresenta intercepto de coesão



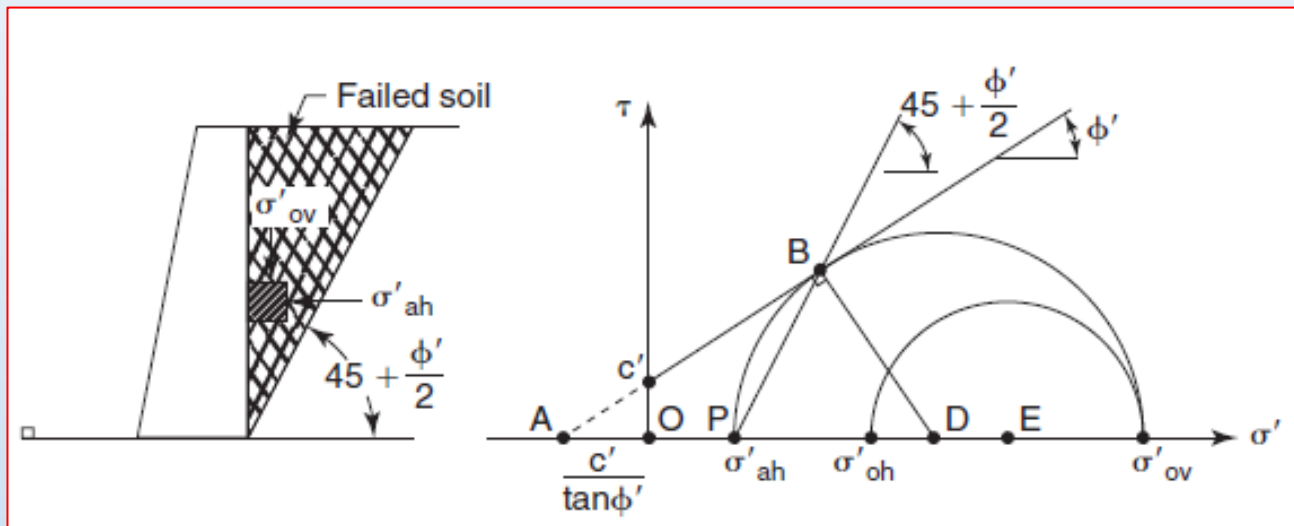
Das (2006)



Rankine (1857)

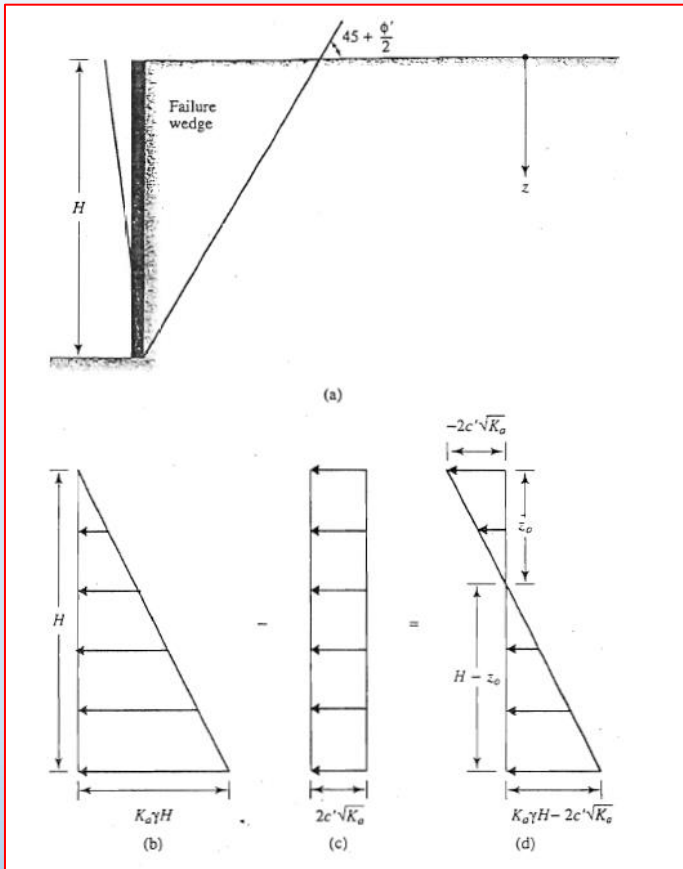
Paramento do muro é vertical  
 Não há atrito entre o muro e o solo  
 Solo homogêneo e isotrópico  
 Solo inicialmente no repouso  
 Superfície crítica é plana a  $45 + \phi/2$   
 Força resultante horizontal

## Empuxo ativo e o estado de tensão no círculo de Mohr



Briaud (2013)

## Empuxo ativo



Das (2006)

Para a condição não drenada



$$\begin{aligned}\phi_u &= 0 \\ K_a &= 1 \text{ (água!)} \\ c &= s_u\end{aligned}$$

$$\sigma_a = \gamma z - 2s_u$$

$$\sigma'_a = \gamma z \tan^2\left(45 - \frac{\phi'}{2}\right) - 2c' \tan\left(45 - \frac{\phi'}{2}\right)$$

$$\sigma'_a = K_a \gamma z - 2c' \sqrt{K_a}$$

A profundidade na qual a pressão ativa se torna zero é obtida por:

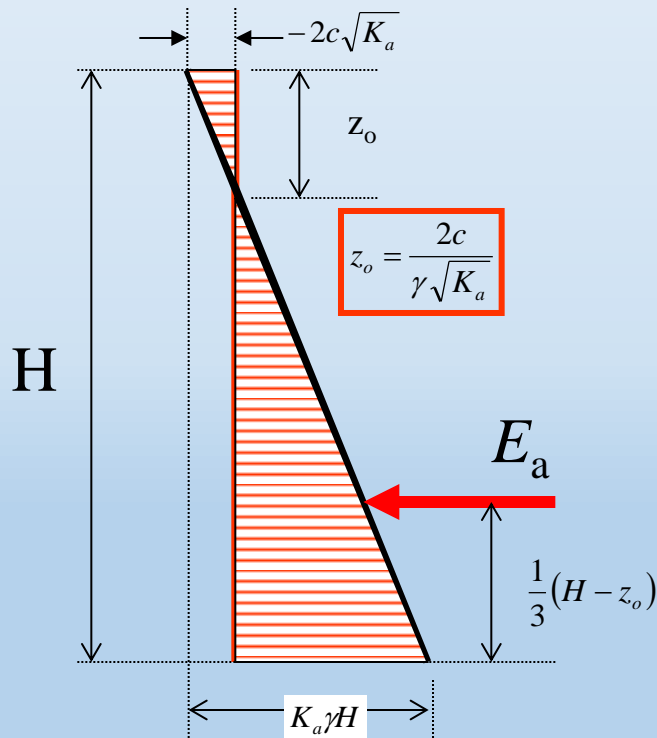
$$K_a \gamma z_o - 2c' \sqrt{K_a} = 0$$

Com o tempo a trinca de tração irá se desenvolver

$$z_o = \frac{2c'}{\gamma \sqrt{K_a}}$$

# Rankine

**Distribuição do empuxo ATIVO  
(sem sobrecarga superficial)**



$$\sigma_a = K_a\gamma z - 2c\sqrt{K_a}$$

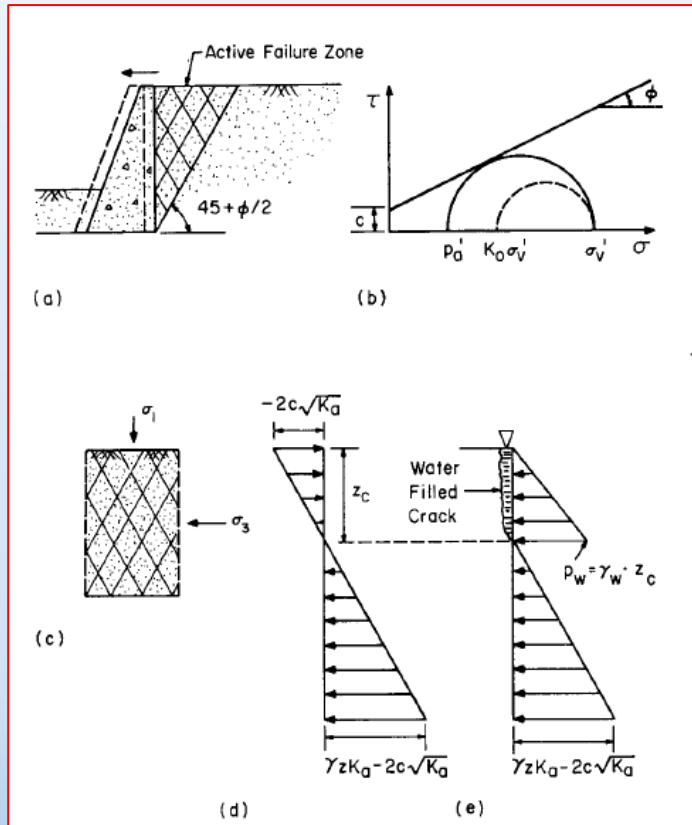
$K_a$  - coeficiente de empuxo ativo

$$E_a = \int_{z_o}^H \sigma_a dz \quad (\text{desconsiderada a tração})$$

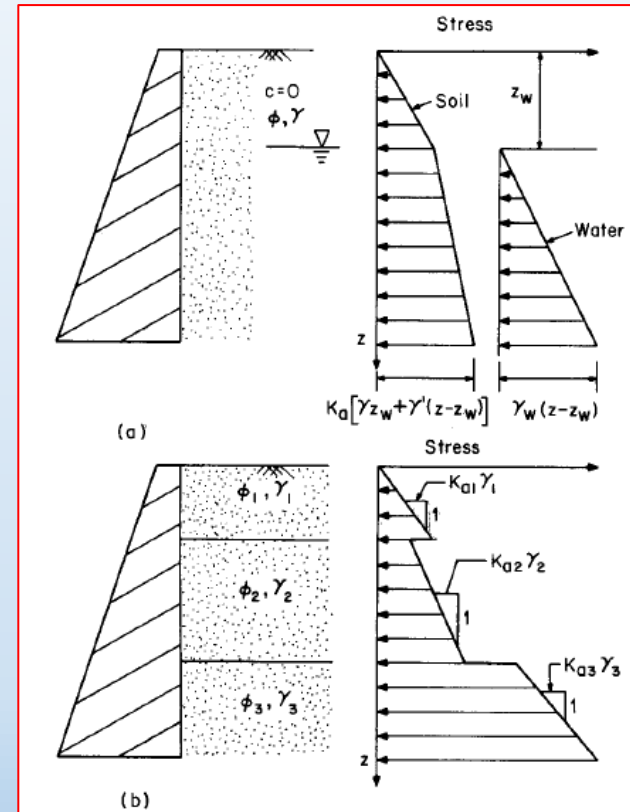
$$E_a = \frac{1}{2} K_a\gamma(H^2 - z_o^2) - 2c\sqrt{K_a}(H - z_o)$$

$$E_a = \frac{K_a\gamma(H - z_o)^2}{2} \quad \text{Força de empuxo ATIVO}$$

# Empuxo ativo



Fang (1991)

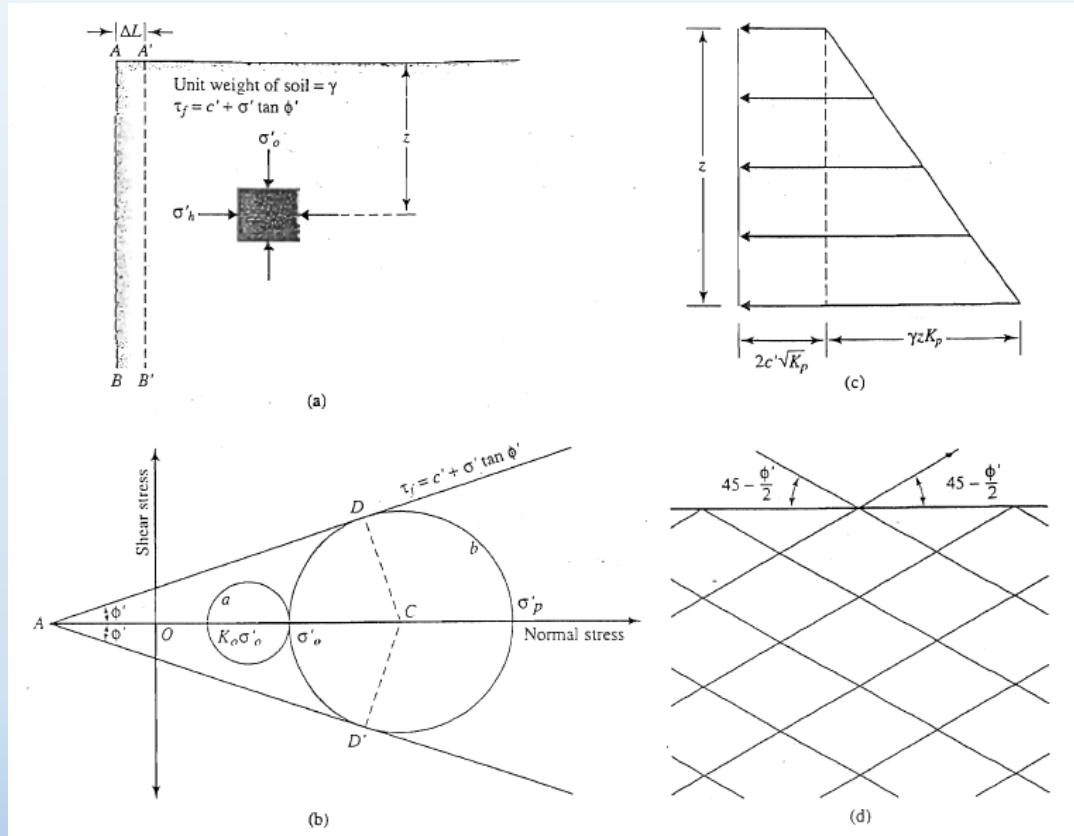


Fang (1991)

**Fig. 6.3** Active pressure—frictionless wall. (a) Frictionless wall moves away from backfill. (b) Stress state in active failure. (c) Active failure zone. (d) Theoretical active pressure distribution. (e) Water-filled crack in tension zone.

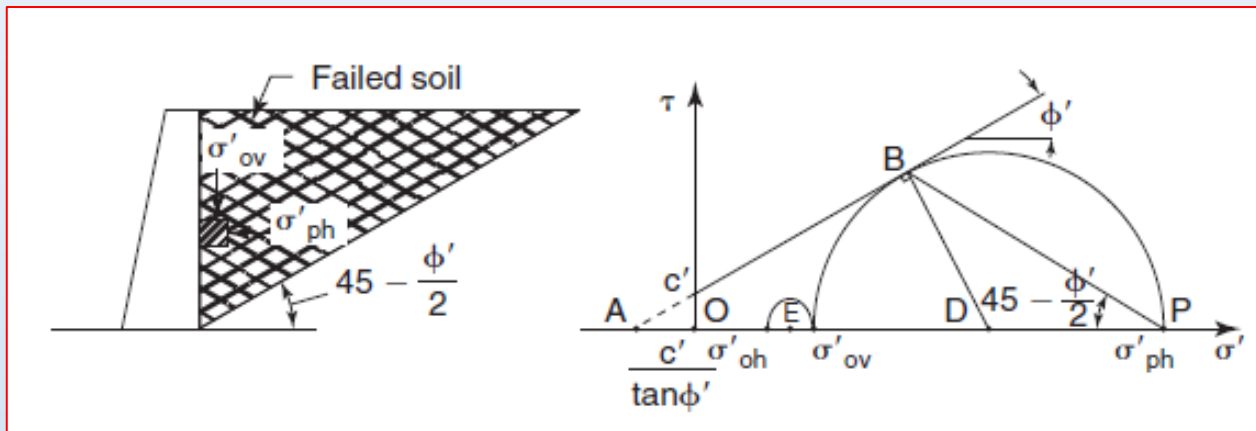
**Fig. 6.5** Active pressures for frictionless wall in presence of groundwater table and nonhomogeneous soil conditions. (a) Groundwater table. (b) Nonhomogeneous cohesionless soil.

Empuxo Passivo



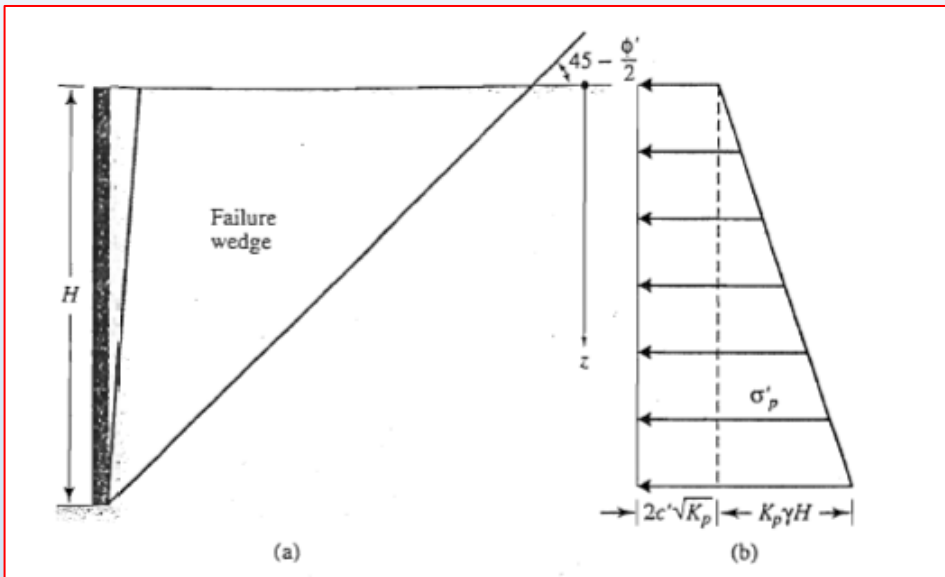


## Empuxo passivo e o estado de tensão no círculo de Mohr



Briaud (2013)

## Empuxo passivo



Das (2006)

Para  $z = 0$ 

$$\sigma'_p = 2c' \sqrt{K_p}$$

Para  $z = H$ 

$$\sigma'_p = K_p \gamma z + 2c' \sqrt{K_p}$$

Para a condição não drenada



$$\begin{aligned} \phi_u &= 0 \\ K_p &= 1 \text{ (água!)} \\ c &= s_u \end{aligned}$$

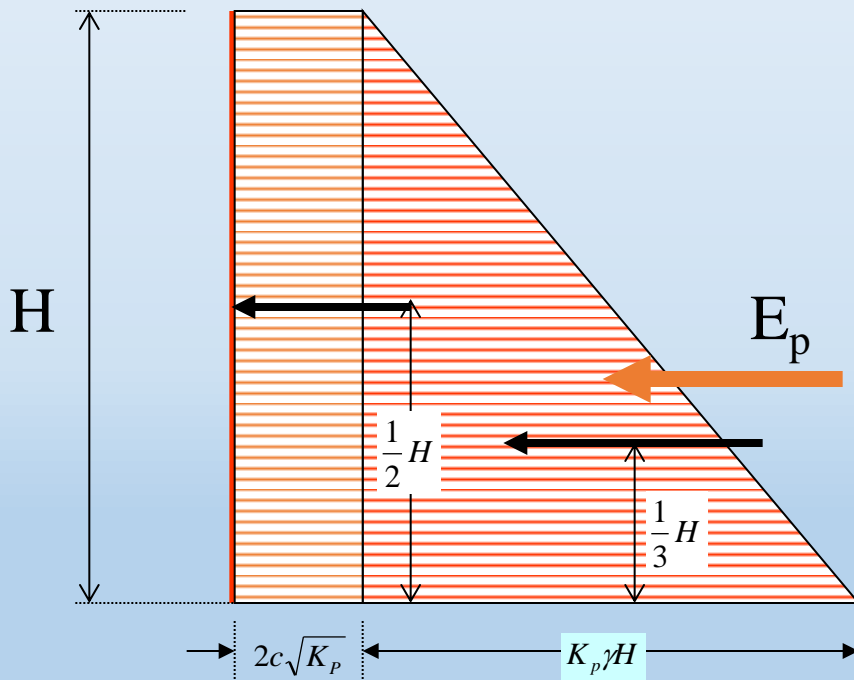
$$\sigma_p = \gamma z + 2s_u$$

# Rankine

## *Distribuição do empuxo PASSIVO*

$$\sigma_p = K_p \gamma z + 2c \sqrt{K_p}$$

$K_p$  - coeficiente de empuxo passivo

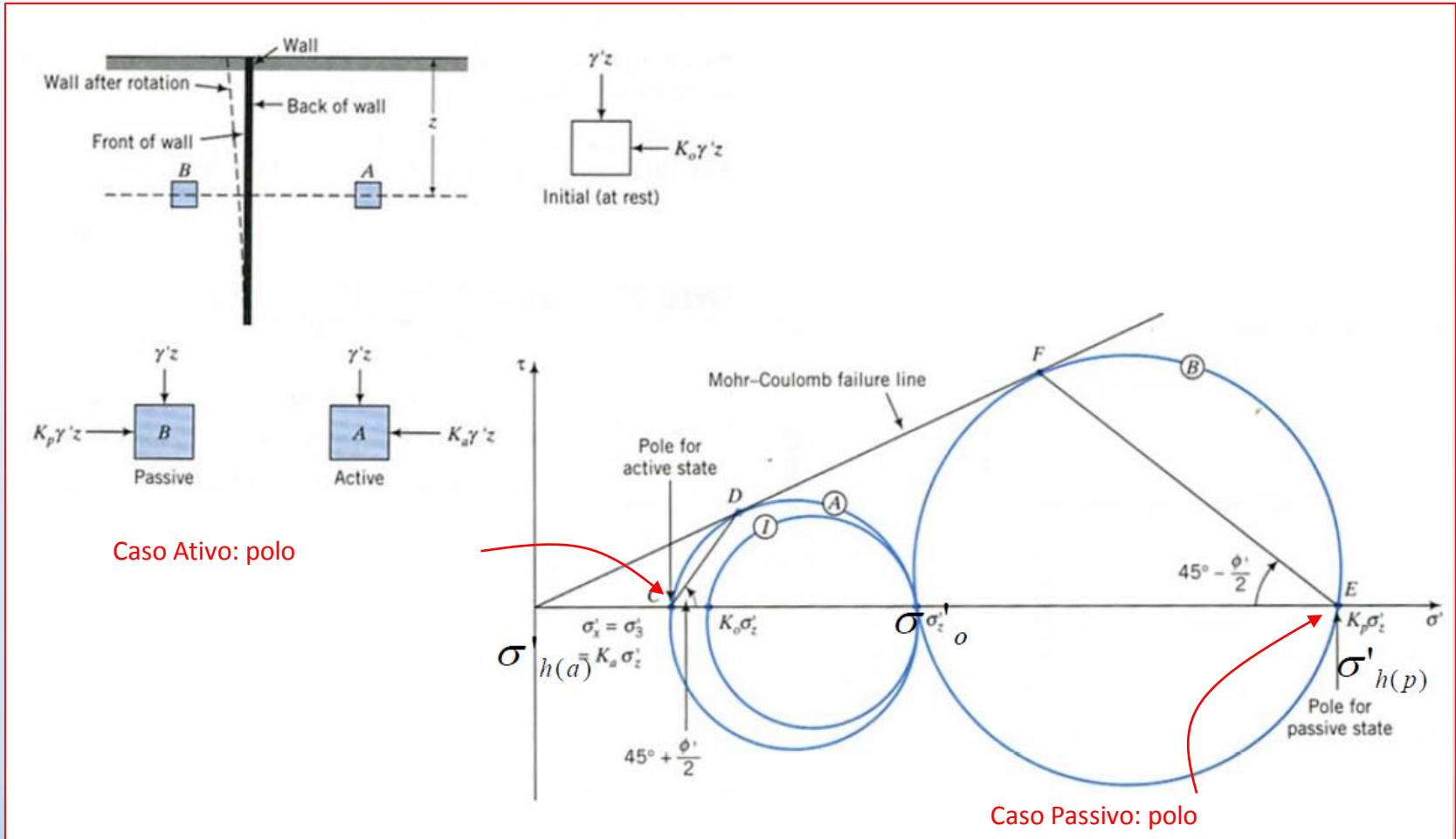


$$E_p = \int_{z_0}^H \sigma_p dz$$

$$E_p = \frac{1}{2} K_p \gamma H^2 + 2cH \sqrt{K_p}$$

**Força de empuxo PASSIVO**

# Rankine em Resumo



# Empuxos (resumo)

$$K_o = \frac{\nu}{1 - \nu}$$

$$K_o = 1 - \sin \phi'$$

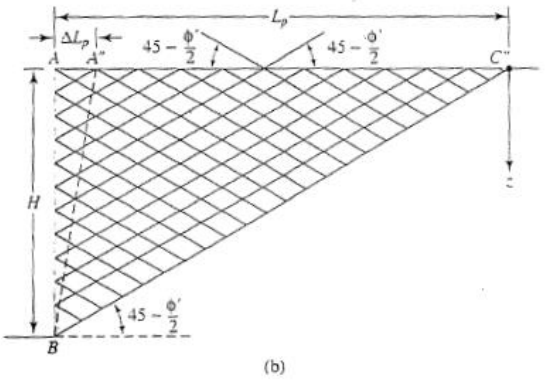
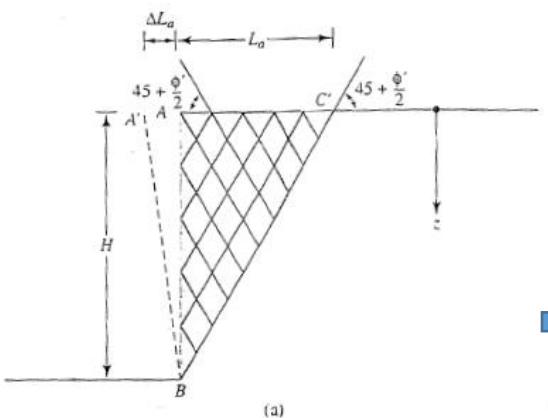
$$K_o = (1 - \sin \phi') OCR^{\sin \phi'}$$

$$K_a = \frac{1 - \sin \phi}{1 + \sin \phi} = \tan^2 \left( 45 - \frac{\phi}{2} \right)$$

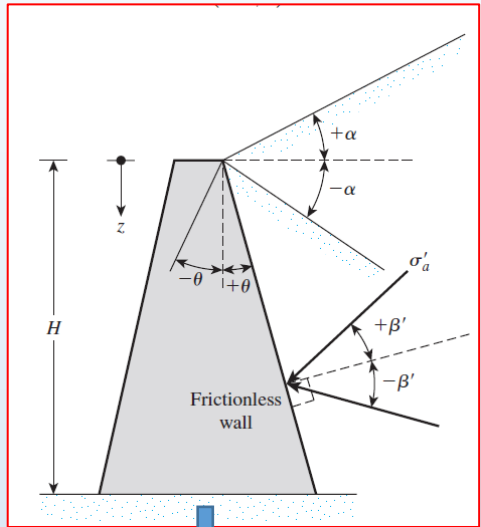
Rankine ativo

~~$$K_p = \frac{1 + \sin \phi}{1 - \sin \phi} = \tan^2 \left( 45 + \frac{\phi}{2} \right)$$

Rankine passivo~~



Das (2006)



Das (2011)

$$K_a = \text{Coulomb's active earth pressure coefficient}$$

$$= \frac{\sin^2 (\beta + \phi')}{\sin^2 \beta \sin (\beta - \delta') \left[ 1 + \sqrt{\frac{\sin (\phi' + \delta') \sin (\phi' - \alpha)}{\sin (\beta - \delta') \sin (\alpha + \beta)}} \right]^2}$$

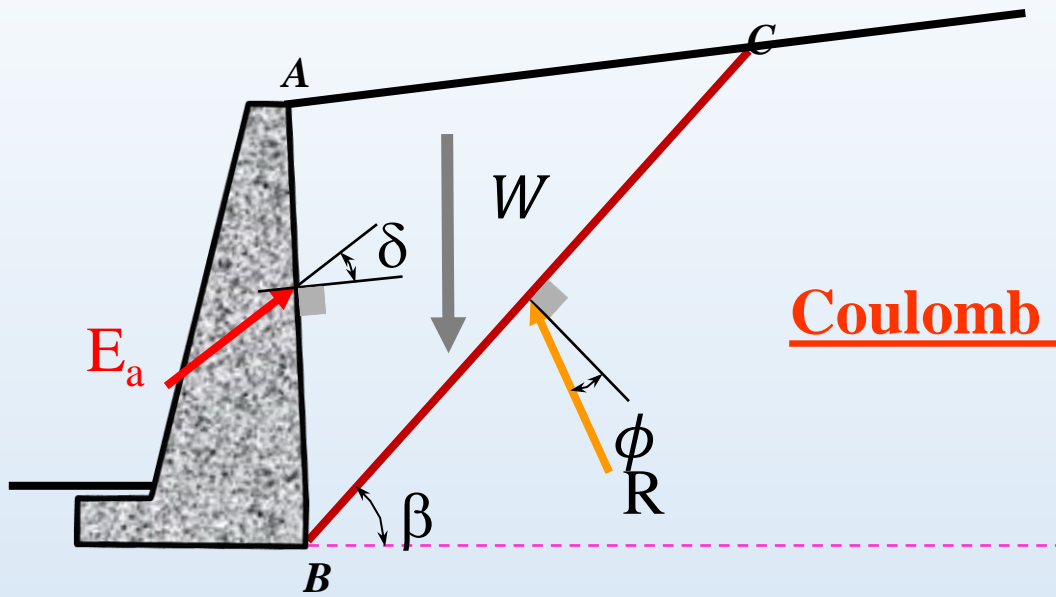
~~$$K_p = \text{Coulomb's passive pressure coefficient}$$

$$= \frac{\sin^2 (\beta - \phi')}{\sin^2 \beta \sin (\beta + \delta') \left[ 1 - \sqrt{\frac{\sin (\phi' + \delta') \sin (\phi' + \alpha)}{\sin (\beta + \delta') \sin (\beta + \alpha)}} \right]^2}$$~~

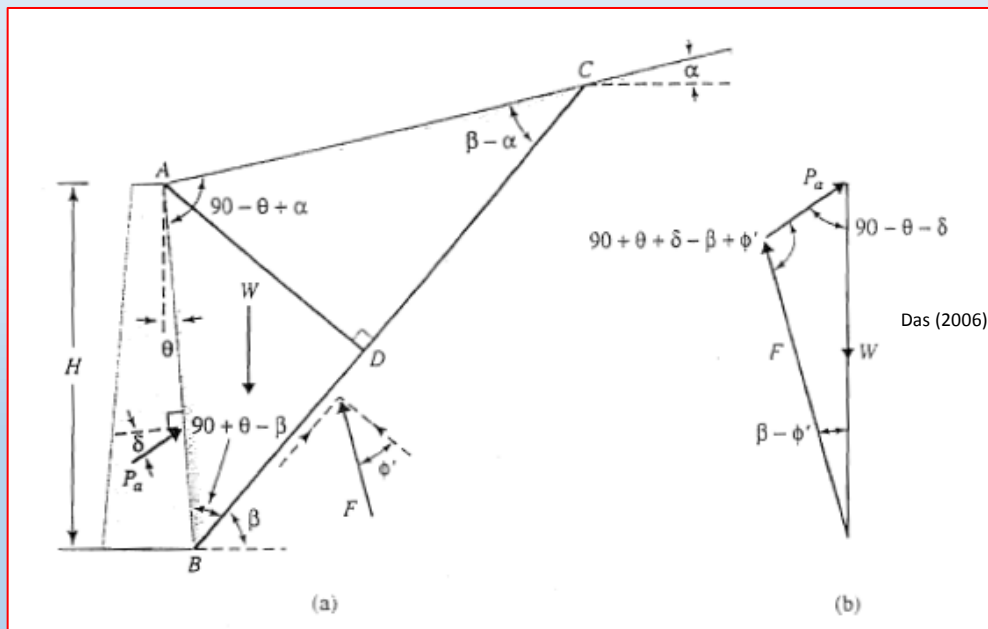
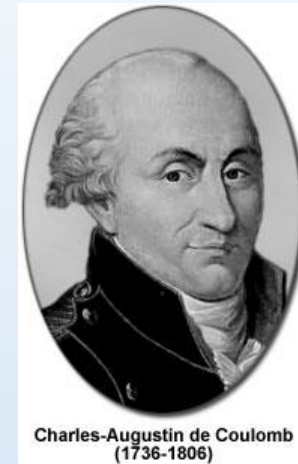
ou, melhor, canaleta para **drenagem superficial** na direção longitudinal



se não houver **drenagem superficial** na direção longitudinal

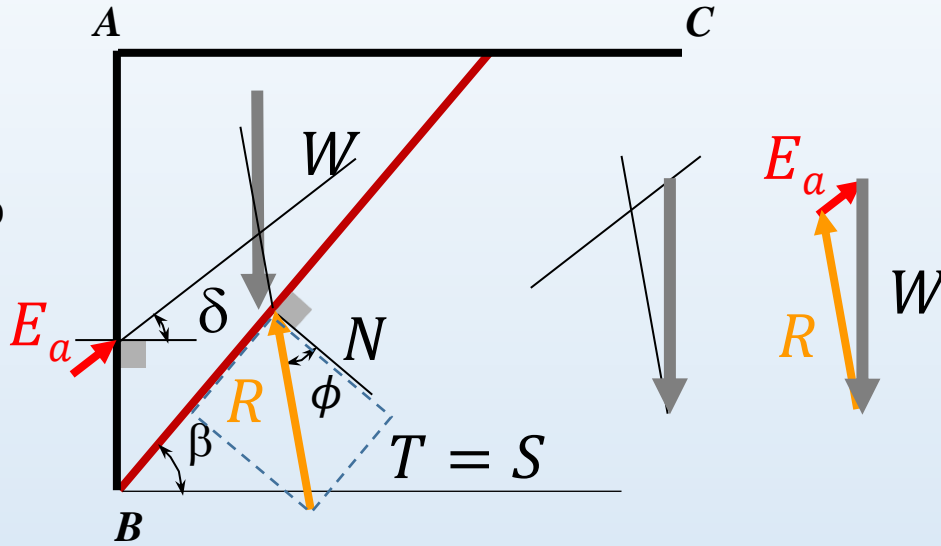


## Coulomb (1776)

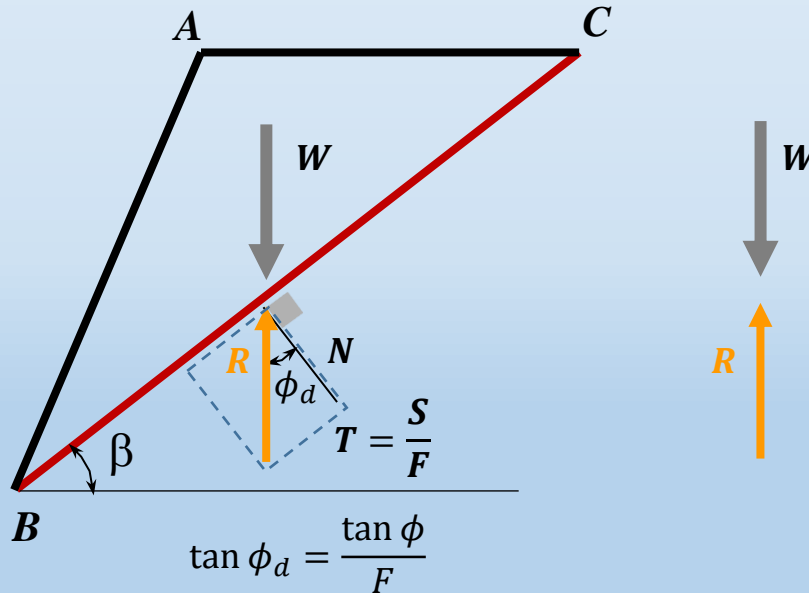


- Admite atrito entre o muro e o solo (a resultante do empuxo atua com um ângulo  $\delta$  que é o ângulo de atrito solo/muro)
- Admite que a superfície de escorregamento é um plano que passa pelo pé do muro
- A cunha de ruptura age como um bloco rígido e o valor da força de empuxo é obtido considerando o **equilíbrio limite** da cunha como um todo
- Não faz hipótese sobre forma do diagrama (só calcula força de empuxo resultante)

Equilíbrio limite  
Empuxo ativo de Coulomb



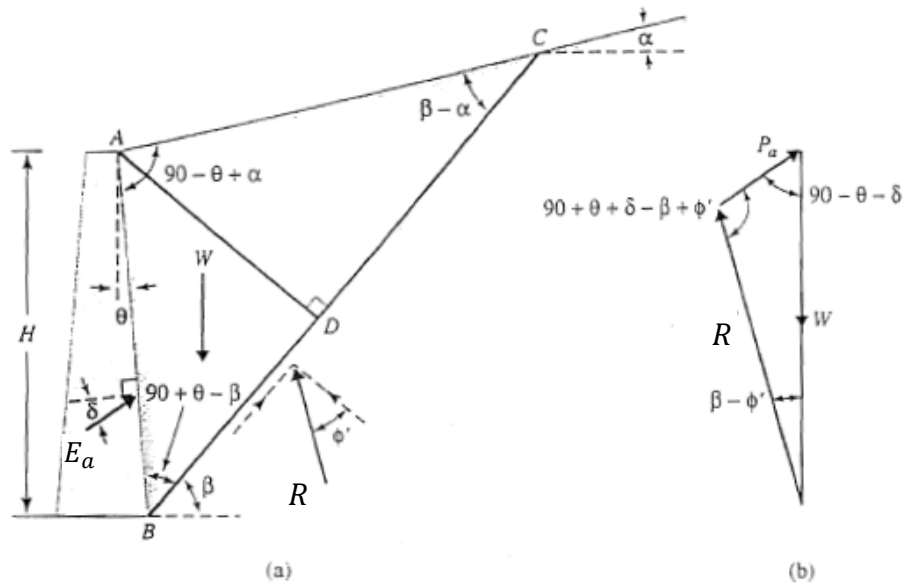
Equilíbrio limite  
Talude íngreme



Karl Culmann (1821-1881)

Processo gráfico  
de Culmann





**W** - Peso da cunha de ruptura.

**R** - Resultante das forças de cisalhamento e normal na superfície de ruptura BC.

**E<sub>a</sub>** - Força de empuxo ativo (inclinada do ângulo  $\delta$  em relação à normal à face do muro).

$$\frac{W}{\text{sen}(90 + \theta + \delta - \beta + \varphi')} = \frac{P_a}{\text{sen}(\beta - \varphi')}$$

$$E_a = \frac{\text{sen}(\beta - \varphi')}{\text{sen}(90 + \theta + \delta - \beta + \varphi')} W$$

$$E_a = \frac{1}{2} \gamma H^2 \left[ \frac{\cos(\theta - \beta) \cos(\theta - \alpha) \text{sen}(\beta - \varphi')}{\cos^2 \theta \text{sen}(\beta - \alpha) \text{sen}(90 + \theta + \delta - \beta + \varphi')} \right]$$

**Determinação do ângulo crítico  $\beta$  para o máximo  $E_a$**

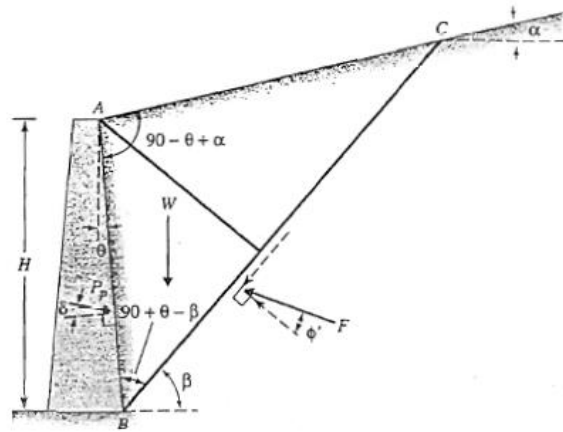
$$\frac{dE_a}{d\beta} = 0 \quad \longrightarrow \quad E_a = \frac{1}{2} K_a \gamma H^2$$

$$K_a = \frac{\cos^2(\varphi' - \theta)}{\cos^2 \theta \cos(\delta + \theta) \left[ 1 + \sqrt{\frac{\text{sen}(\delta + \varphi') \text{sen}(\varphi' - \alpha)}{\cos(\delta + \theta) \cos(\theta - \alpha)}} \right]^2}$$

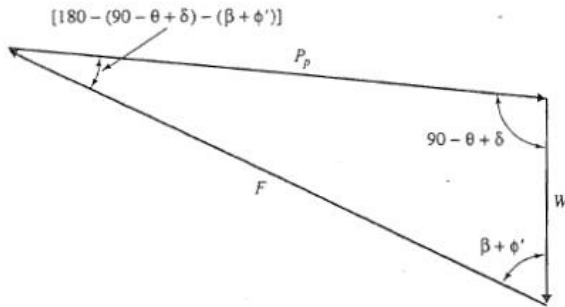
Se  $\alpha = 0$ ,  $\theta = 0$  e  $\delta = 0$   
Coulomb = Rankine

$$K_a = \frac{1 - \sin \varphi'}{1 + \sin \varphi'}$$

## Empuxo passivo



(a)



(b)

Das (2006)

$$K_P = \frac{\cos^2(\varphi' + \theta)}{\cos^2\theta \cos(\delta - \theta) \left[ 1 - \sqrt{\frac{\sin(\varphi' - \delta) \sin(\varphi' + \alpha)}{\cos(\delta - \theta) \cos(\alpha - \theta)}} \right]^2}$$

Empuxo passivo

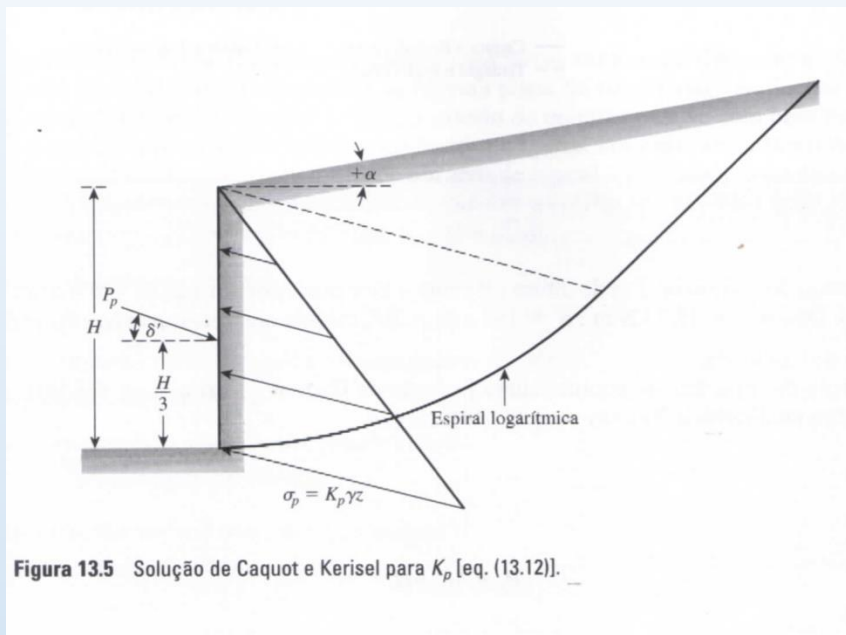
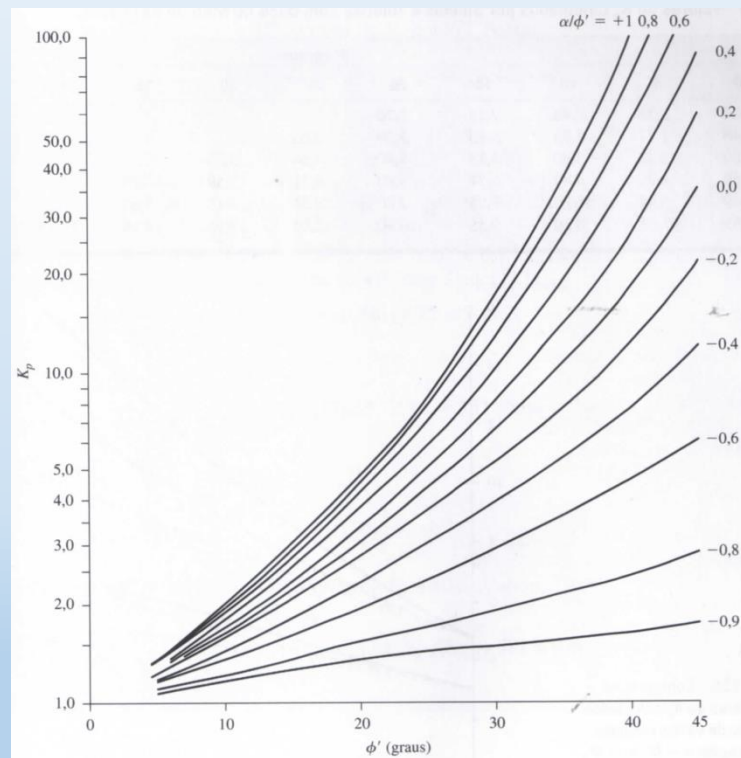
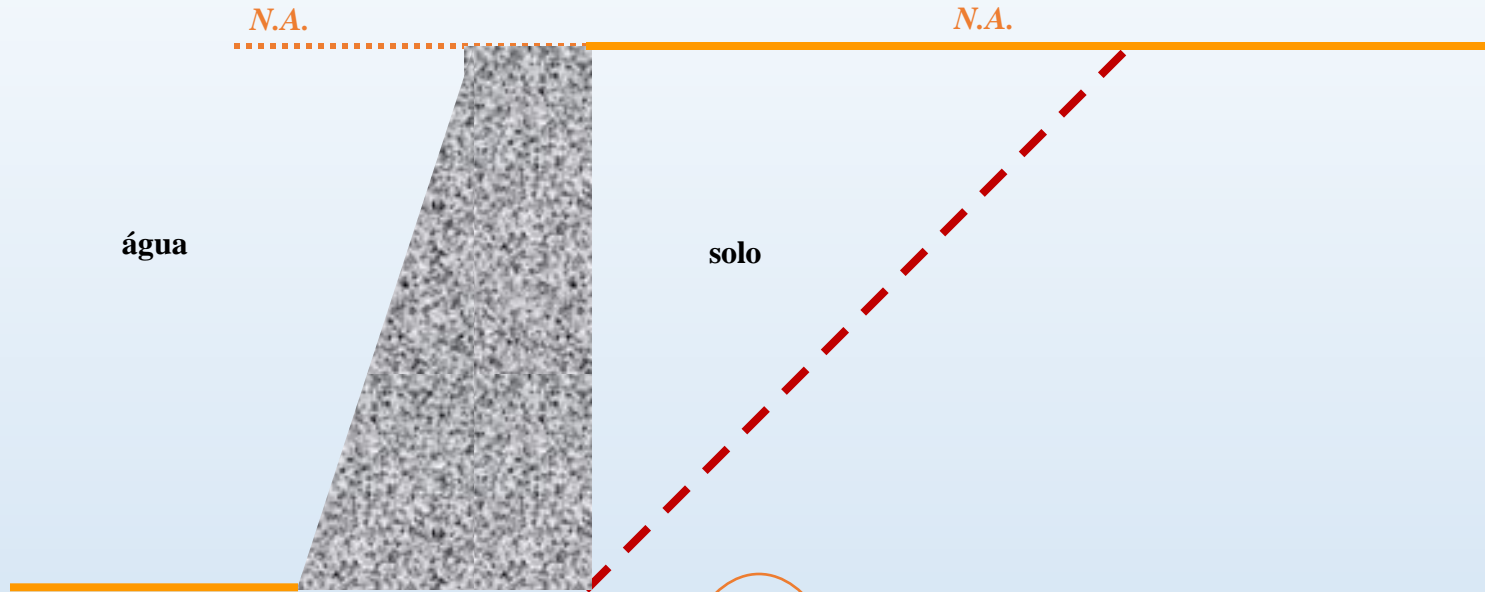


Figura 13.5 Solução de Caquot e Kerisel para  $K_p$  [eq. (13.12)].

Das (2006)



# Efeito de submersão



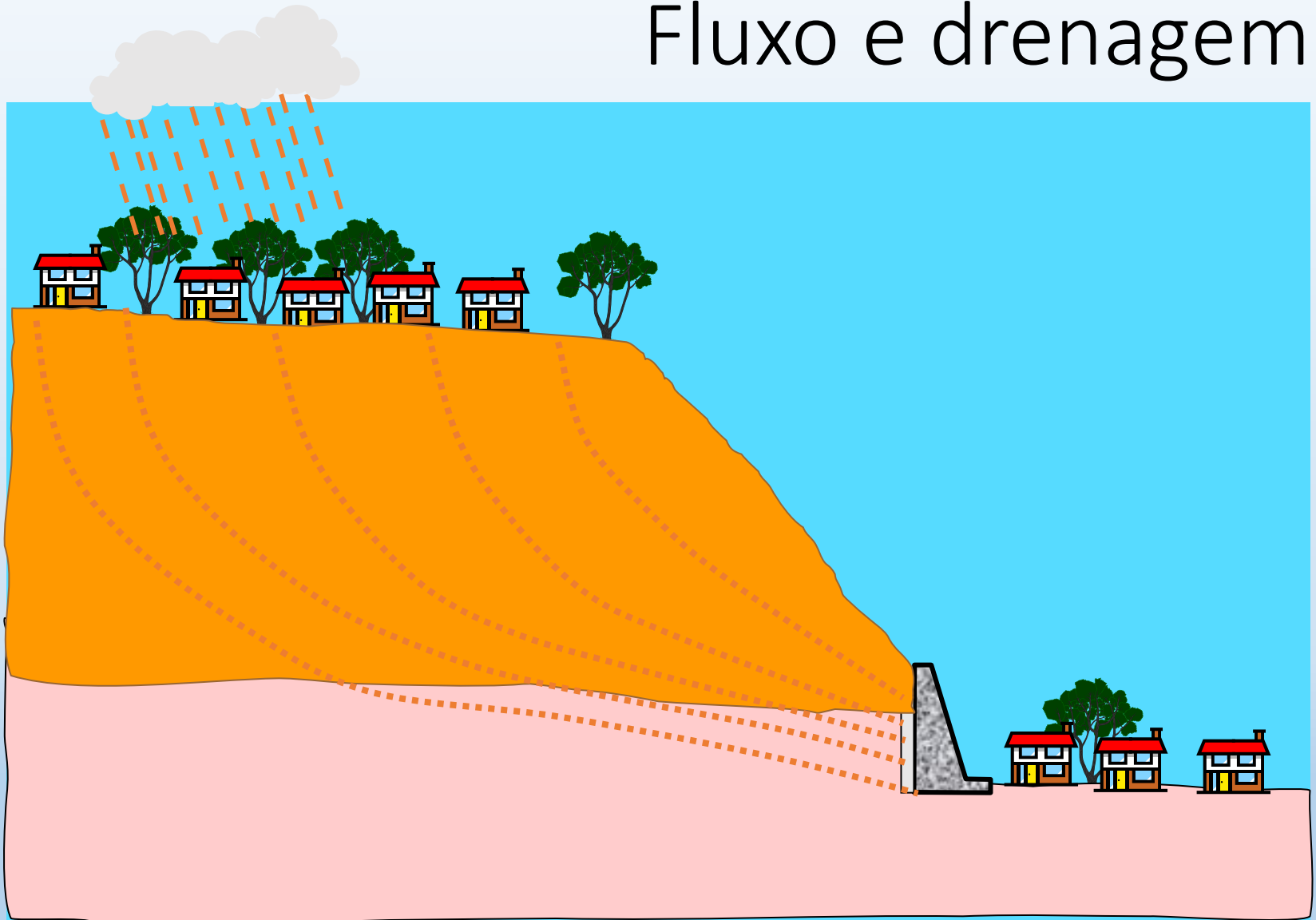
$$E_a = \frac{1}{2} \gamma_w H^2 + \frac{1}{2} \gamma_{sub} H^2 K_a$$

$E_w$

*Empuxo exercido pela água intersticial: possui a mesma magnitude, com ou sem a presença do solo.*

*Empuxo (efetivo) exercido pelo solo devido ao peso próprio. No caso do N.A. estar na superfície do terreno, o peso específico é o submerso.*

# Fluxo e drenagem

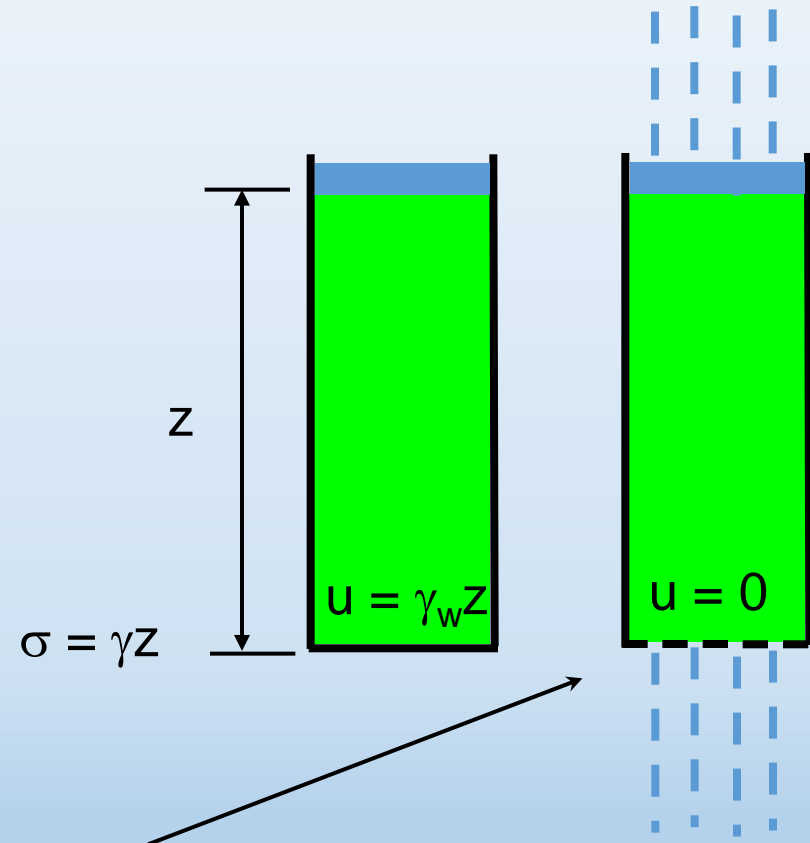


## Effective stress

$$\sigma' = \sigma - u$$

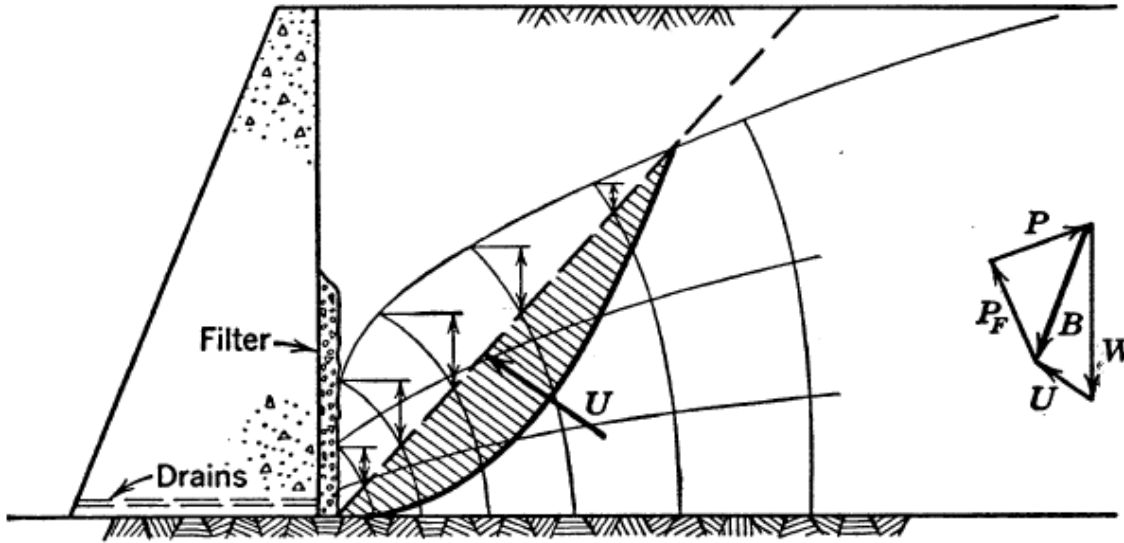
$\sigma$  (green)  $\rightarrow$   $(q + \gamma z)$   
 $u$  (blue)  $\rightarrow$  pore pressure

$\sigma'$  governs all soil behaviour

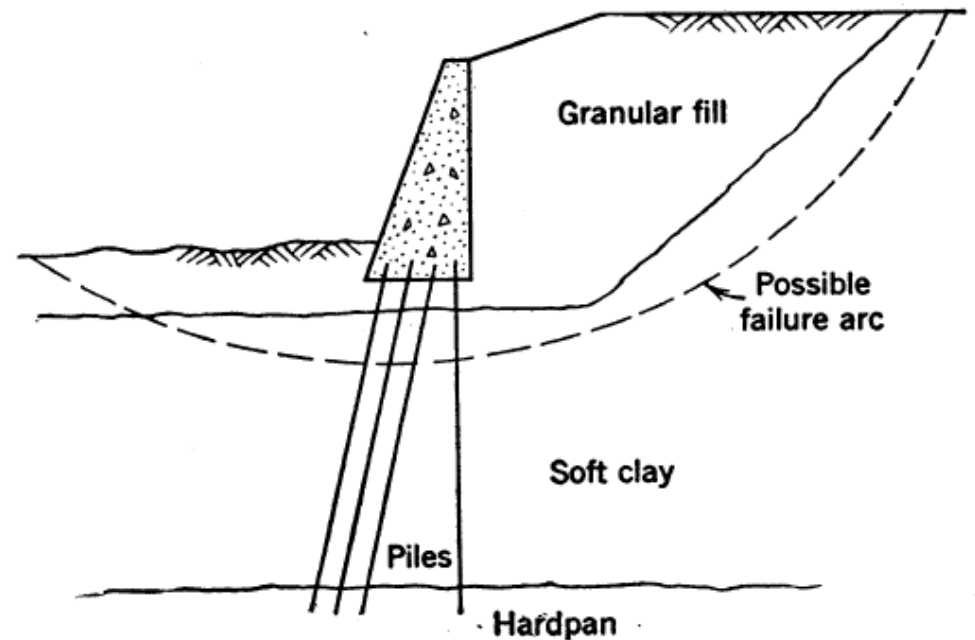


**Importante: fluxo vertical  $\Rightarrow$  pressões neutras nulas!**

# Aspectos para serem lembrados



Taylor (1948)



# **Projeto de Muros de Arrimo – o essencial**

- ❖ **Função do muro (tipos diferentes para propósitos diferentes)**
- ❖ **Condições necessárias para qualquer bom projeto de qualquer muro**
  - ❖ **Conhecimento pleno de tipos de empuxos, condições de manifestação, modelos de cálculo**
  - ❖ **Perfeito entendimento de fluxo de água em meios porosos**
  - ❖ **Perfeito entendimento do papel da drenagem**



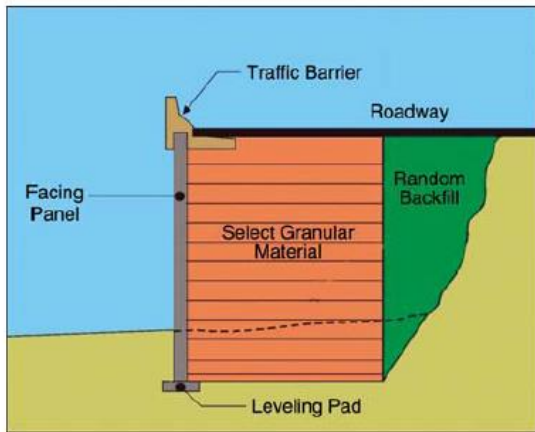


Figure 21.24 MSE wall. (Courtesy of The Reinforced Earth Company.)

Briaud (2013)





Bored piles

Plan view



Sheet piles

Plan view



Figure 21.31 Bored piles and sheet pile cantilever walls. (d: Courtesy of Associated Pacific Constructors, Inc.)

Briaud (2013)

