



# Equilíbrio limite (segurança contra ELU em Geomecânica)

---

REQUISITO  
Conhecer Estática



# Introdução

Terzaghi, K. (Theoretical Soil Mechanics, 1943)

Os problemas de Engenharia Geotécnica:

- Problemas de **elasticidade**: modelo elástico linear (parâmetros de deformabilidade:  $E, \nu$ )
- Problemas de **estabilidade**: modelo rígido-plástico (parâmetros de resistência:  $c', \phi', s_u$ )
- Água (e seu fluxo)
  - Permanente – Laplace
  - Transiente
    - Adensamento
      - + **elasticidade** => compressibilidade ( $C_r, p_a, C_c, c_v$ )
      - + **estabilidade** => resistência não drenada (parâmetro de resistência:  $s_u$ )
    - Fluxo saturado-não saturado (sucção)

# Filmes de rupturas (ELU)

- [http://www.youtube.com/watch?v=aPpKd49MknA&playnext=1&list=PL0DCA5ABF8AEB8AA2&feature=results\\_main](http://www.youtube.com/watch?v=aPpKd49MknA&playnext=1&list=PL0DCA5ABF8AEB8AA2&feature=results_main)
- [http://www.youtube.com/watch?v=sQo\\_sVlsSBA](http://www.youtube.com/watch?v=sQo_sVlsSBA)
- [http://www.youtube.com/watch?v=Ny94aGWOPw&feature=fv\\_wrel](http://www.youtube.com/watch?v=Ny94aGWOPw&feature=fv_wrel)
- <https://www.youtube.com/watch?v=XRc6pikwKZo>
- <http://www.youtube.com/watch?v=mknStAMia0Q>
- <https://www.youtube.com/watch?v=wN3R5yIi7fc>
- <https://www.youtube.com/watch?v=IM6B2p47k2Q>
- [https://www.reddit.com/r/CatastrophicFailure/comments/byyfsf/cracked\\_road\\_collapses\\_into\\_a\\_construction\\_site/](https://www.reddit.com/r/CatastrophicFailure/comments/byyfsf/cracked_road_collapses_into_a_construction_site/)
- <https://youtu.be/XLoWG70JpMo>



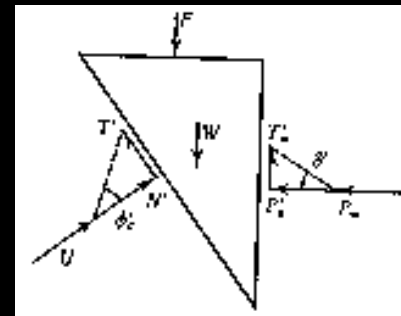
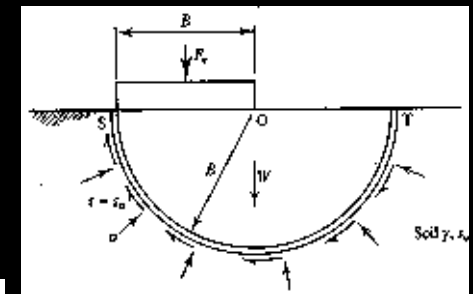
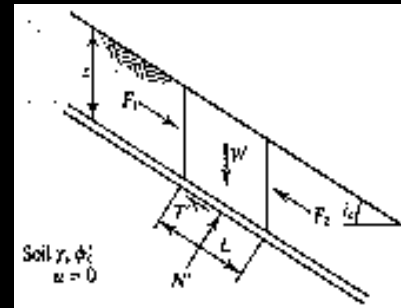
# Lições da observação de rupturas

---

- Para o projeto
  - Modos de ruína (como pode romper?)
  - Investigação do solo é barata!
  - Monitoramento é barato!
  - Probabilidade de ruína nunca é nula
- Para a operação
  - Plano de contingência salva vidas

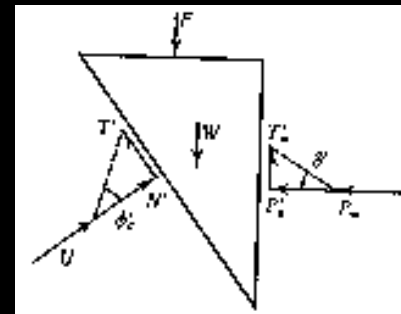
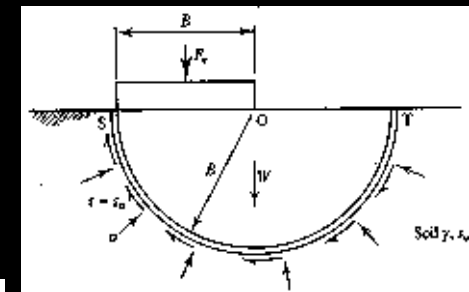
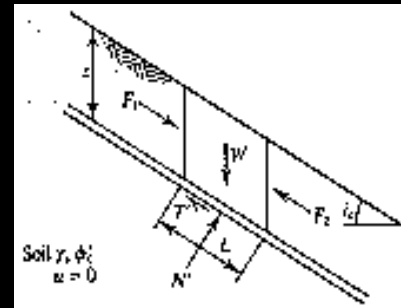
# Problemas de estabilidade típicos (ELU)

- Estabilidade de taludes
- Capacidade de carga de fundações
- Empuxo sobre muros de arrimo



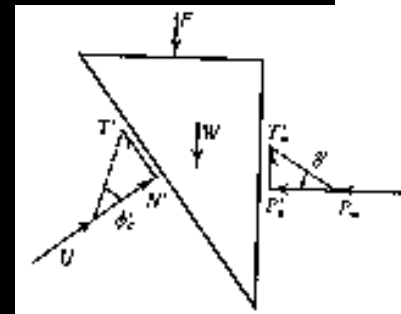
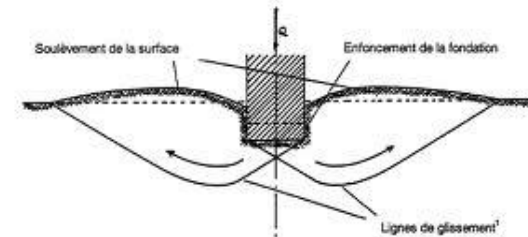
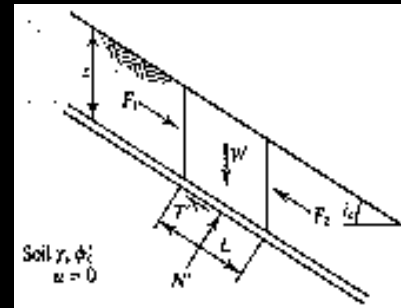
# Pontos em comum: o que conhecer

- **Modo de ruptura** (superfícies de escorregamento, por exemplo)
- **Solicitações** (tensões) na(s) superfície(s)
- **Resistência** (tensões) na(s) superfície(s)

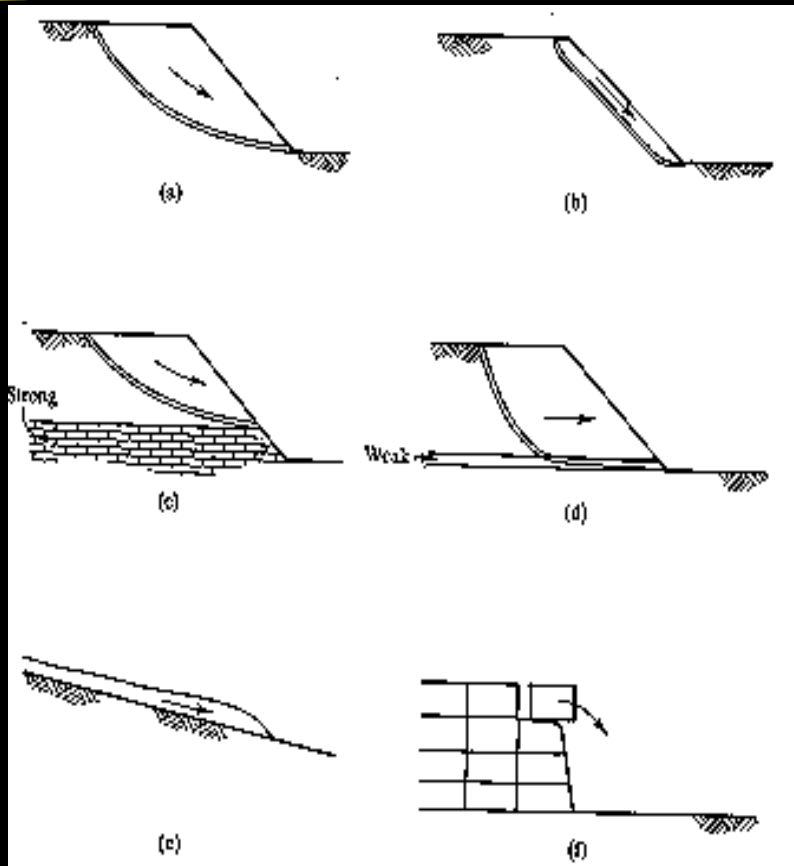


# Conhecimento necessário

- Observação de rupturas
- Equações de equilíbrio do(s) bloco(s) delimitado(s) pela(s) superfície(s)  
 $\Sigma V = 0$   
 $\Sigma H = 0$   
 $\Sigma M = 0$
- Modelo de resistência



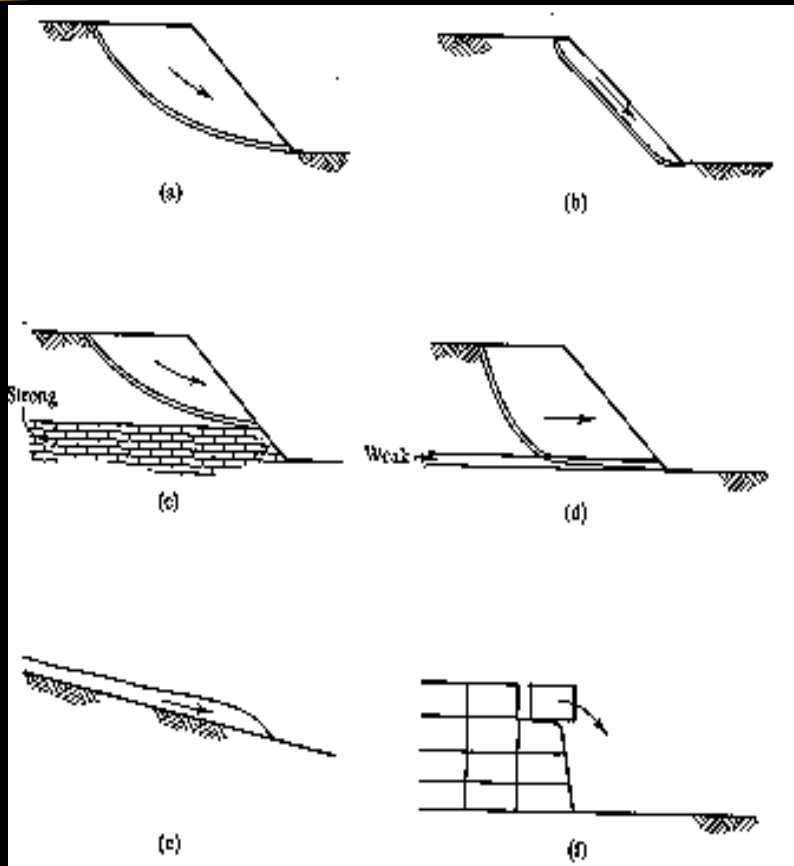
# Alguns tipos comuns de instabilidades de taludes



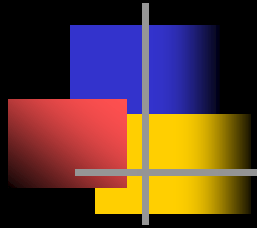
- **Escorregamentos**
  - a) rotacional
  - b) translacional
  - c) limitado por camada resistente
  - d) condicionado por camada fraca
- **Corridas de massa**
  - e) corrida de lama
- **Rastejo**
- **Outros**
  - f) tombamento



# Situações 2D? Simplificações!



- **Escorregamentos**
  - a) rotacional
  - b) translacional
  - c) limitado por camada resistente
  - d) condicionado por camada fraca
- **Corridas de massa**
  - e) corrida de lama
- **Rastejo**
- **Outros**
  - f) tombamento



# Equilíbrio estático (2D)

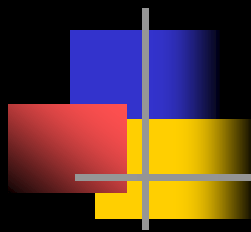
- Equilíbrio de **forças** na direção 1 (por exemplo, **vertical**)
- Equilíbrio de **forças** na direção 2 (por exemplo, **horizontal**)
- Equilíbrio de **momentos**

$$\Sigma V = 0$$

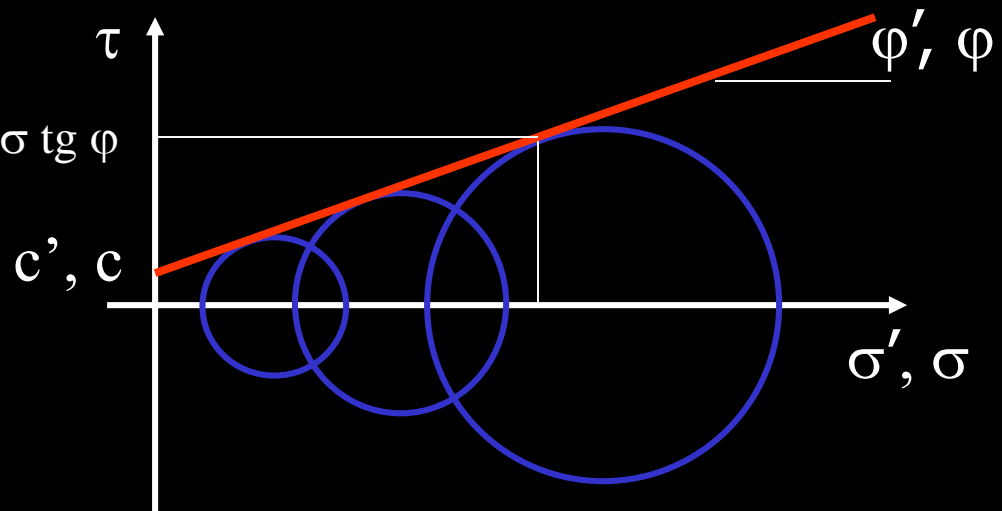
$$\Sigma H = 0$$

$$\Sigma M = 0$$

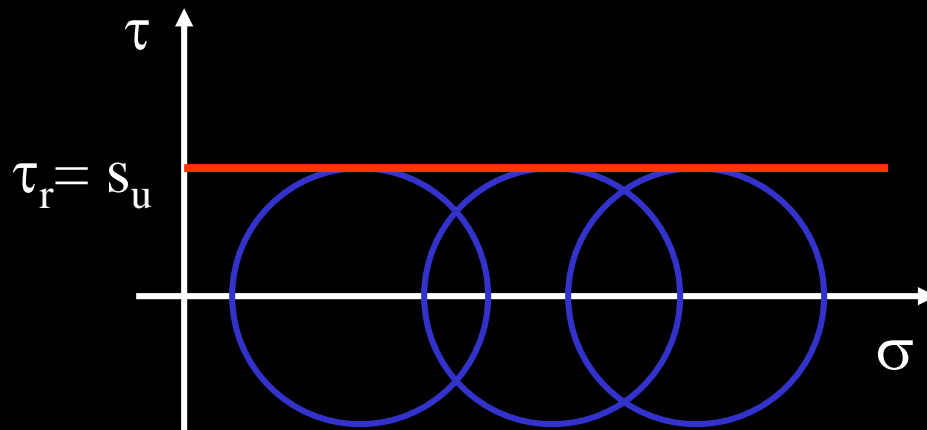
# Modelos de resistência usuais para solos e rochas



■ **Mohr-Coulomb**  $\tau_r = s = c + \sigma \operatorname{tg} \varphi$



■ **Tresca**



# Escolha do modelo de resistência

- Aplicabilidade do modelo Mohr-Coulomb e do modelo Tresca
  - Diferença entre comportamento drenado e não drenado, função do tipo de solo e da velocidade da sollicitação
- Foco, neste momento, no **processo de análise de segurança**



# Processo usual de análise

---

- Equilíbrio Limite, DOIS requisitos:
  - 1) Sistema precisa estar em **EQUILÍBRIO**  
Equilíbrio estático = Estática (Mecânica A!)
  - 2) Equilíbrio em questão deve estar no limiar da ruptura, no **LIMITE**  
Nenhuma estrutura é, em princípio, projetada para trabalhar em condição de iminência de ruptura, portanto...

# Processo usual de análise

## ■ Para satisfazer ao requisito 2):

a) Resistência precisa ser reduzida

$$\tau = s / F \Rightarrow F = s / \tau$$

$$s = c' + \sigma' \operatorname{tg} \varphi'$$
$$s = s_u$$

ou

b) Solicitação precisa ser aumentada

$$q_r = q \times F \Rightarrow F = q_r / q$$

ou

c) Uma combinação das duas (coeficientes parciais)

# Processos mais sofisticados

- **Análise limite** da Teoria da Plasticidade (vide, por exemplo, soluções para capacidade de carga de fundações)

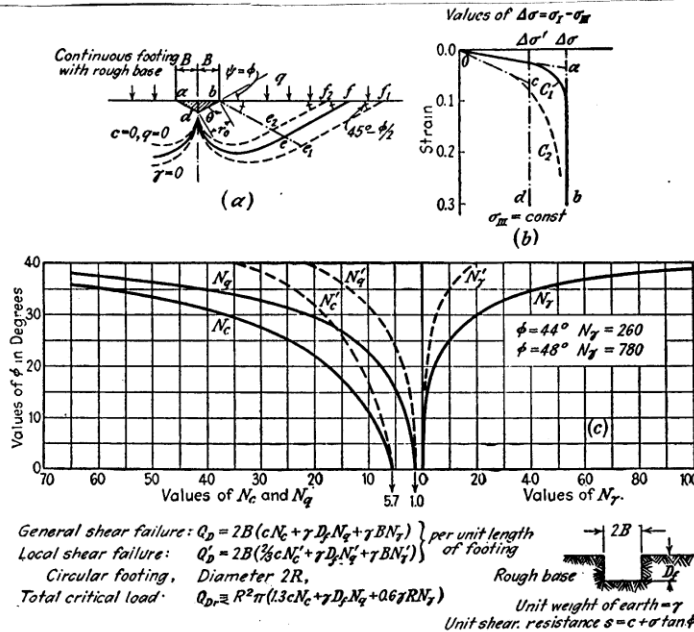


Fig. 38. Method of estimating bearing capacity by means of bearing capacity factors. (a) Source of error associated with the use of this method; (b) simplifying assumption on which computation of bearing capacity factors for dense and for loose soils is based; (c) relation between  $\phi$  and the bearing capacity factors.

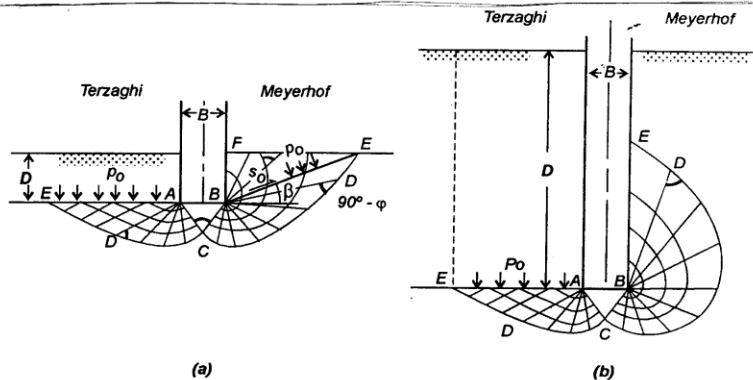


Fig. 4.8 - Teoria de Meyerhof: (a) fundações superficiais e (b) fundações profundas ( $\beta = 90^\circ$ )

# Análise de estabilidade

## Processo do equilíbrio limite

1. Identificar modo de ruína (observação  $\Rightarrow$  tipo de instabilidade)
2. Escolher superfície de ruptura e identificar massa em escorregamento por ela delimitada
3. Identificar solicitações e resistências atuantes na massa
4. Impor limiar de ruptura (**LIMITE**):
  - na superfície de ruptura, solicitação = resistência / Fou
  - resistência (solicitação de ruptura) = solicitação x F
5. Equações de equilíbrio para determinar F (**EQUILÍBRIO**)

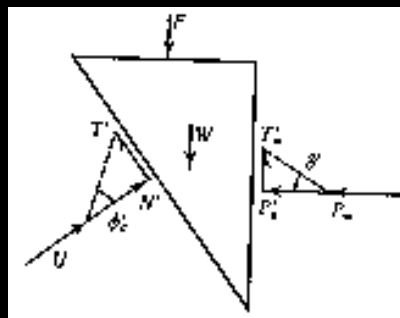
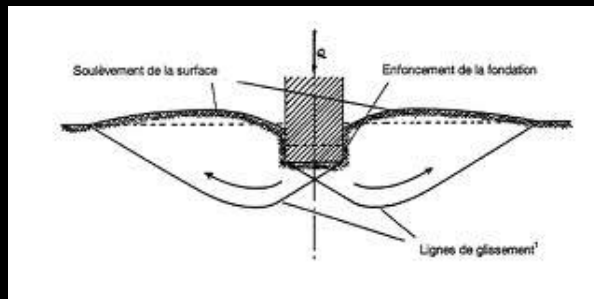
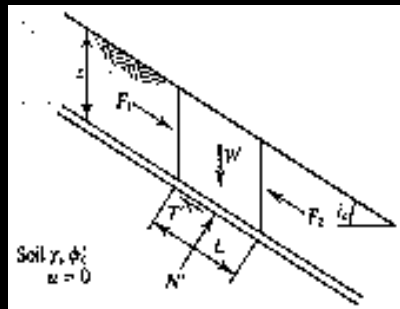


# Análise de estabilidade

## Processo do equilíbrio limite

1. Identificar modo de ruína (observação  $\Rightarrow$  tipo de instabilidade)
2. Escolher superfície de ruptura e identificar massa em escorregamento por ela delimitada
3. Identificar solicitações e resistências atuantes na massa
4. Impor limiar de ruptura (**LIMITE**):
  - na superfície de ruptura, solicitação = resistência / Fou
  - resistência (solicitação de ruptura) = solicitação x F
5. Equações de equilíbrio para determinar F (**EQUILÍBRIO**)
6. **Pesquisar superfície mais crítica** (F mínimo)

# Aplicações do Método do Equilíbrio Limite



- Estabilidade de taludes
- Capacidade de carga de fundações
- Empuxos sobre muros de arrimo



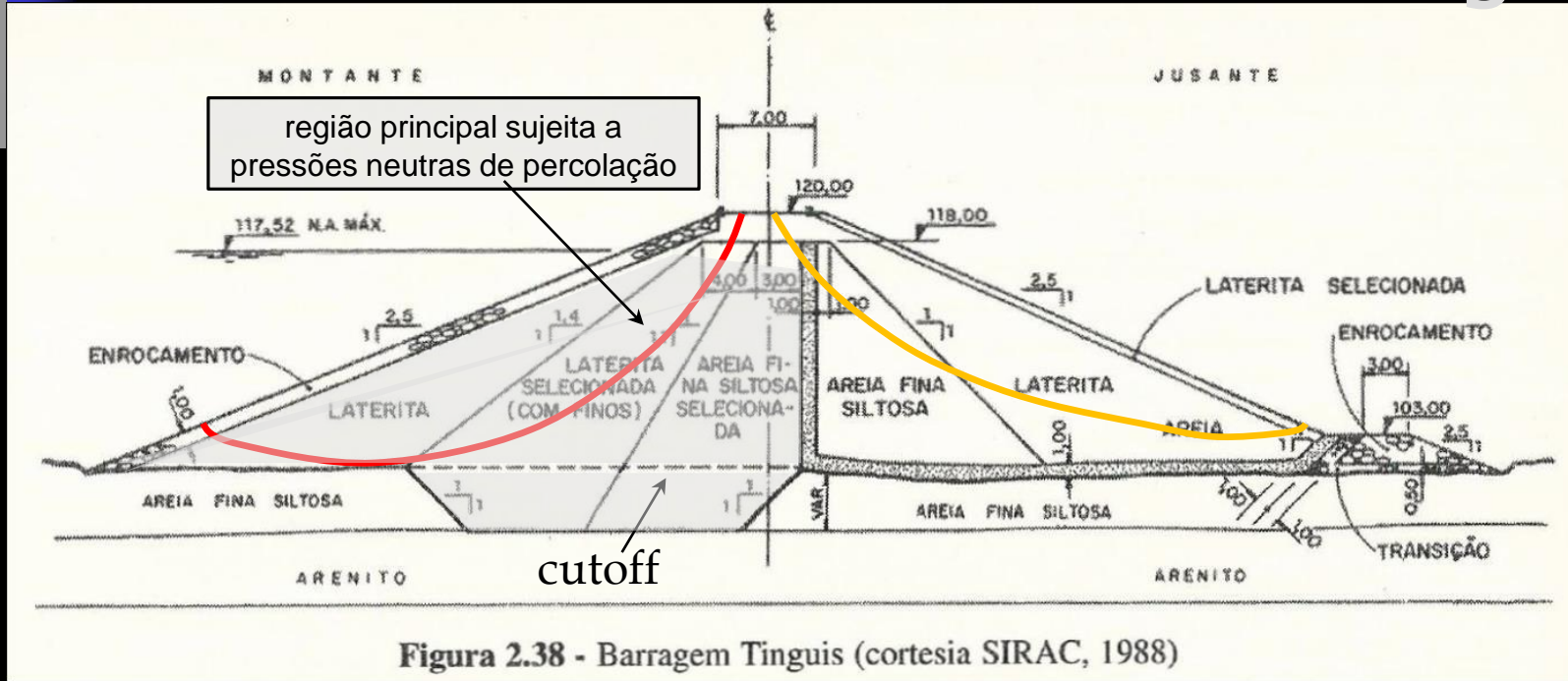
# CONTEXTO

---

Exemplo: segurança de barragem de  
terra

**ELU**

# Estabilidade de taludes de barragem



Segurança depende de:

1. Forma e localização das superfícies críticas
2. Resistência
  - parâmetros de resistência dos materiais

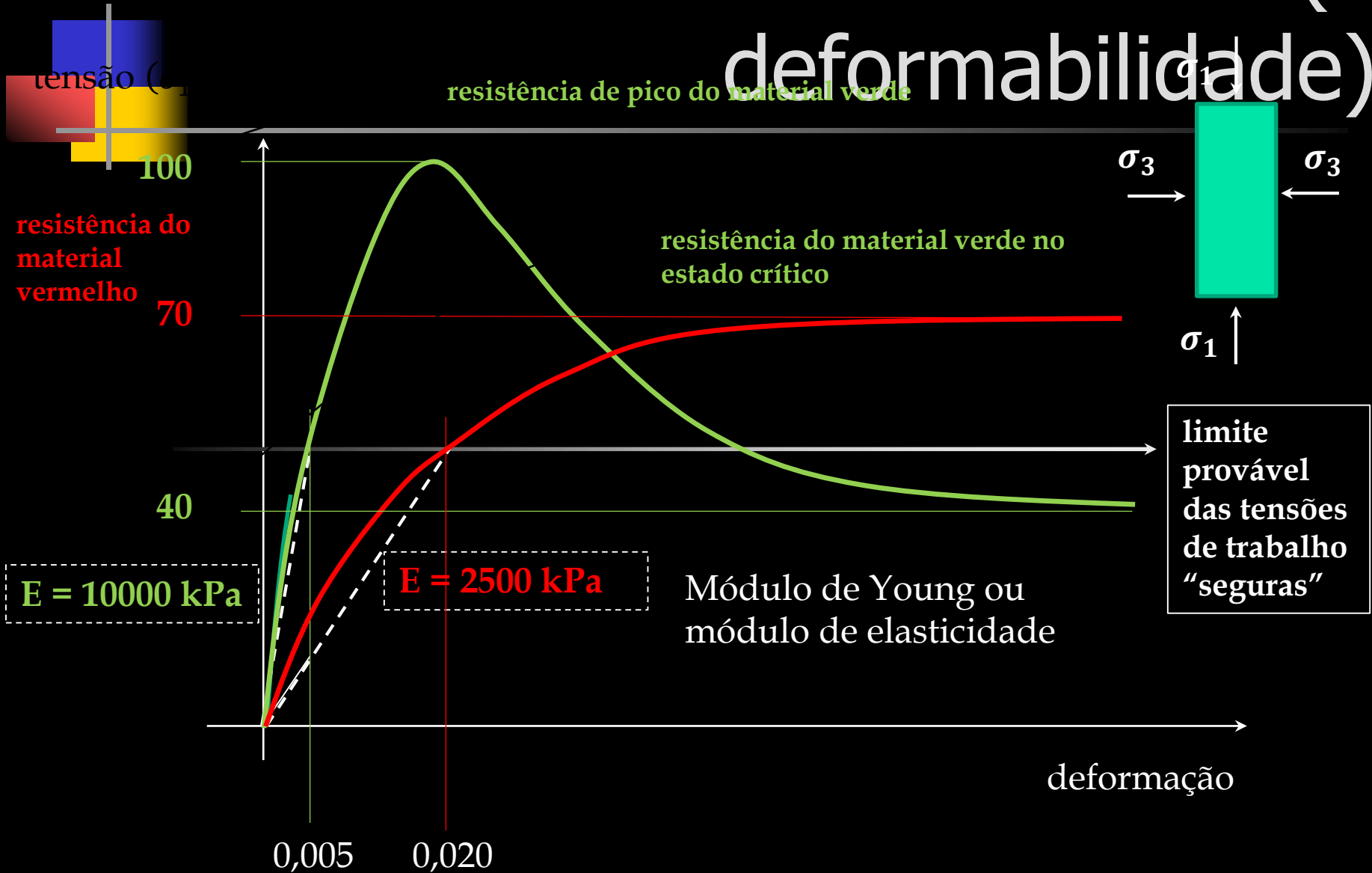
3. Solicitações

- peso específico dos materiais
- pressões neutras (de percolação e excessos de poropressão)

4. Processo de cálculo

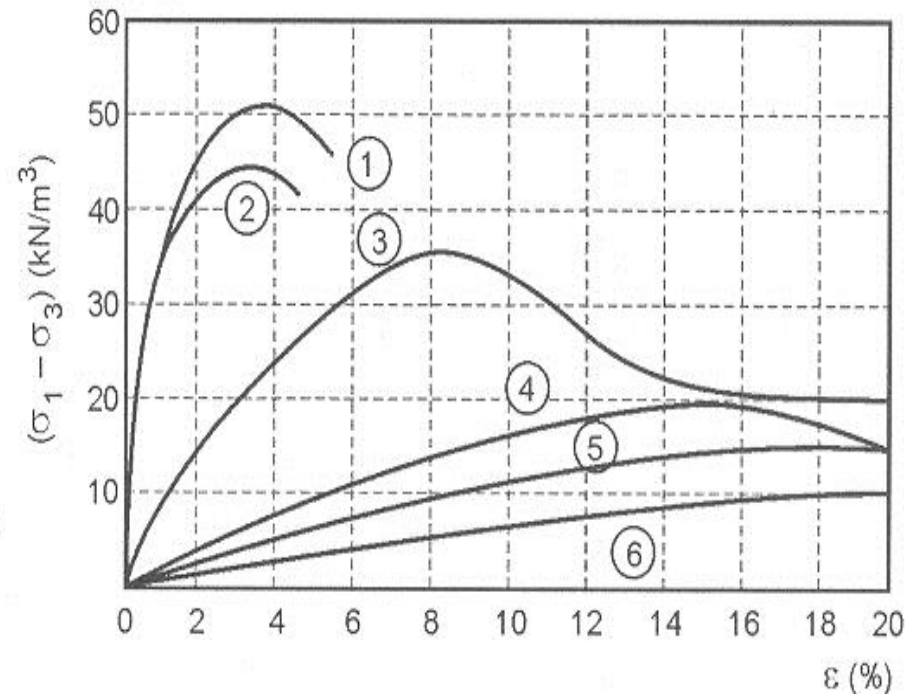
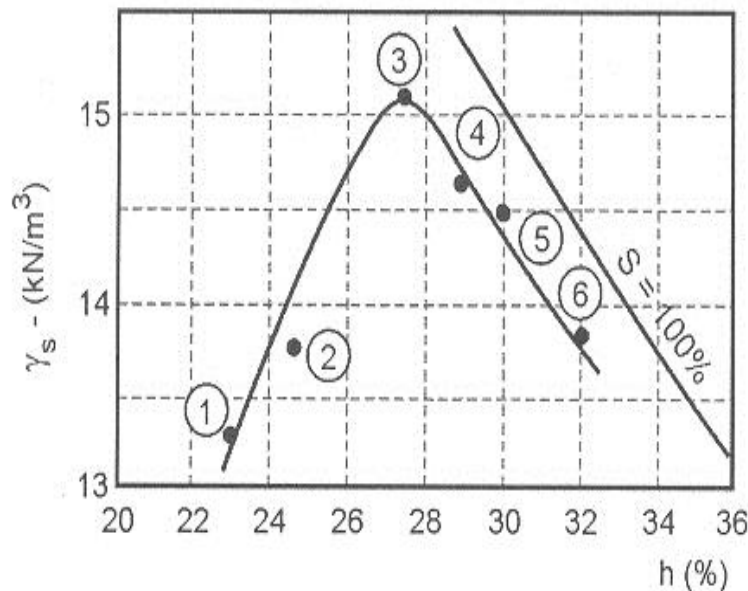


# Resistência (e deformabilidade)



Resistência = f(compactação)

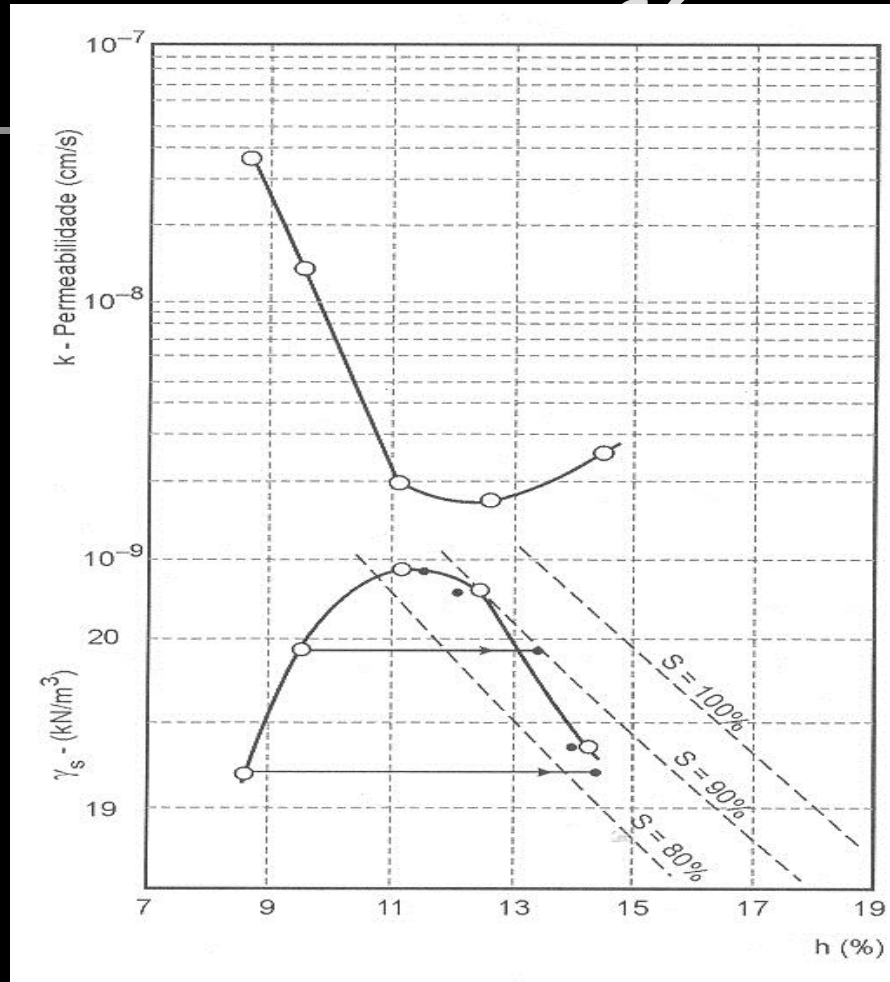
Deformabilidade = f(compactação)



**FIGURA 6.9**

**Material compactado diferentemente em diversas zonas da barragem propicia diferentes propriedades mecânicas para atender aos requisitos de projeto**

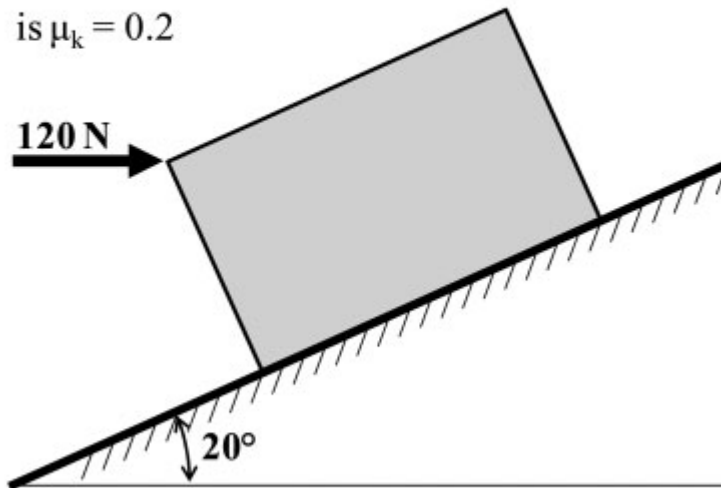
# Permeabilidade = (compactação)



**Material compactado diferentemente em diversas zonas da barragem propicia diferentes propriedades mecânicas para atender aos requisitos de projeto**

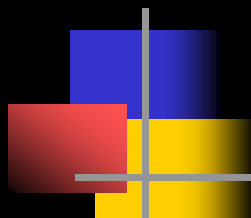
# Bloco deslizante

GIVEN: A 300 N block rests on a 20-degree incline and is acted upon by a 120 N force, as shown below. The static coefficient of friction is  $\mu_k = 0.2$

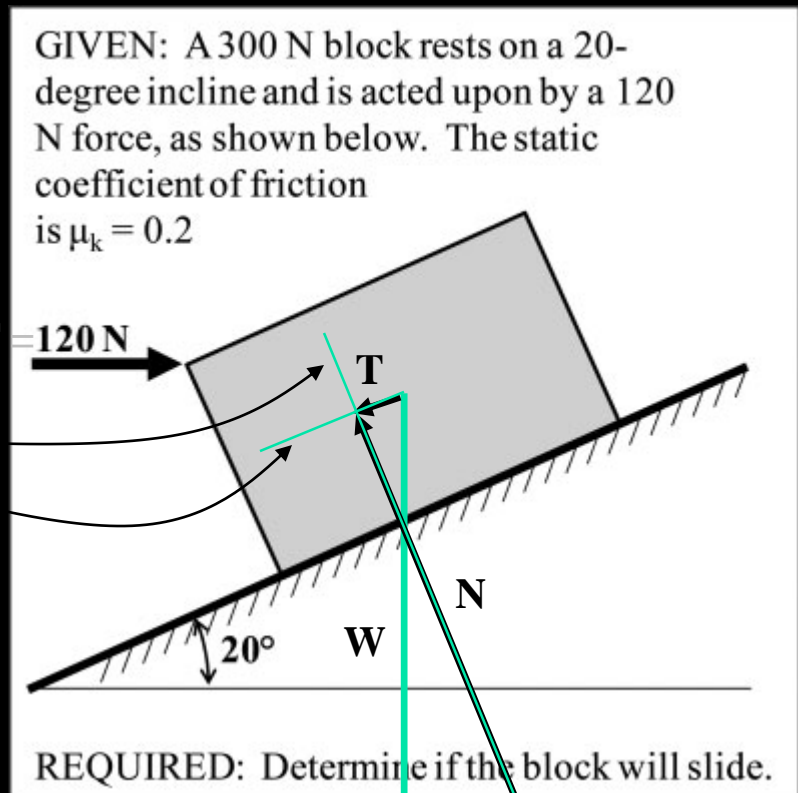


REQUIRED: Determine if the block will slide.





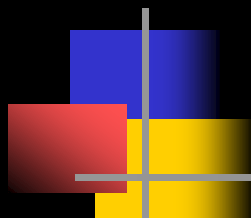
# Bloco deslizando



Linhas de ação  
(direções)  
conhecidas

Escorrega?

Comparar  
 $\mu_k \times N$   
(resistência)  
com T  
(solicitação)!



# Bloco deslizante

GIVEN: A 300 N block rests on a 20-degree incline and is acted upon by a 120 N force, as shown below. The static coefficient of friction is  $\mu_k = 0.2$

**F = 0 N**

**Linhas de ação (direções) conhecidas**

**T**

**W**

**20°**

**N**

REQUIRED: Determine if the block will slide.

**Hipótese do Equilíbrio Limite**

$$T = \frac{S}{F}$$

**S = resistência de atrito**  
 $= \mu_k N$

$$F = \frac{\mu_k N}{T}$$

**F = fator de segurança**

# Processo usual de análise

- Equilíbrio Limite

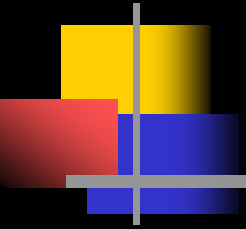
- 1) Equilíbrio estático = Estática
- 2) Limite = iminência da ruptura

$$\tau = s / F \Rightarrow F = s / \tau$$

$$s = c' + \sigma' \operatorname{tg} \varphi'$$
$$s = s_u$$

- Pesquisa da superfície crítica (minimização de F)

# Talude infinito



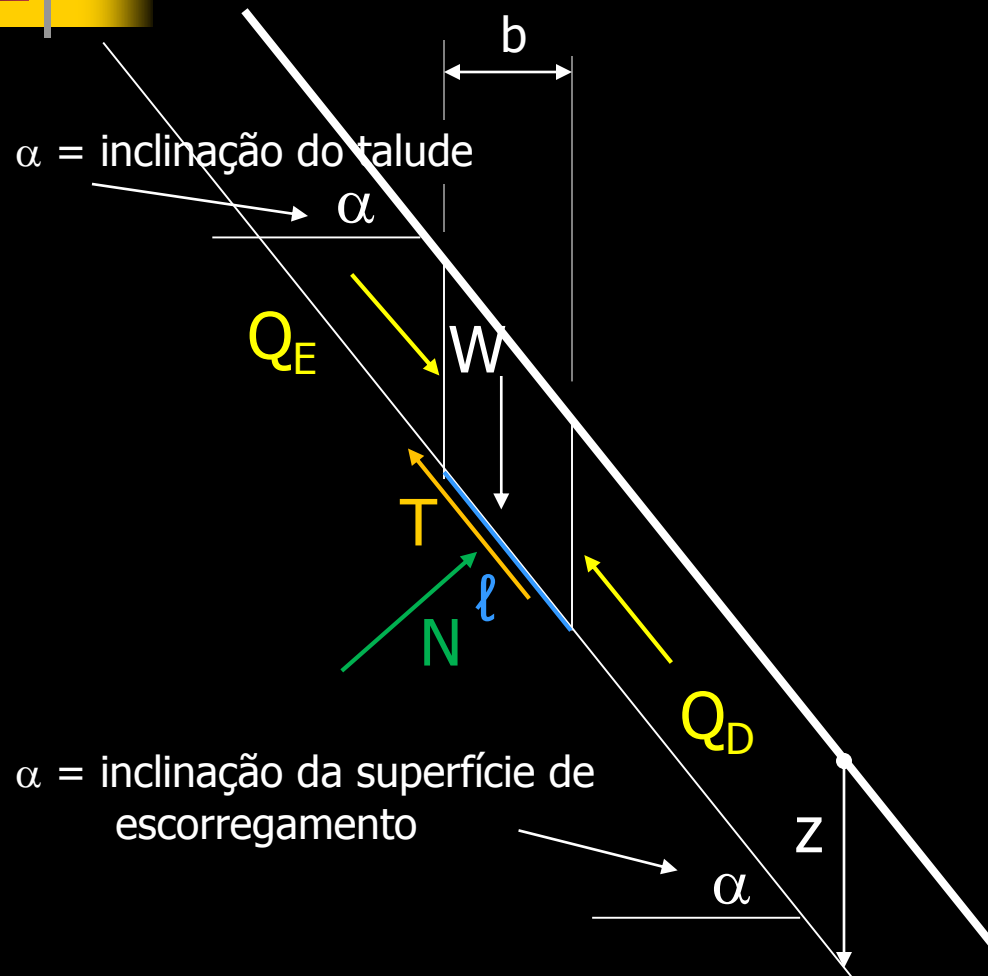
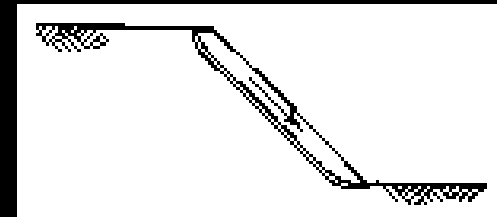


# Equilíbrio estático (no plano)

---

- Equilíbrio de **forças** na direção 1 (por exemplo, **vertical**)
- Equilíbrio de **forças** na direção 2 (por exemplo, **horizontal**)
- Equilíbrio de **momentos**

# Talude infinito



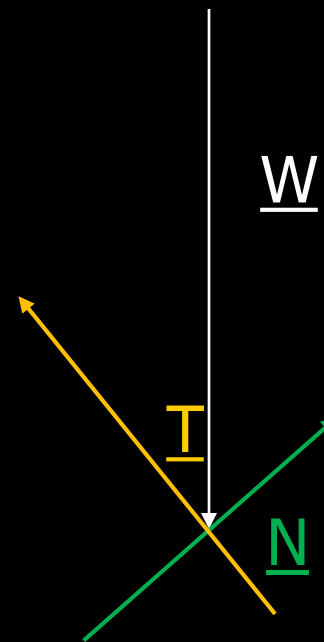
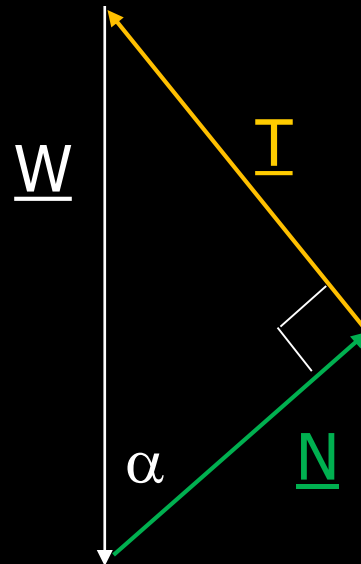
- $Q_E = - Q_D$
- $N = N' + U$
- $W = \gamma z b =$   
 $= \gamma z l \cos \alpha$

# Equilíbrio

## ■ Forças

- $T = W \operatorname{sen} \alpha = \gamma z \ell \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha$
- $N = W \operatorname{cos} \alpha = \gamma z \ell \cos \alpha \operatorname{cos} \alpha$

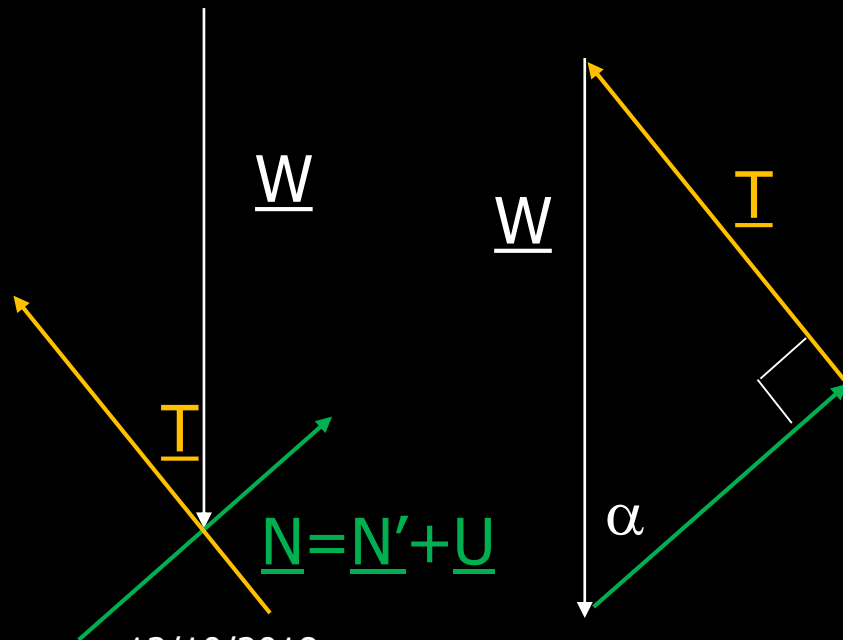
## ■ Momentos



# Equilíbrio limite

## Equilíbrio

- $T = \gamma z \ell \cos \alpha \sin \alpha$
- $N = \gamma z \ell \cos^2 \alpha$



12/10/2018

## Limite

- $T = S / F = s \ell / F$
- $F = (c \ell + \sigma' \ell \operatorname{tg} \varphi) / T$
- $F = (c \ell + N' \operatorname{tg} \varphi) / T$

$\mu =$   
coeficiente  
de atrito

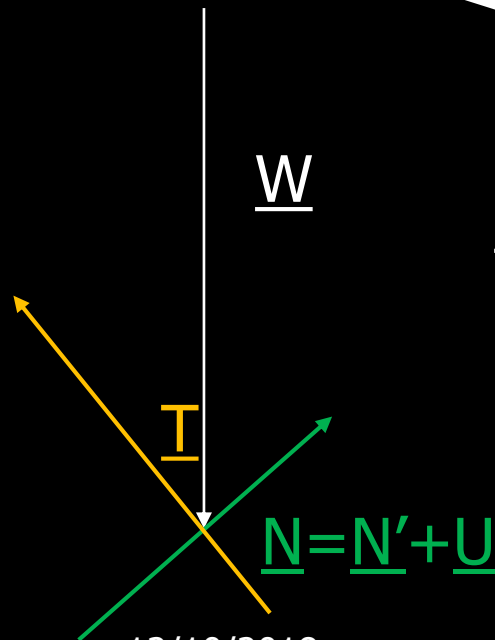
■  $F = \underline{\hspace{10em}}$



# Equilíbrio limite

## ■ Equilíbrio

- $T =$
- $N =$



## ■ Limite

- $T = S / F = s\ell / F$
- $F = (c\ell + \sigma'\ell \operatorname{tg} \phi) / T$
- $F = (c\ell + N' \operatorname{tg} \phi) / T$

$\mu =$   
coeficiente  
de atrito

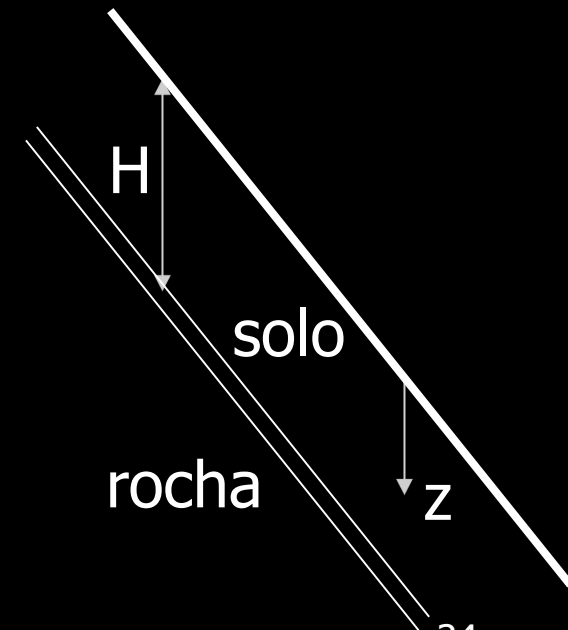
$$F = \frac{[c\ell + (\gamma z\ell \cos^2 \alpha - U) \tan \phi]}{\gamma z\ell \cos \alpha \sin \alpha}$$

$$\underline{N}' = \underline{N} - \underline{U}$$

# Equilíbrio limite de talude infinito:

$F(z)$

$$F(z) = \frac{2c}{\gamma \cdot z \cdot \sin 2\alpha} + \left( 1 - \frac{u}{\gamma \cdot z \cdot \cos^2 \alpha} \right) \cdot \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha}$$



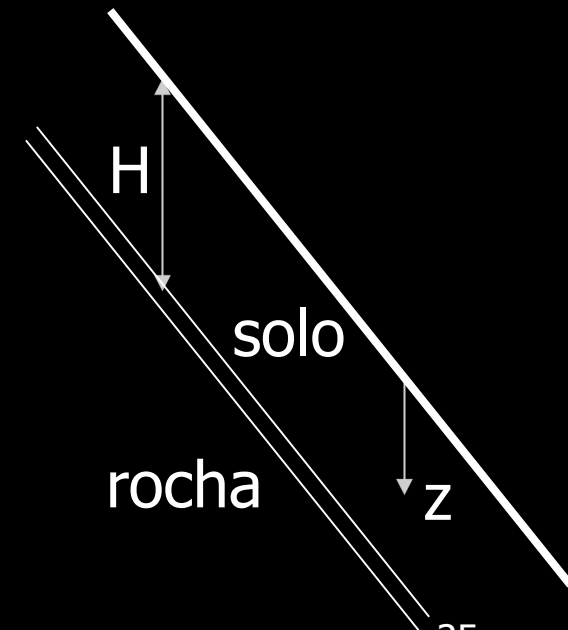
# Equilíbrio limite de talude infinito: pesquisa da superfície de $F_{\min}$

$$F(z) = \frac{2c}{\gamma \cdot z \cdot \sin 2\alpha} + \left( 1 - \frac{u}{\gamma \cdot z \cdot \cos^2 \alpha} \right) \cdot \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha}$$

POSIÇÃO da superfície crítica

$$\min[F(z)] \Rightarrow z = z_{\max} = H$$

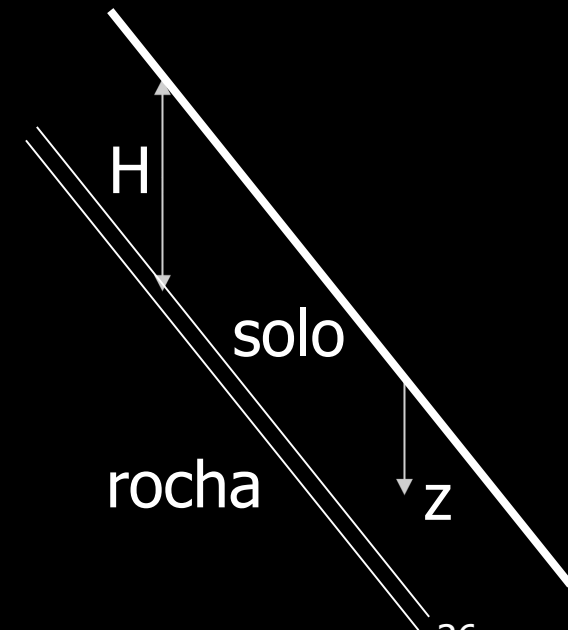
$$\min[F(z)] = F(z_{\max}) = F(H)$$



# Equilíbrio limite de talude infinito:

$F_{mín}$

$$F_{mín} = \frac{2c}{\gamma H \sin 2\alpha} + \left( 1 - \frac{u}{\gamma H \cos^2 \alpha} \right) \frac{\tan \phi}{\tan \alpha}$$

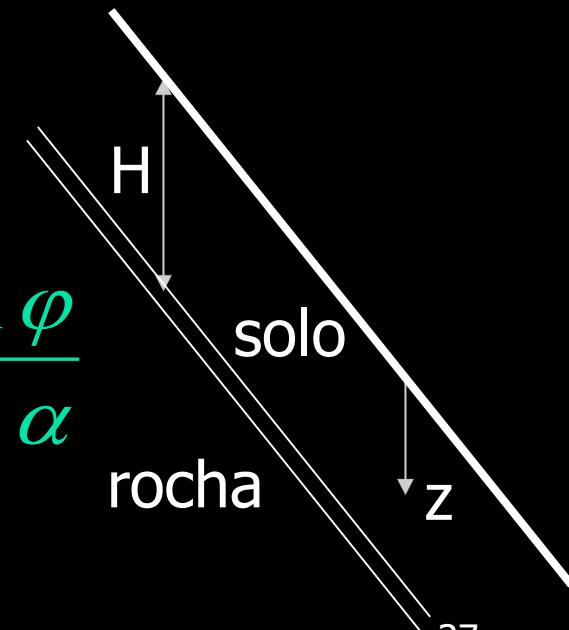


# Número de estabilidade

$$F = \frac{2c}{\gamma H \sin 2\alpha} + \left( 1 - \frac{u}{\gamma H \cos^2 \alpha} \right) \frac{\tan \phi}{\tan \alpha}$$

$$N_E = \frac{c}{\gamma \cdot H}$$

$$F = \frac{2 \cdot N_E}{\sin 2\alpha} + \left( 1 - \frac{u}{\gamma \cdot H \cdot \cos^2 \alpha} \right) \cdot \frac{\tan \phi}{\tan \alpha}$$

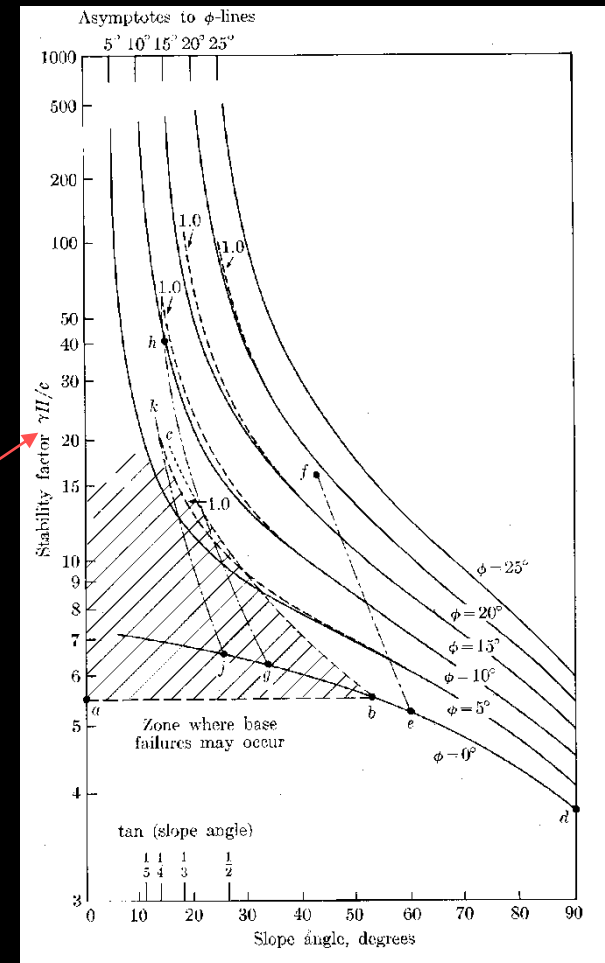


# Número de estabilidade

(importante não apenas para talude infinito!)

Exemplo de ábacos de estabilidade de taludes (taludes em geral)

$$N_E = \frac{c}{\gamma \cdot H} \quad 1 / N_E$$



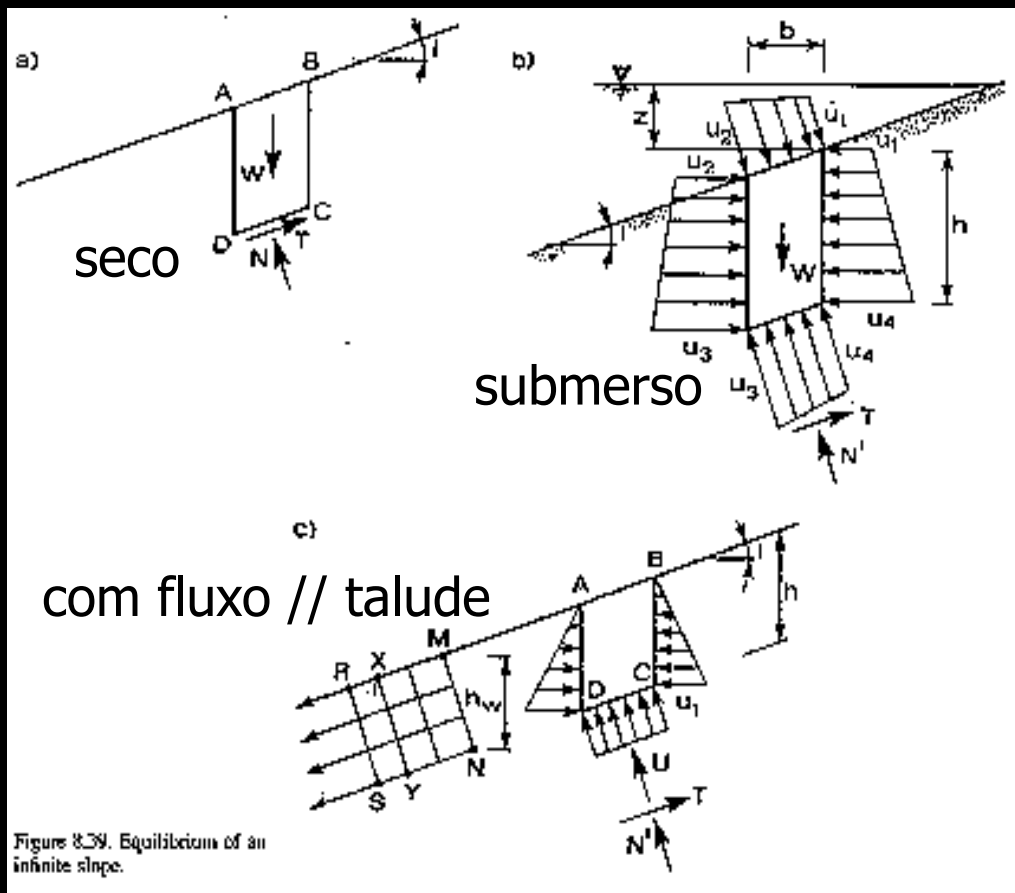


# F de talude infinito

---

$$F = \frac{2 \cdot N_E}{\text{sen } 2\alpha} + \left( 1 - \frac{u}{\gamma \cdot H \cdot \cos^2 \alpha} \right) \cdot \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha}$$

# Talude infinito: casos particulares



- Estudar esses e outros casos, por exemplo no livro-texto de Obras de Terra de autoria do Prof. Faíçal Massad)



# Talude infinito: casos particulares (para não serem esquecidos!)

$$F = \frac{2 \cdot N_E}{\sin 2\alpha} + \left( 1 - \frac{u}{\gamma \cdot H \cdot \cos^2 \alpha} \right) \cdot \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha}$$

$= 0$  se  $c = 0$

- Talude seco ou c/ fluxo vertical p/ baixo:

$$u = 0$$

$$F = \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha}$$

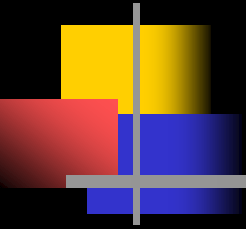
- Com fluxo // talude:

$$u = \gamma_w \cdot H \cdot \cos^2 \alpha$$

$$F \cong \frac{1}{2} \frac{\tan \varphi}{\tan \alpha}$$

# Talude íngreme

---





# Processo usual de análise

---

## ■ Equilíbrio Limite

- **Equilíbrio** estático = Estática
- **Limite** = iminência da ruptura

- $\tau = s / F$

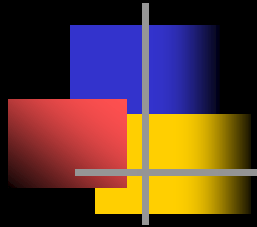
- $F = s / \tau$

$$s = c' + \sigma' \operatorname{tg} \varphi'$$

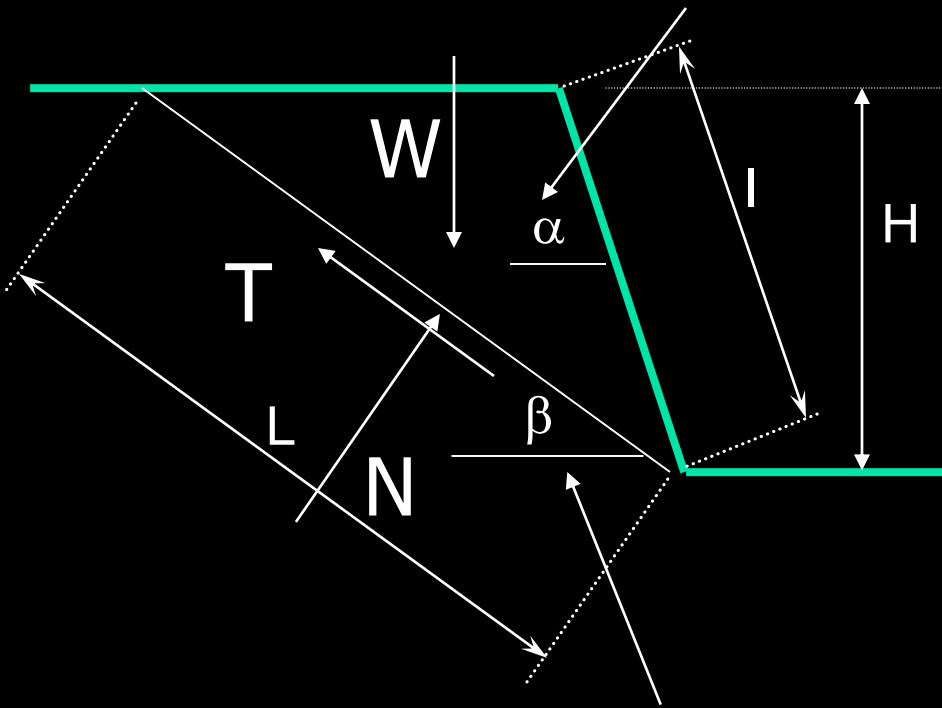
$$s = s_u$$

- Pesquisa da superfície crítica (minimização de F)

# Talude íngreme



$\alpha$  = inclinação do talude



- Equilíbrio

$$\underline{W} + \underline{T} + \underline{N} = \underline{0}$$

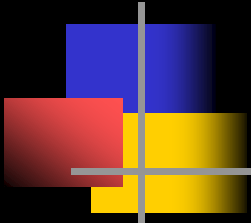
- Limite:

$$T = S / F$$

$$T = (c' \cdot L + N' \cdot \tan \varphi') / F$$

$$T = C_d' \cdot L + N' \cdot \tan \varphi_d'$$

$\beta$  = inclinação da superfície de escorregamento ( $\beta_c$  para a crítica)



$$N = N' + U = W \cos \beta \quad \text{Equilíbrio na direção normal}$$

$$T = W \sin \beta \quad \text{Equilíbrio na direção tangencial}$$

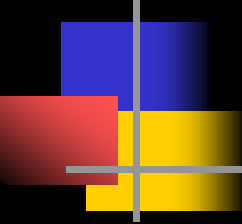
$$T = \frac{S}{F} = \frac{cL + N' \tan \varphi}{F} = \frac{cL + (W \cos \beta - U) \tan \varphi}{F}$$

Limite

$$F = \frac{cL + (W \cos \beta - U) \tan \varphi}{W \sin \beta} \quad H = L \sin \beta$$

$$F = \frac{c \frac{H}{\sin \beta} + (W \cos \beta - U) \tan \varphi}{W \sin \beta}$$

$W = ?$



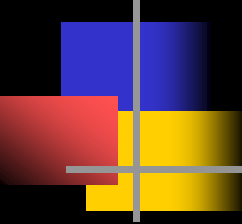

---


$$W = \gamma A \quad A = \frac{1}{2} LI \sin(\alpha - \beta) \quad I = \frac{H}{\sin \alpha}$$

$$A = \frac{1}{2} \frac{H}{\sin \beta} \frac{H}{\sin \alpha} [\sin \alpha \cos \beta - \sin(\beta) \cos \alpha]$$

$$A = \frac{1}{2} H^2 \left[ \frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha} \right]$$

$$W = \frac{1}{2} \gamma H^2 \left[ \frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha} \right] \quad F = \frac{c \frac{H}{\sin \beta} + (W \cos \beta - U) \tan \varphi}{W \sin \beta}$$



$$F = \frac{c \frac{H}{\sin \beta} + \left\{ \frac{1}{2} \gamma H^2 \left[ \frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha} \right] \cos \beta - U \right\} \tan \varphi}{\frac{1}{2} \gamma H^2 \left[ \frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha} \right] \sin \beta}$$

$$F = \frac{2 \frac{c}{\gamma H} \frac{1}{\sin \beta} + \left\{ \left[ \frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha} \right] \cos \beta - \frac{2U}{\gamma H^2} \right\} \tan \varphi}{\left[ \frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha} \right] \sin \beta}$$

$$F = \frac{2N_E \frac{1}{\sin \beta} + \left\{ \left[ \frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha} \right] \cos \beta - \frac{2U}{\gamma H^2} \right\} \tan \varphi}{\left[ \frac{1}{\tan \beta} - \frac{1}{\tan \alpha} \right] \sin \beta}$$

**Qual o  $\beta$   
que leva ao  
F mínimo?**



# Talude íngreme: equilíbrio limite

---

$$\frac{c_d}{\gamma \cdot H} = \frac{N_E}{F} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{sen}(\alpha - \beta) \cdot \text{sen}(\beta - \varphi_d)}{\text{sen} \alpha \cdot \cos \varphi_d}$$

POSIÇÃO da superfície crítica

$$\frac{\partial F}{\partial \beta} = 0 \Rightarrow \beta = \beta_c = \frac{\alpha + \varphi_d}{2}$$





# F de talude íngreme

$$\text{Com: } \beta_c = \frac{\alpha + \varphi_d}{2}$$

$$\frac{c_d}{\gamma \cdot H} = \frac{N_E}{F} = \frac{1 - \cos(\alpha - \varphi_d)}{4 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \varphi_d}$$

**Não vale para taludes com  
inclinação inferior a cerca de 60°**



# Talude genérico

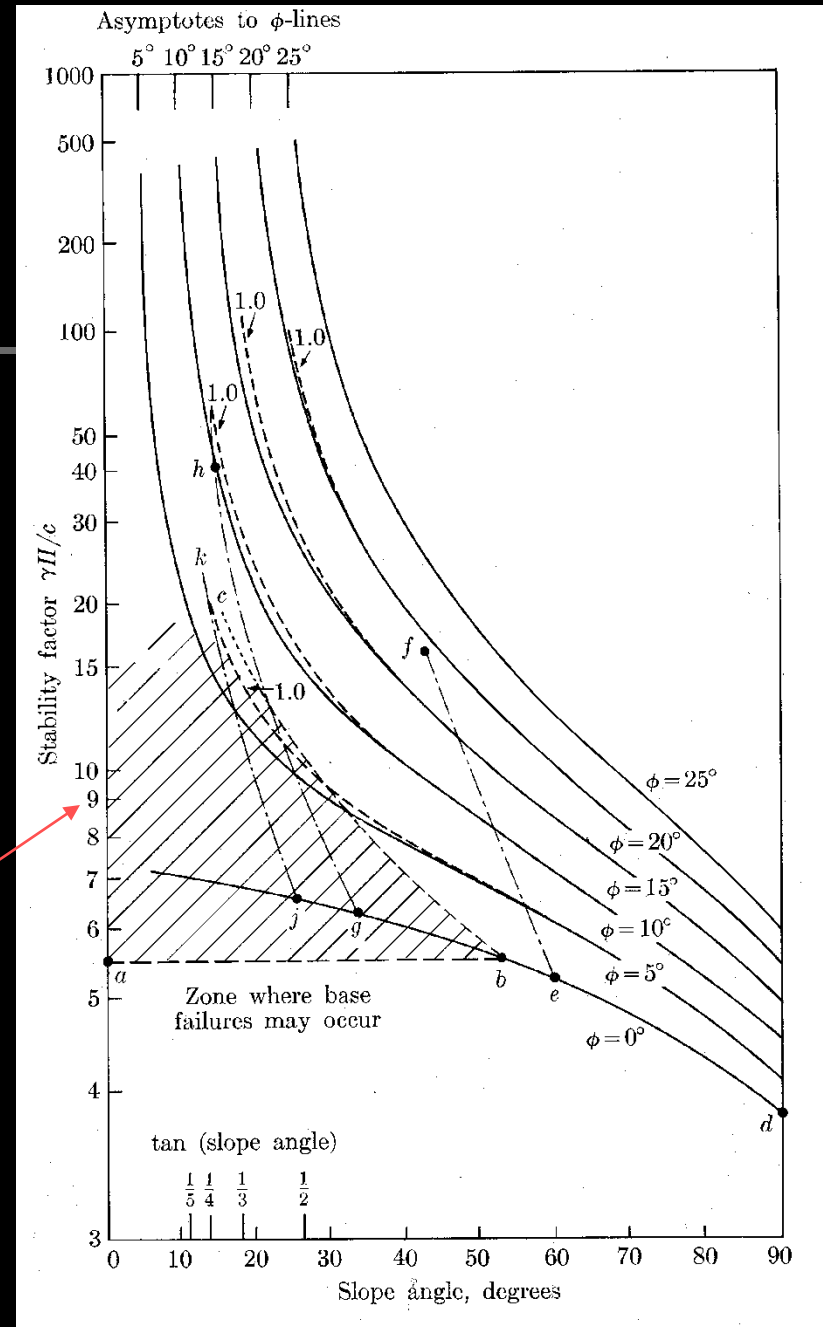
---

Ábacos para pré-dimensionamento  
(também obtidos pelo processo de  
equilíbrio limite usual)

# Ábacos de estabilidade de taludes (taludes em geral)

$$1 / N_E$$

O mesmo  $N_E$ , número de estabilidade, do talude infinito!

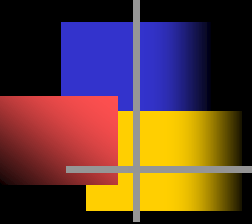




# Talude genérico

---

Processos de análise de  
equilíbrio limite



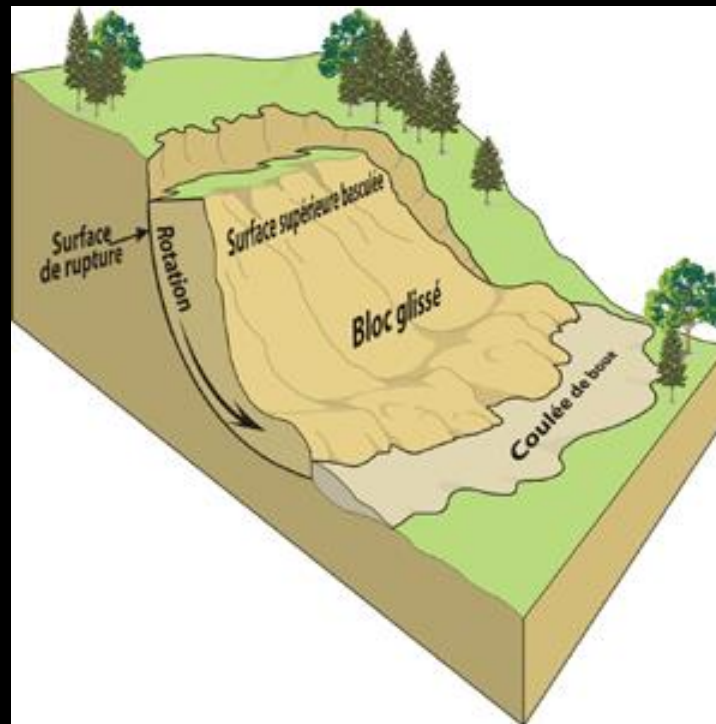
# Análise de estabilidade

## Processo do equilíbrio limite

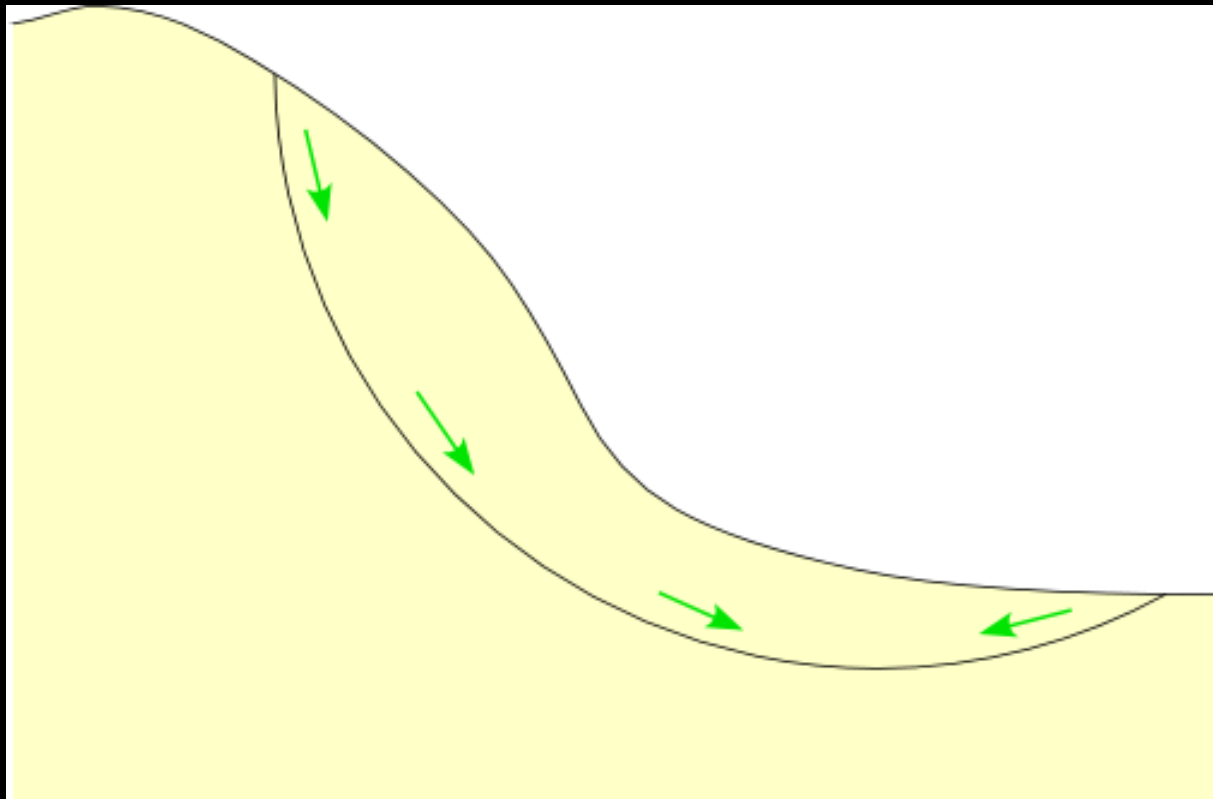
---

- Identificar tipo de instabilidade (modo de ruína)
- Escolher superfície de escorregamento para análise
- Identificar massa em escorregamento delimitada pela superfície escolhida
- Identificar forças atuantes na massa
- Atribuir às tensões na superfície de escorregamento valor compatível com o critério de resistência (minorado por  $F$ )
- Escrever equações de equilíbrio
- Pesquisar superfície mais crítica

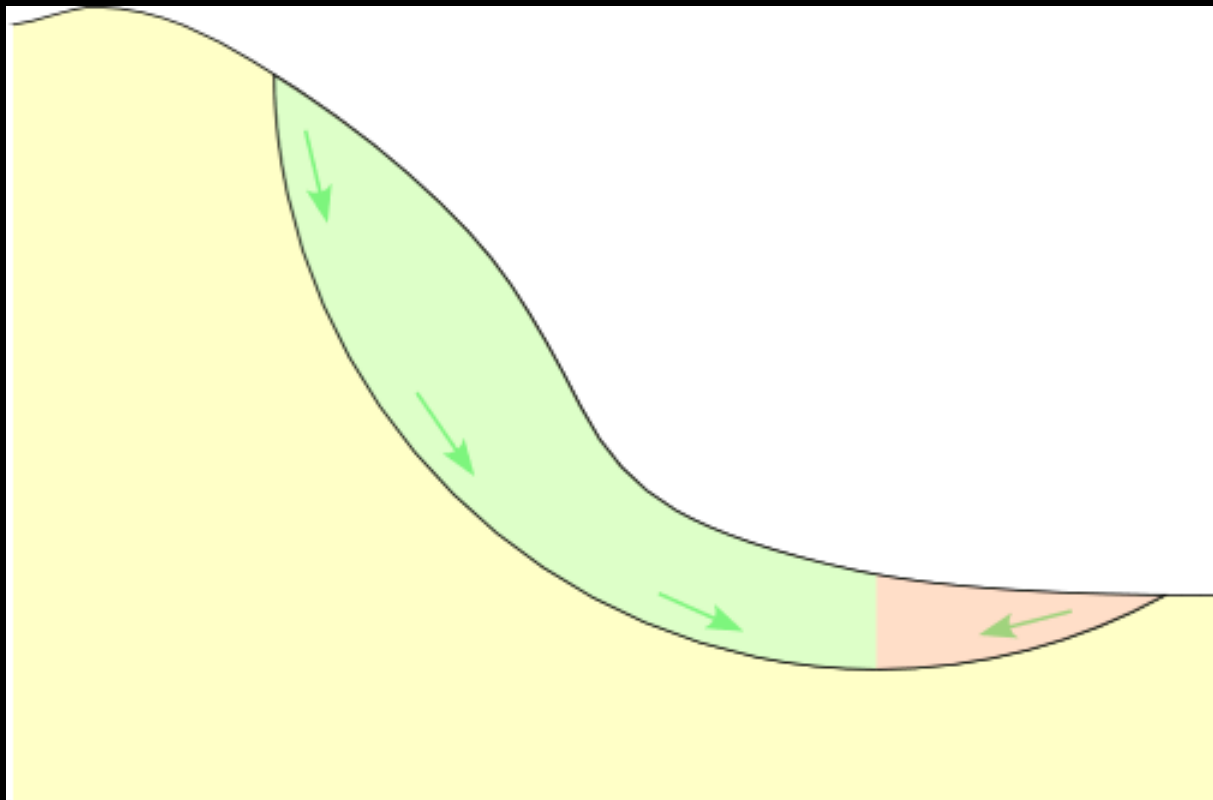
# Escorregamento rotacional



# Escolher superfície para análise (2D?)

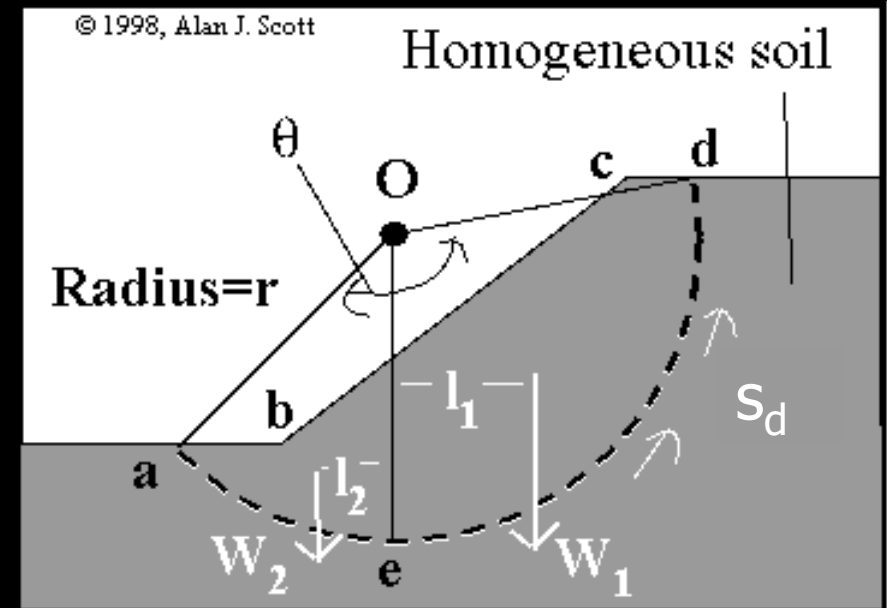
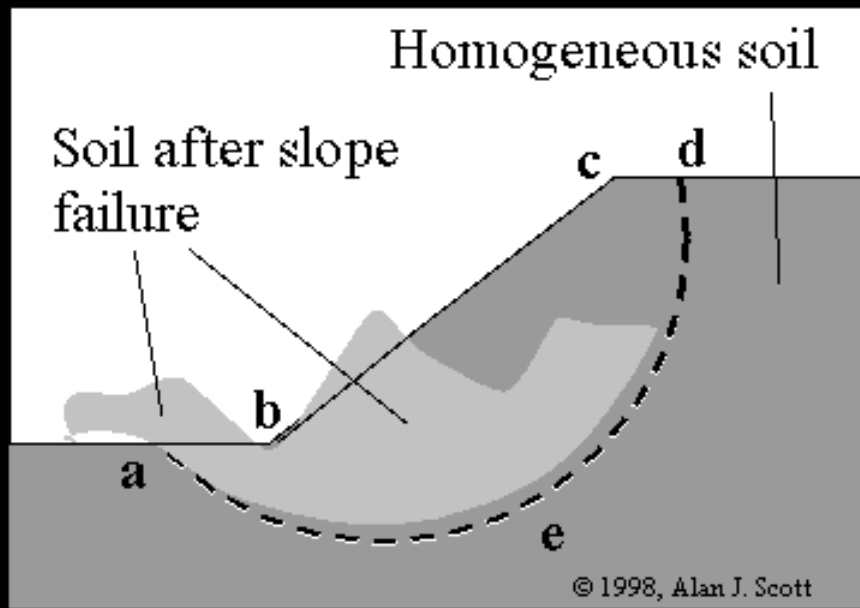


# Massa em escorregamento

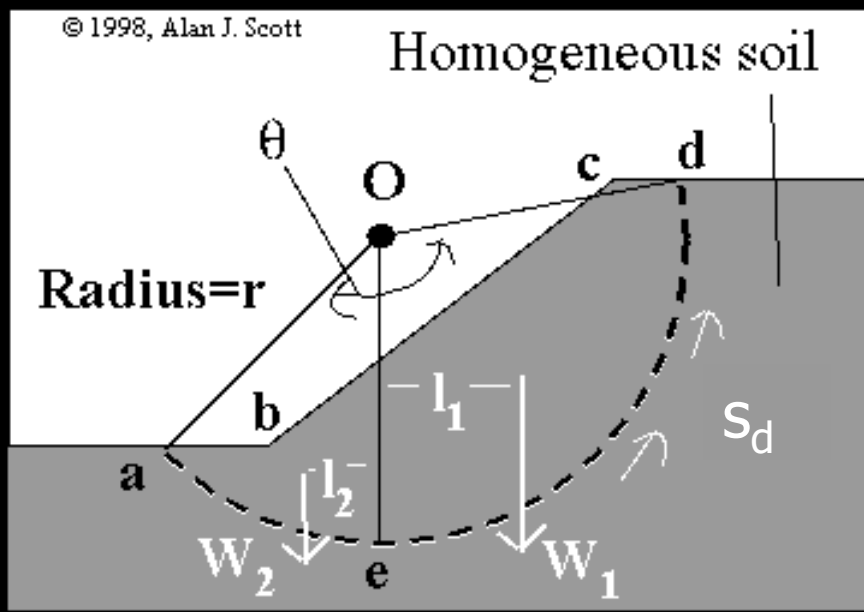




# Forças atuantes na massa

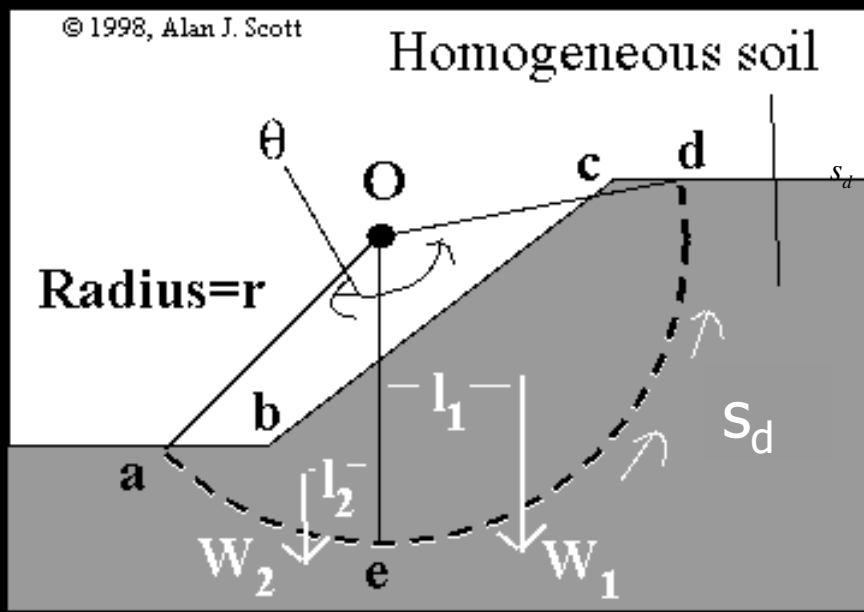


# Tensão de cisalhamento na superfície = resistência / F



$$S_d = s / F$$

# De acordo com a situação, resistência / F pode ser...



$$S_d = \begin{aligned} & s_u / F \\ & \text{ou} \\ & c' / F + \sigma' (\text{tg } \phi') / F \end{aligned}$$

# Equações de equilíbrio da massa

- Equilíbrio de **forças** na direção **vertical**
- Equilíbrio de **forças** na direção **horizontal**
- Equilíbrio de **momentos**
  - $M_S = W_1 \ell_1 - W_2 \ell_2$
  - $M_D = M_R/F = s_d (\text{arco}) \times 1 \times r$
  - Equilíbrio limite:  $M_S = M_D$

# Equilíbrio de momentos da massa

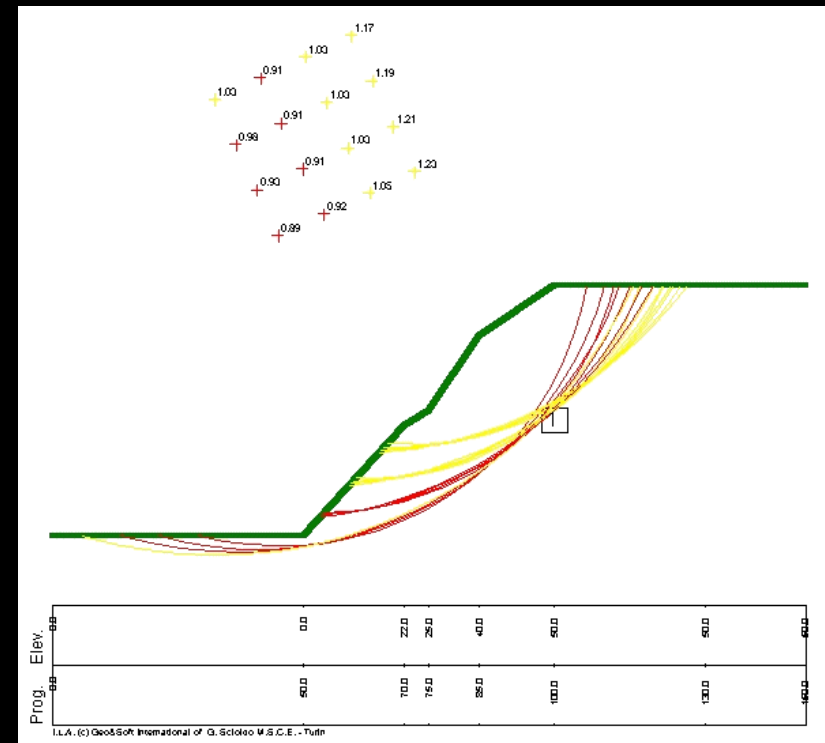
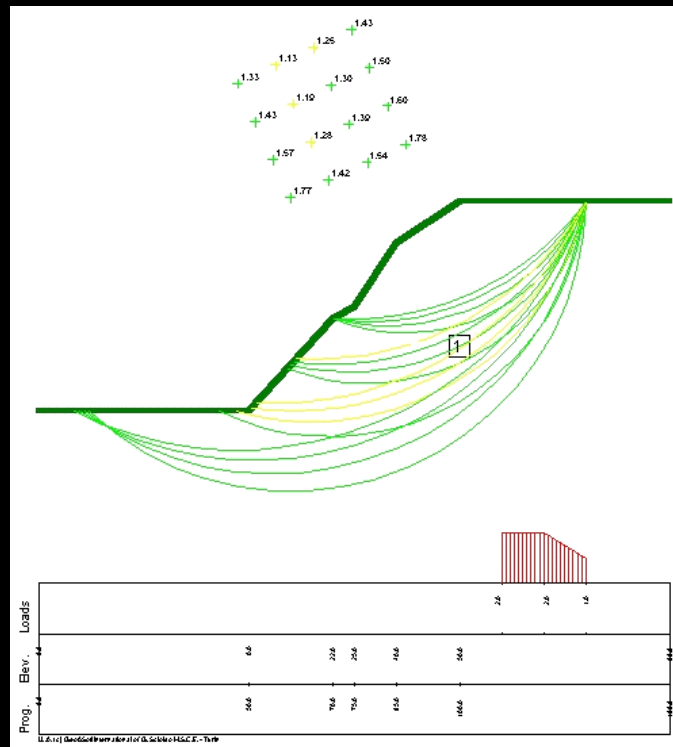
- $M_S = W_1 \ell_1 - W_2 \ell_2$
- $M_D = M_R/F = s/F (\theta \times r) \times 1 \times r$
- Equilíbrio limite:  $M_S = M_D$

- $$F = \frac{M_R}{M_S}$$

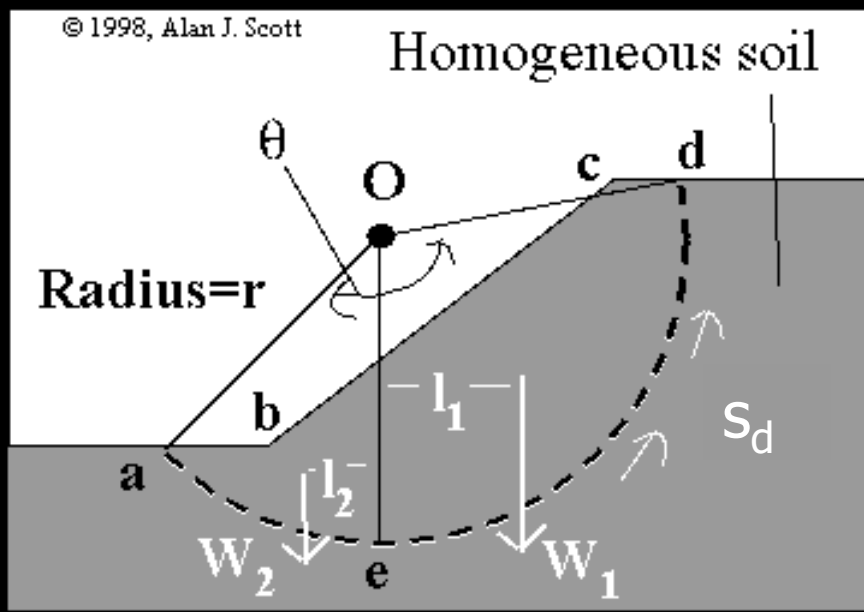
$$F = \frac{s \theta r^2}{W_1 \ell_1 - W_2 \ell_2}$$



# Pesquisar superfície crítica ( $F_{\min}$ )



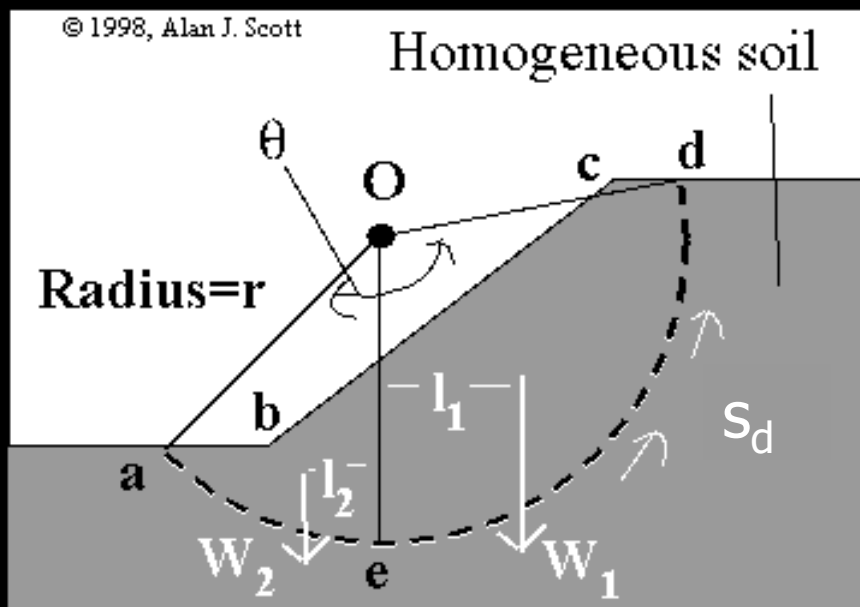
# Massa precisa ser dividida em fatias (lamelas)?



$$S_d = S / F$$



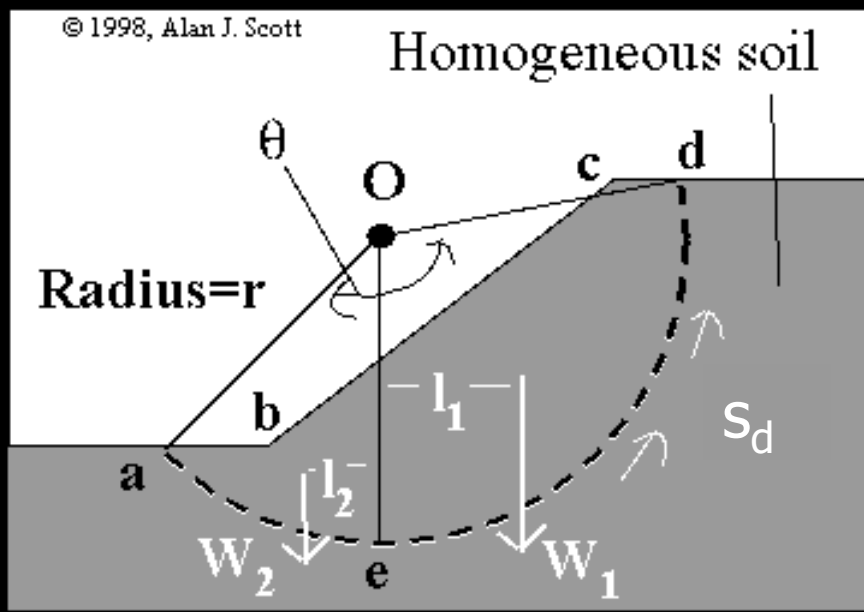
# Massa precisa ser dividida em fatias (lamelas)?



$$S_d = s / F$$

**Fatias só se a resistência ( $s$ )  
depender da tensão normal**

# Talude genérico com $s = s_u$

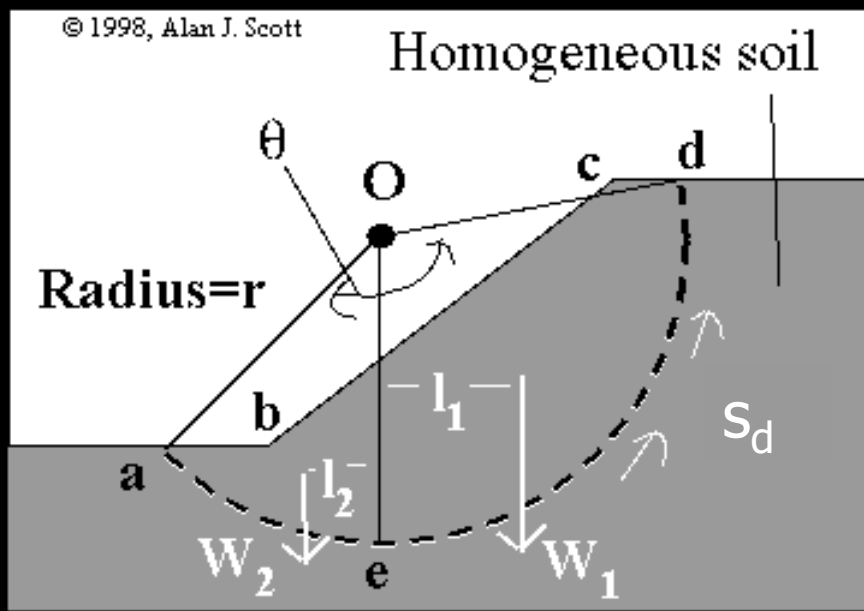


$$F = \frac{s \theta r^2}{W_1 l_1 - W_2 l_2}$$

Se  $s = s_u$  ( $s$  não depende de atrito)...

Desnecessário calcular força normal

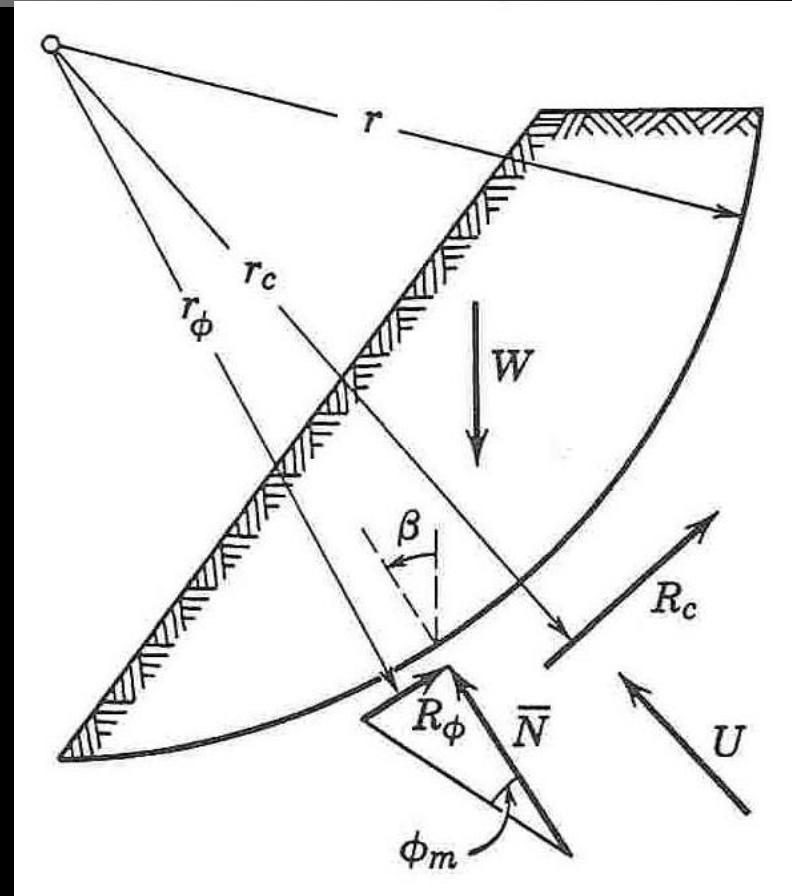
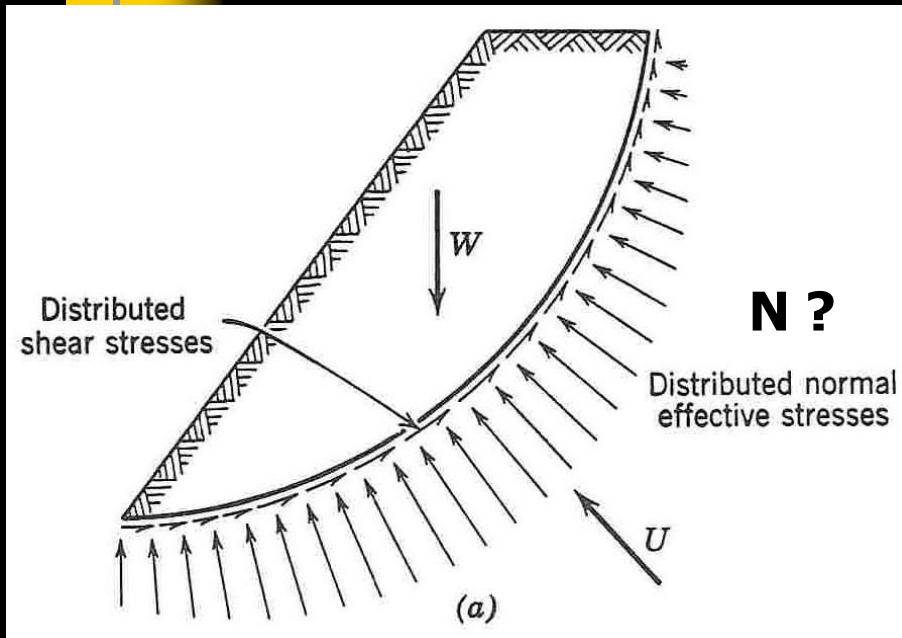
Mas se  $s$  depende do atrito (e, portanto, da tensão normal)...



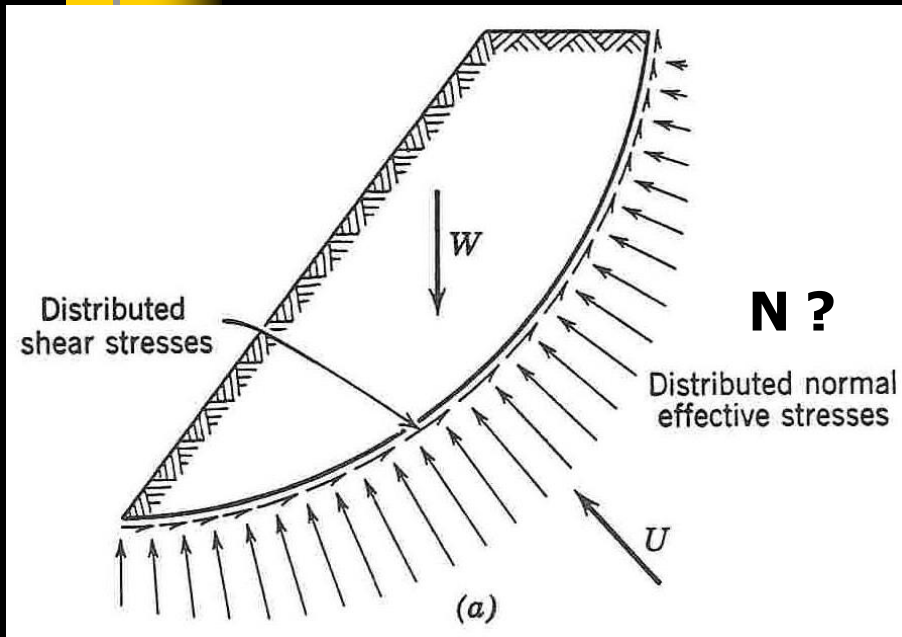
$$S_d = c' / F + \sigma' (\text{tg } \phi') / F$$

Lamelas para calcular força normal

# Qual a força normal resultante na massa em escorregamento?

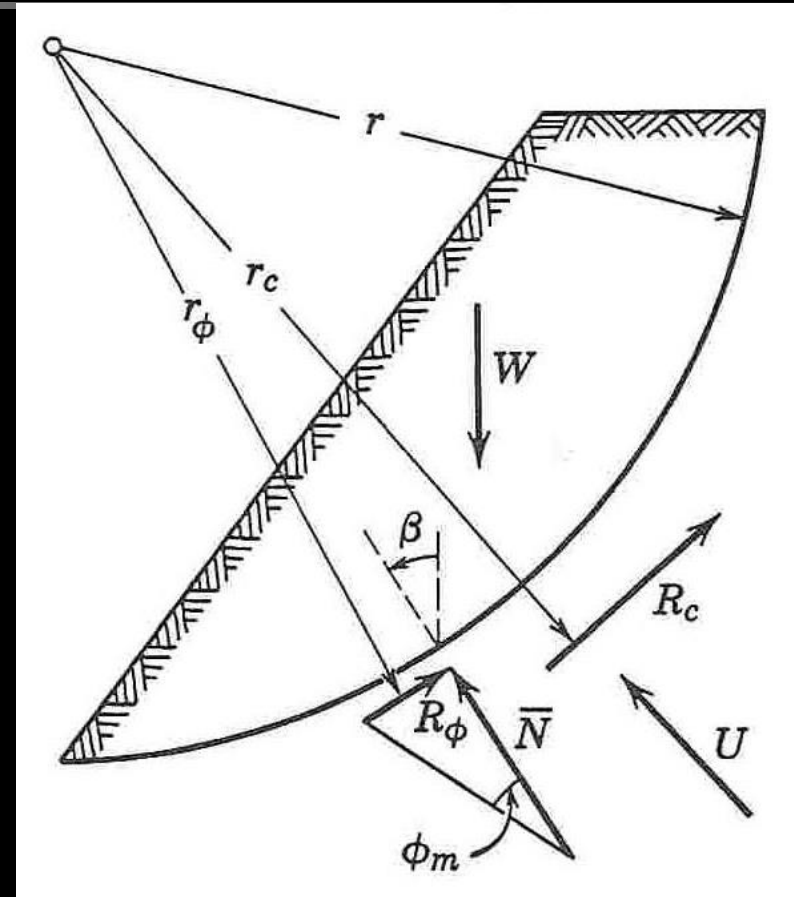


# Qual a força normal resultante na massa em escorregamento?



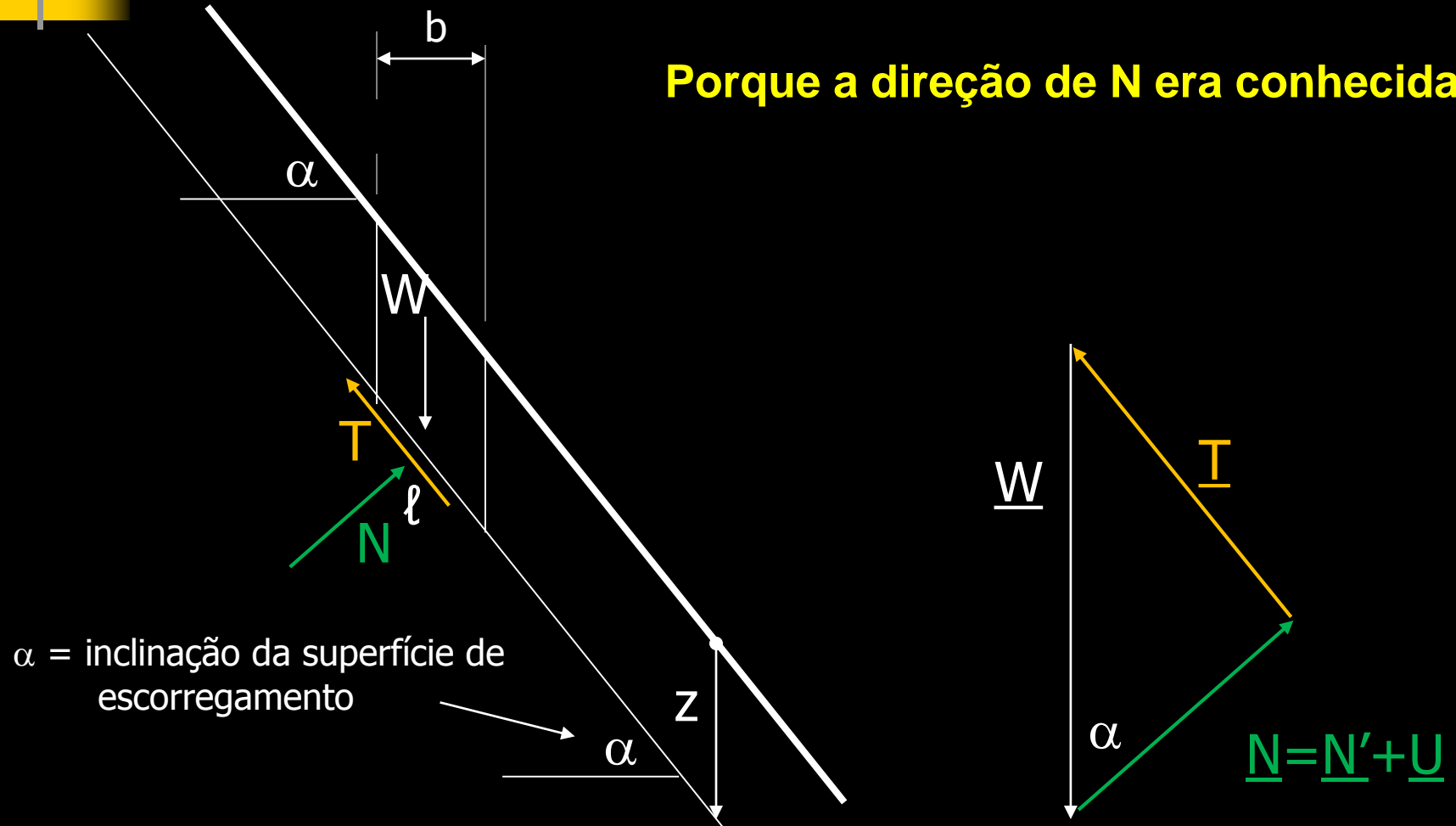
**SOLUÇÃO:**

**Dividir em Lamelas**



# Não havia problema em talude infinito

Porque a direção de  $N$  era conhecida!

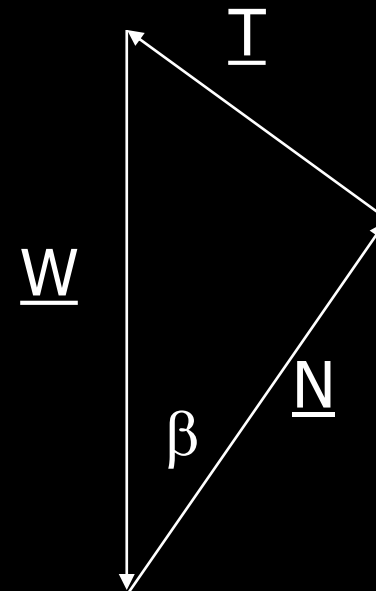
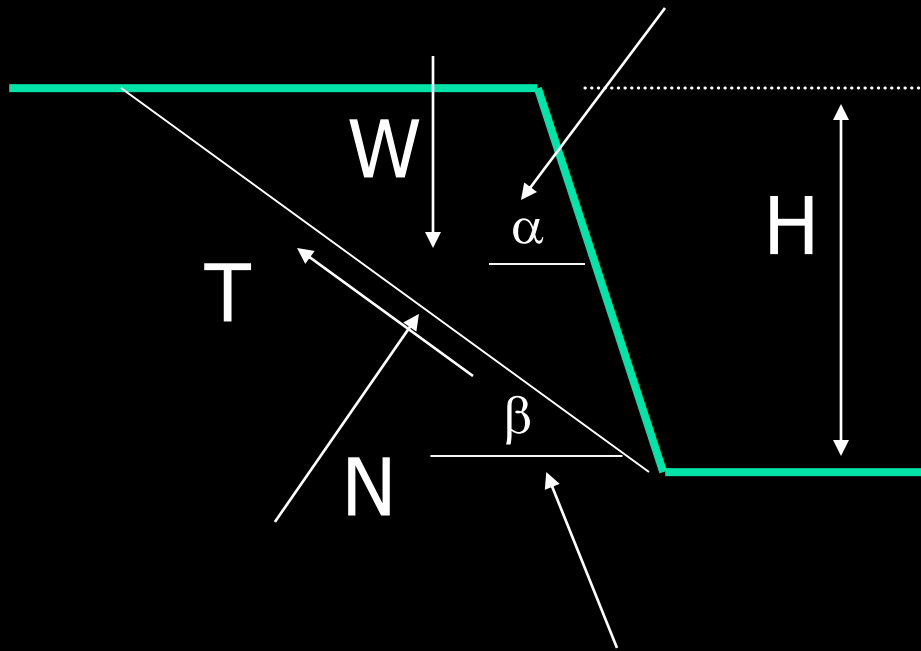


$\alpha$  = inclinação da superfície de escorregamento

# Não havia problema em talude íngreme

$\alpha$  = inclinação do talude

**Porque a direção de N era conhecida!**

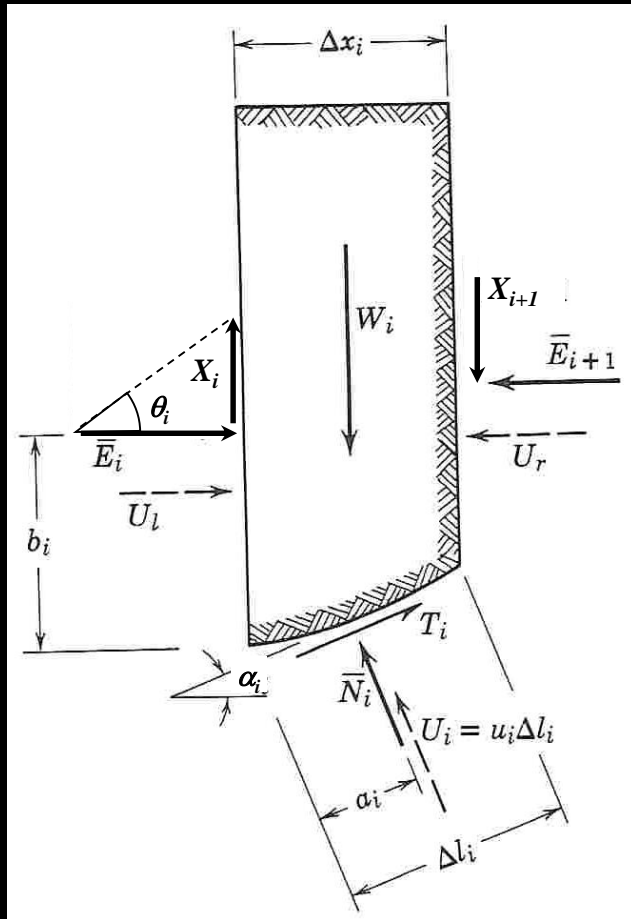


$\beta$  = inclinação da superfície de escorregamento ( $\beta_c$  para a crítica)



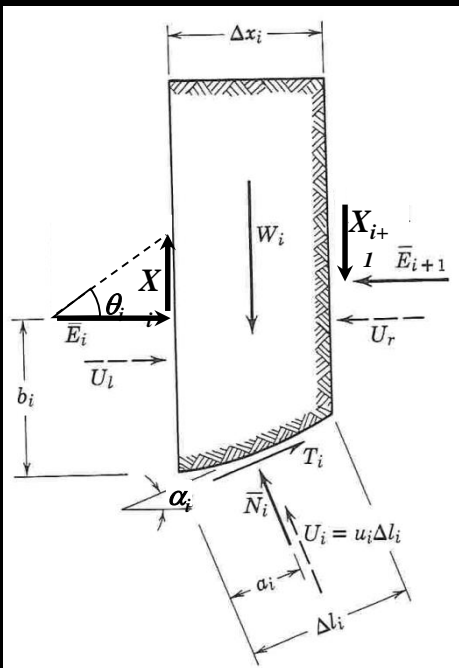


# Forças atuantes na lamela $i$



$$T_i = S_{d_i} = \frac{S_i}{F}$$

# Problema hiperestático: Incógnitas > Equações



Incógnitas			Equações Disponíveis	
Tipo	Número	Sub-Total	Tipo	Número
$\bar{N}$	$n$	$3n-1$	equilíbrio de forças	$2n$
$F$	$1$			
$\bar{E}$	$n-1$			
$X$ (ou $\theta$ )	$n-1$	$2n-1$	equilíbrio de momentos	$n$
$a$	$n$			
$b$	$n-1$			
$n^\circ$ total de incógnitas		$5n-2$	$n^\circ$ total de equações	$3n$

- **$n = 1$ , lamela (ou cunha) única**
- **Mais hipóteses simplificadoras**
- **Introdução da rigidez do material para cálculo tensão-deformação**

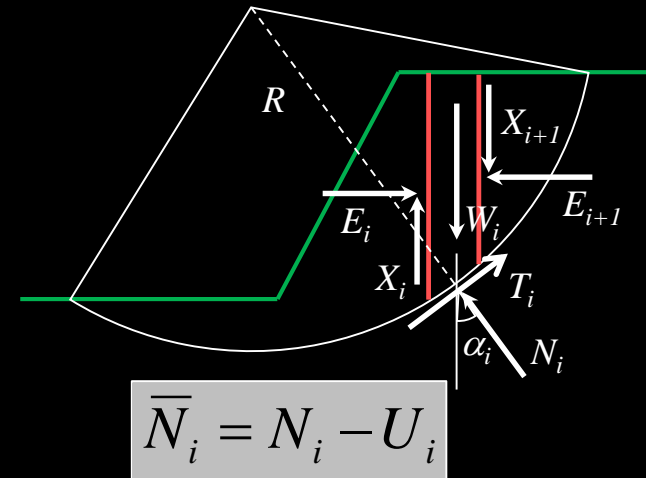
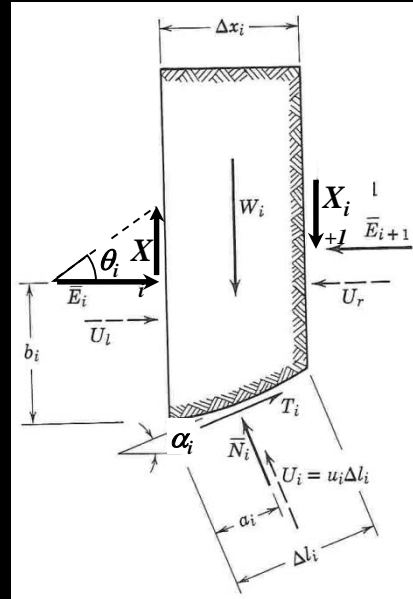


# Equilíbrio de momentos da massa (com lamelas)

$$M_S = \sum W_i R \sin \alpha_i$$

$$M_R = \sum S_i R$$

$$M_D = \sum T_i R = \sum \frac{S_i}{F} R$$



$$\bar{N}_i = N_i - U_i$$

Equilíbrio limite:  $M_S = M_D$        $F = \frac{M_R}{M_S}$

$$F = \frac{\sum S_i}{\sum W_i \sin \alpha_i}$$

O único problema é mesmo **determinar  $N_i$**

$$S_i = \bar{c}_i \Delta l_i + \bar{N}_i \tan \bar{\varphi}_i$$

# Comparação dos processos de lamelas (pormenores)

## ■ Semelhanças

- Todos fazem **equilíbrio em cada lamela** para estimar a **força normal na base**
- Todos fazem alguma hipótese simplificadora (umas mais realistas, outras menos) sobre as **forças nas faces laterais** das lamelas
- Todos escrevem uma ou mais **equações de equilíbrio de toda a massa** para estimar F

## ■ Diferenças

- F por equilíbrio de **momento** da massa, superfície circular
  - **Fellenius**: resultante das forças inter-lamelares é **paralela à base** da lamela (viola equilíbrio de uma lamela para a próxima)
  - **Bishop**: equilíbrio correto de cada lamela, com hipótese sobre relação entre componente normal e tangencial, mas muito trabalhoso
  - **Bishop simplificado**: **componentes verticais das forças inter-lamelares se equilibram na lamela**
- F por equilíbrio de **força horizontal** da massa, qualquer superfície
  - **Janbu**: similar ao Bishop simplificado, mas F determinado pelo equilíbrio de **forças na horizontal** para toda a massa
- F por equilíbrio de **momento e força horizontal** da massa, qualquer superfície
  - **Spencer**: **relação constante** (determinada na análise) entre componentes horizontal e vertical da força inter-lamelar
  - **Morgenstern-Price**: **relação variável** (admitida) entre componentes horizontal e vertical da força inter-lamelar

# Comparação dos processos de lamelas (resumo)

## ■ Semelhanças

- Todos fazem **equilíbrio em cada lamela** para estimar a **força normal na base**
- Todos fazem alguma hipótese simplificadora (umas mais realistas, outras menos) sobre as **forças nas faces laterais** das lamelas
- Todos escrevem uma ou mais **equações de equilíbrio de toda a massa** para estimar F

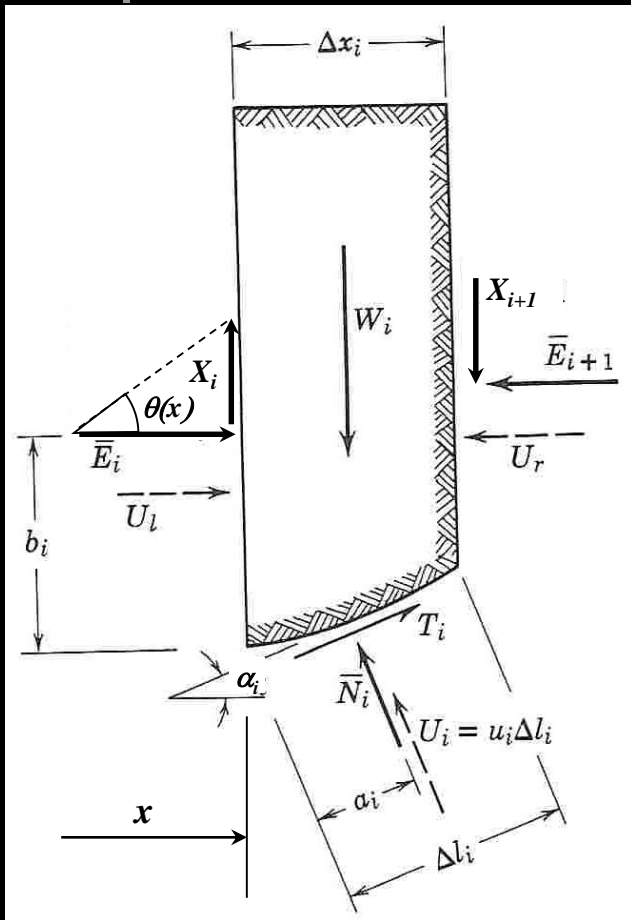
## ■ Diferenças

Forças na direção normal à base	Fellenius
Forças na vertical	Bishop, Janbu
Equilíbrio completo	Spencer, M&P

Fellenius	Resultante paralela à base
Bishop, Janbu	Resultante horizontal
Spencer	Direção constante (calculada)
M&P	Direção variável definida por função

Só momento	Fellenius, Bishop
Só força horizontal	Janbu
Forças e momento	Spencer, M&P

# Inclinação das forças interlamelares: variação



$\theta_i = \theta(x)$  variação de  $\theta$  com  $x$

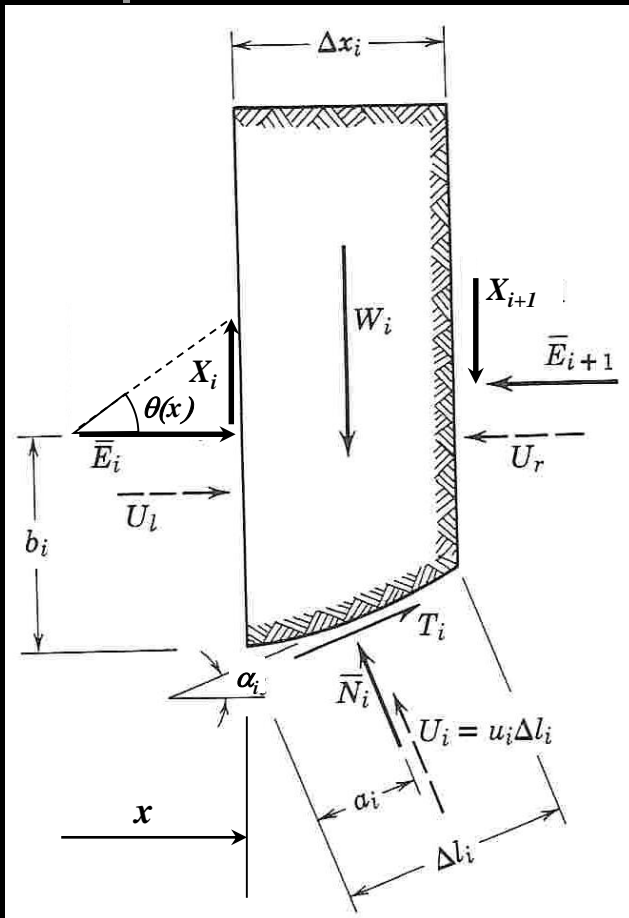
$x$  = ordenada da interface  $i$

Pode-se escrever, por exemplo:  $\theta(x) = \lambda f(x)$

$f(x)$  é uma função (entre 0 e 1) que define somente a forma variação de  $\theta$  com  $x$

$\lambda$  é um escalar que define a escala dos valores de  $\theta(x)$

# Inclinação das forças interlamelares: expressão geral



$$\theta(x) = \lambda f(x)$$

variação de  $\theta$  com  $x$

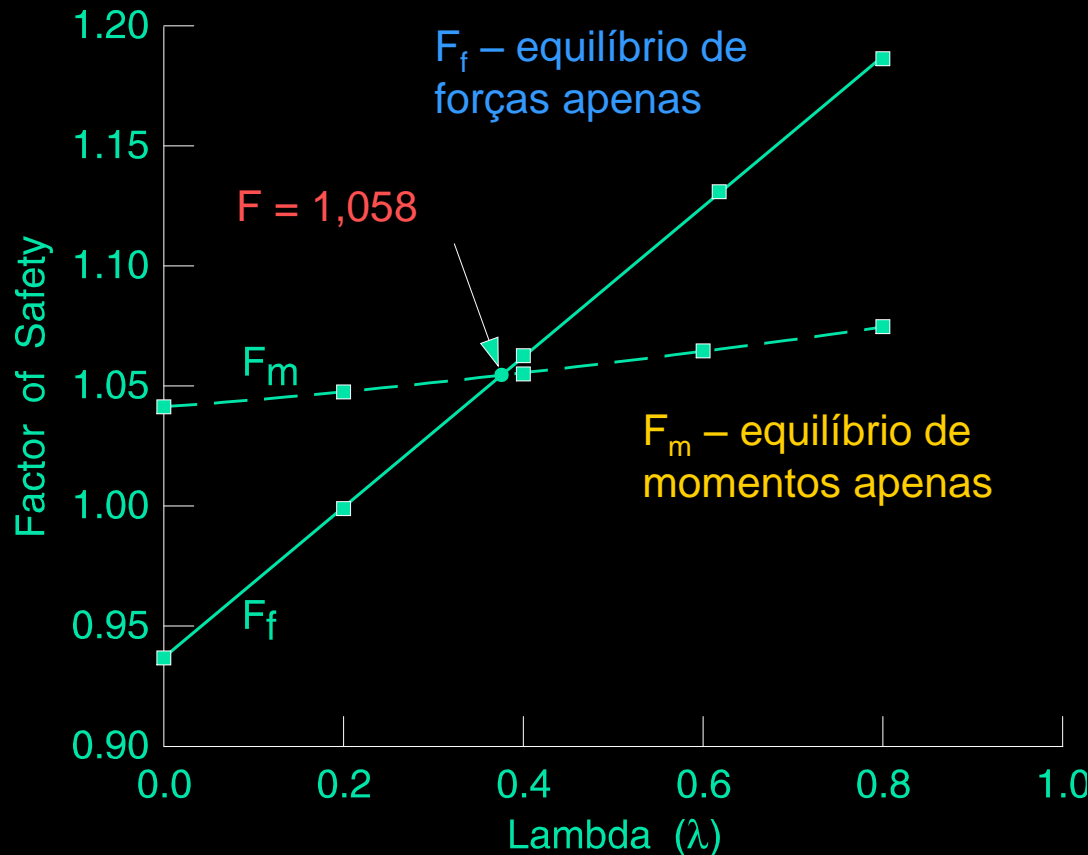
$x =$  ordenada da interface  $i$

## Simplificações dos processos de lamelas usuais

- *Bishop simplificado*:  $\lambda=0$ ,  $\theta(x)=0$  (componentes verticais das forças inter-lamelares se equilibram)
- *Spencer*:  $f(x)=1$  e  $\lambda$  é incógnita a ser determinada pelo processo (com imposição de equilíbrio completo)
- *Morgenstern e Price*:  $f(x)$  é escolhido e  $\lambda$  é incógnita a ser determinada pelo processo (com imposição de equilíbrio completo)



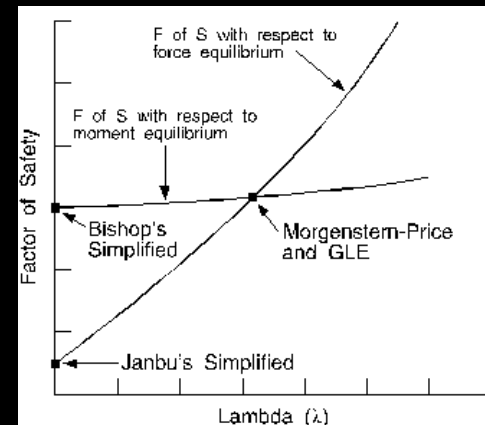
# Comparação dos resultados: M&P, Spencer, Bishop



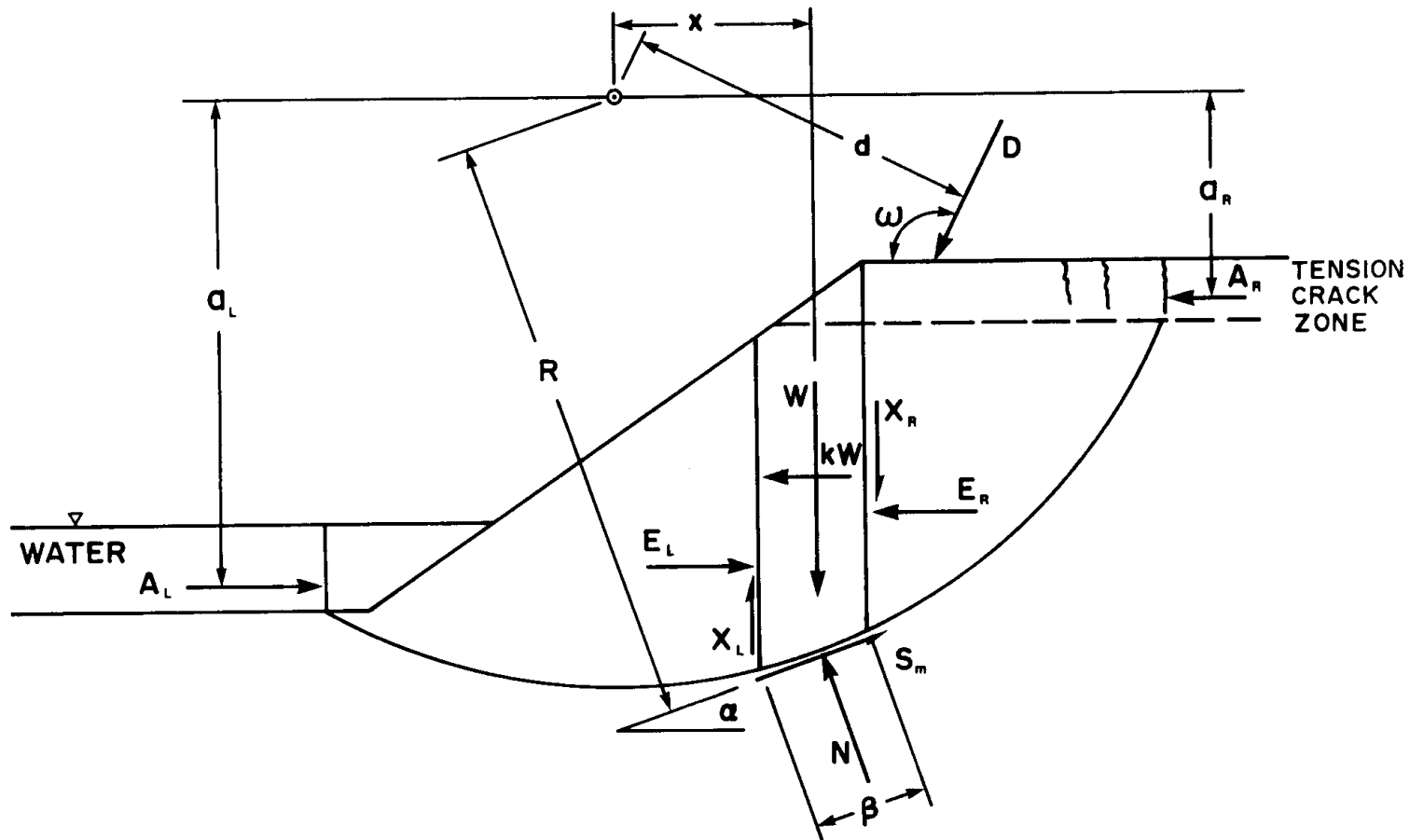
M&P:  $X = E \lambda f(x)$

Spencer:  $f(x) = 1$

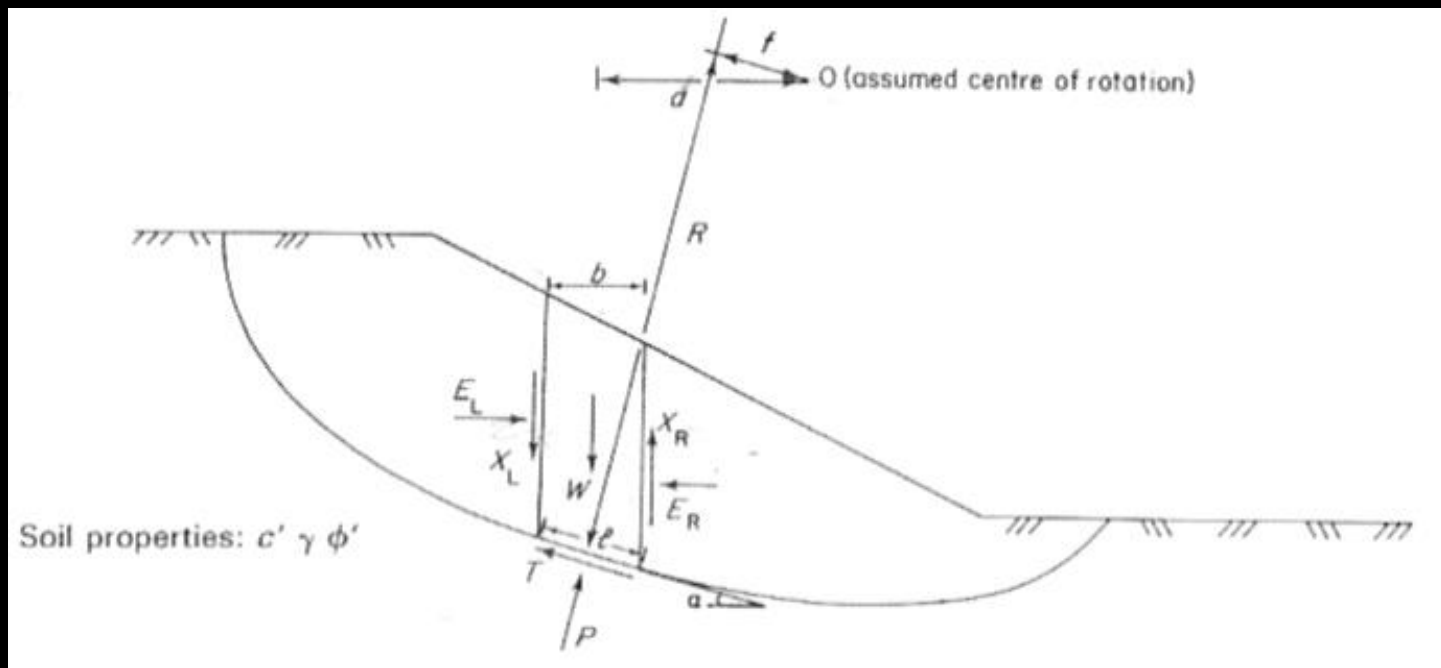
Bishop simplificado:  
 $\lambda = 0$



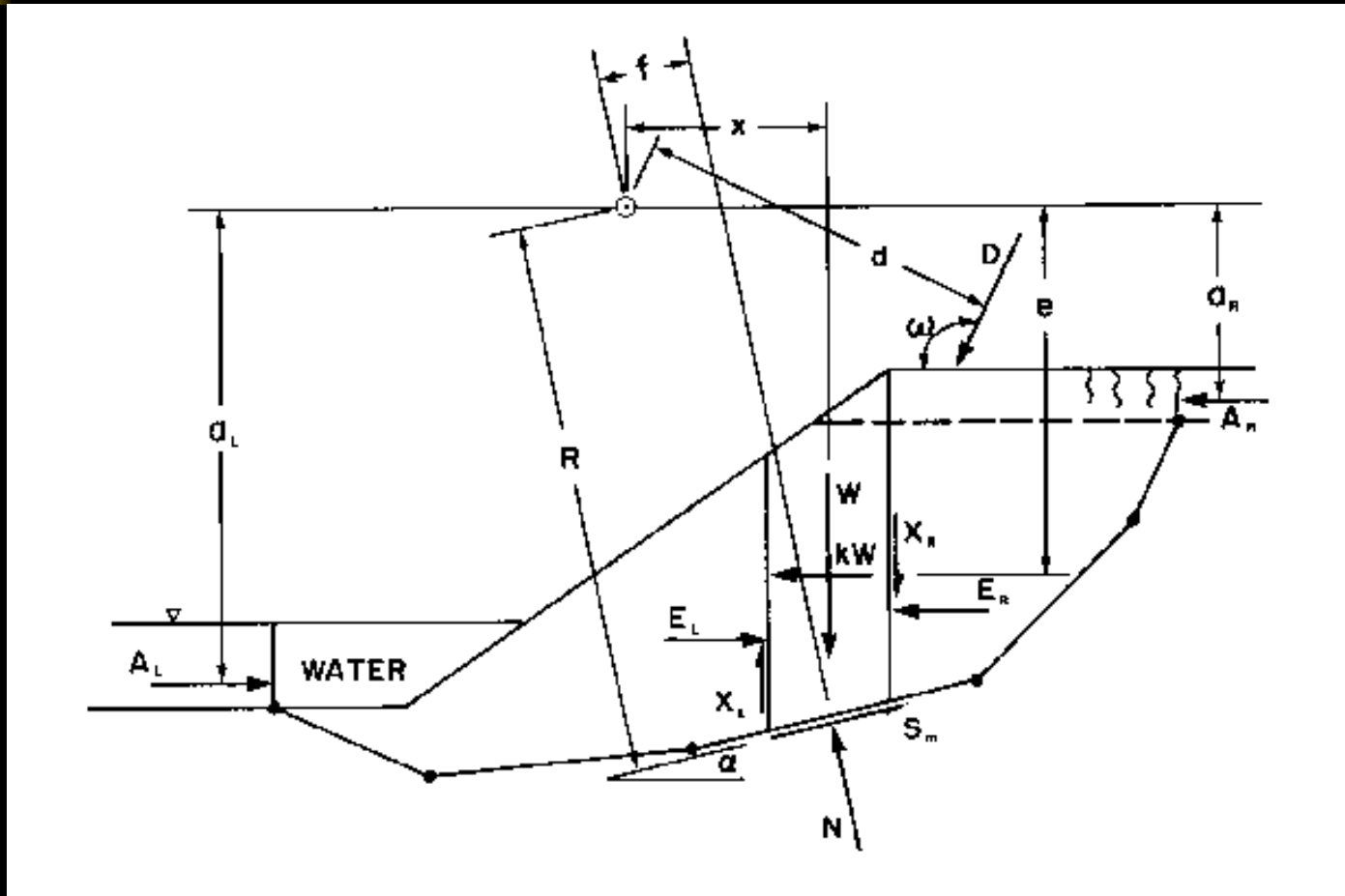
# Forças em uma lamela: superfície circular



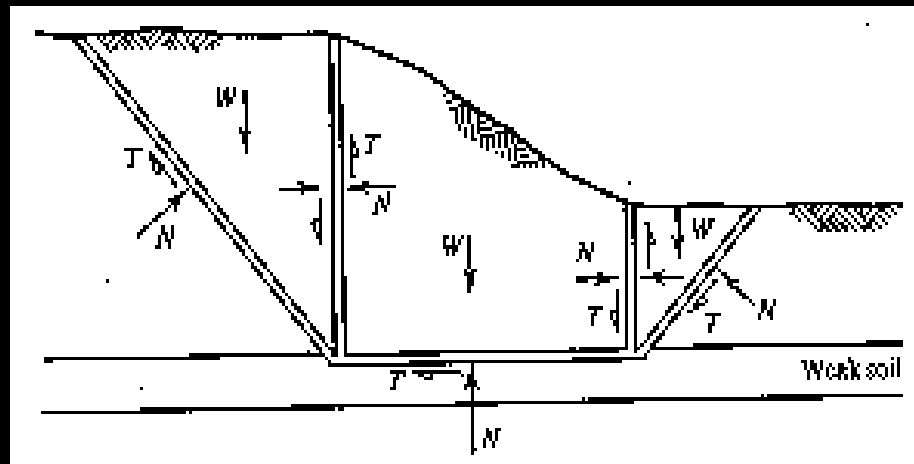
# Forças em uma lamela: superfície qualquer



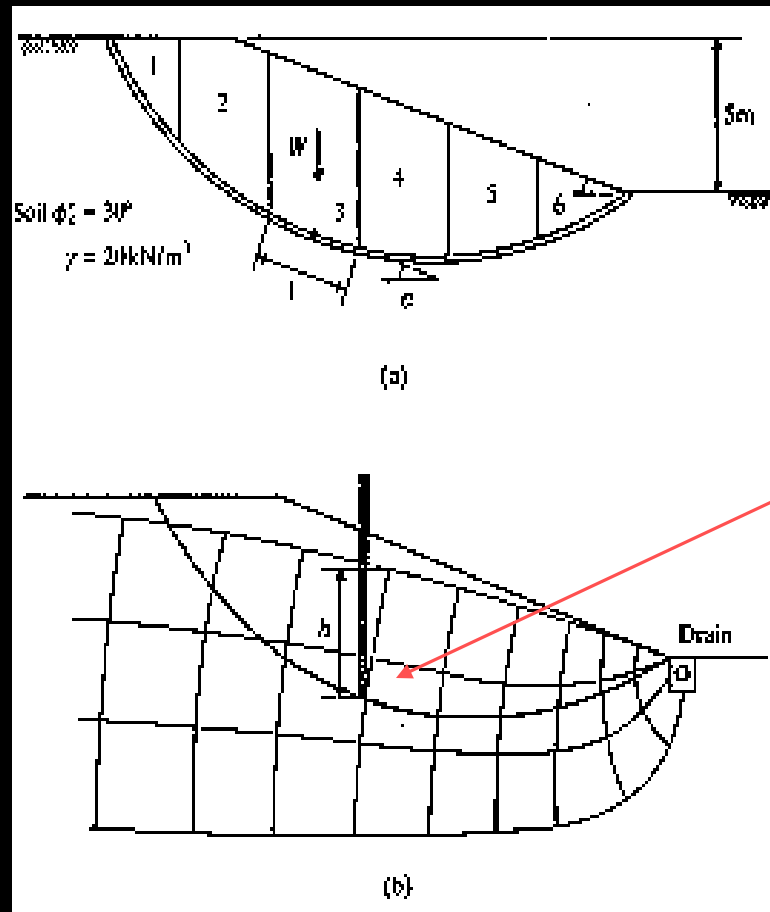
# Forças em uma lamela: superfície poligonal



# Processo das cunhas: cunhas = caso particular de lamelas

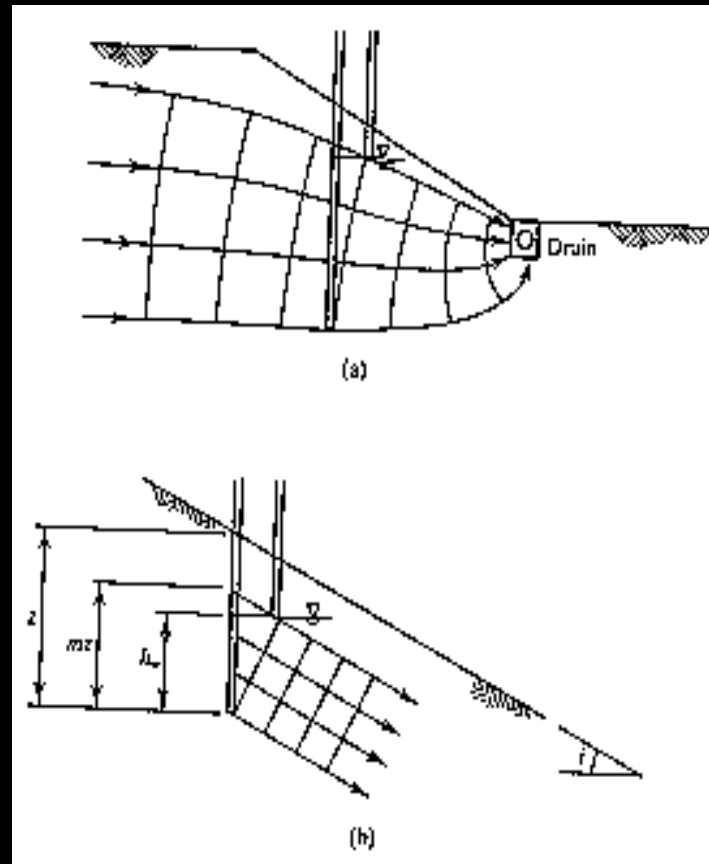


# Pressões neutras no processo das lamelas



Não esquecer das pressões neutras na superfície de escorregamento!

# Determinação (usual) das pressões neutras de percolação

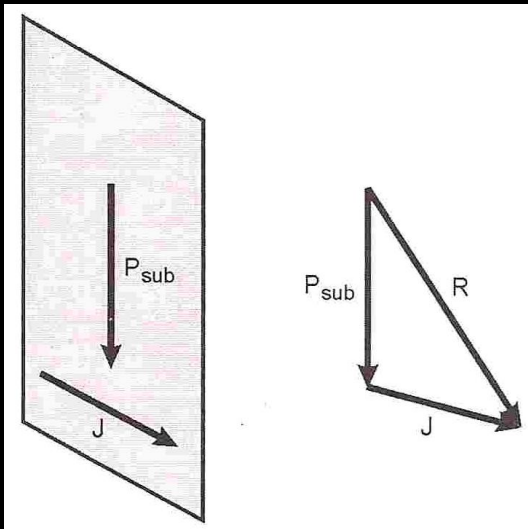


# Consideração da pressão neutra

Duas formulações estaticamente **equivalentes**

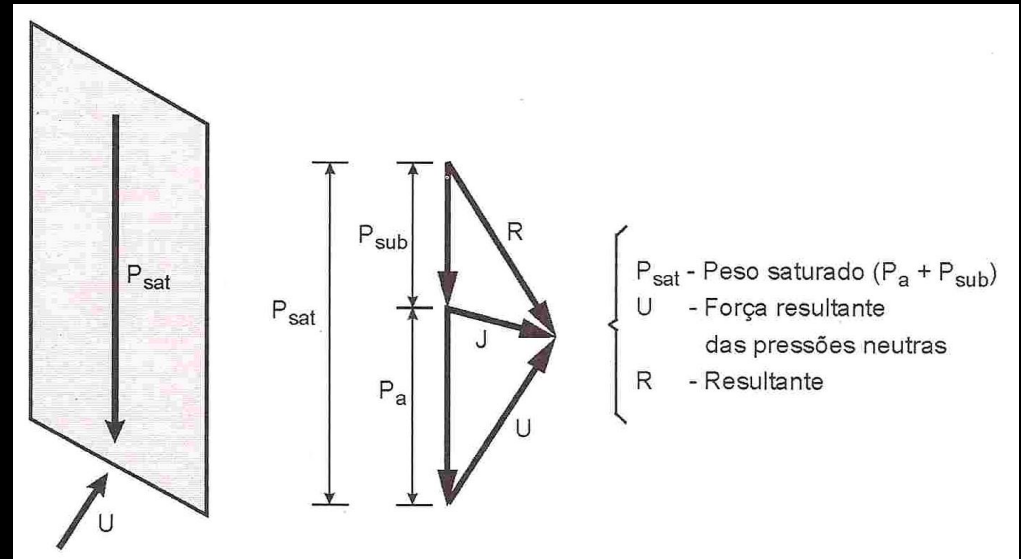
menos usual

**Peso Submerso +  
Força de Percolação**



mais usual

**Peso Total + Força Resultante das  
Pressões Neutras em todas as faces**





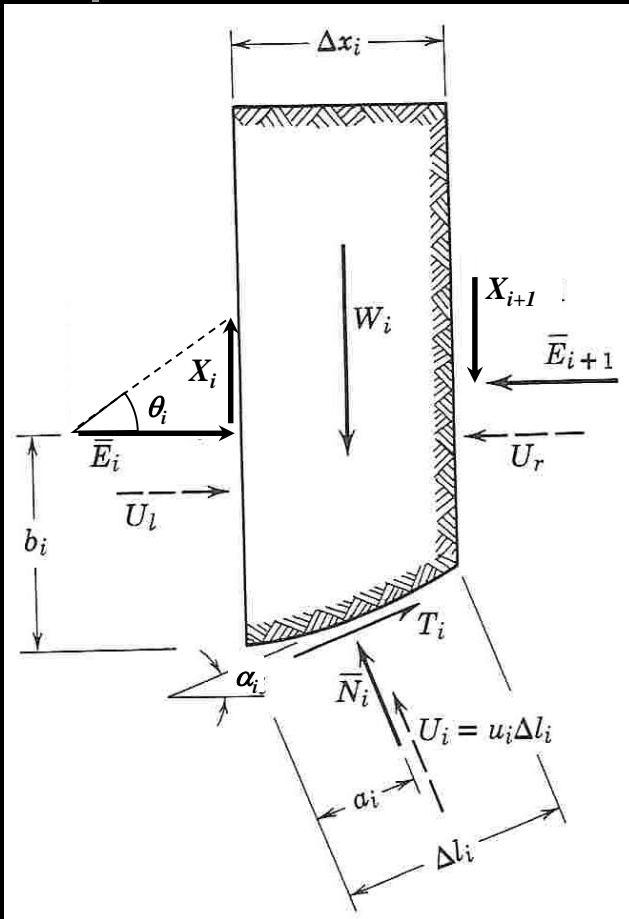
# Processo de Fellenius (hipótese e consequência)

Hipótese simplificadora adicional:

$(\vec{E}_i + \vec{X}_i + \vec{E}_{i+1} + \vec{X}_{i+1}) = \vec{B}_i$  é paralela à base da lamela (não tem componente radial)

Consequência conveniente:

Equilíbrio de forças na direção normal à base da lamela  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow N$  independente das forças inter-lamelares (e de  $T$ !)



# Processo de Fellenius (outras consequências)

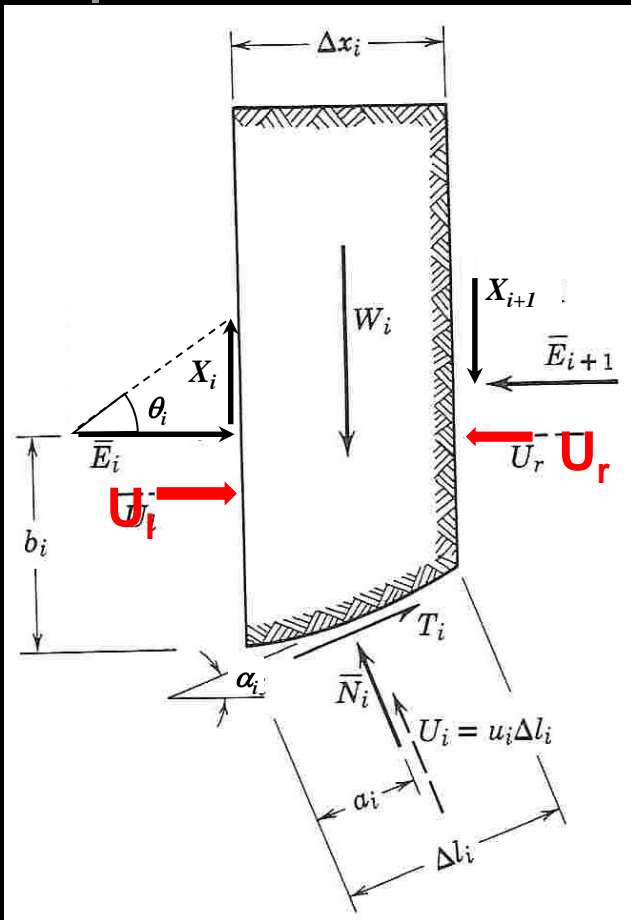
Hipótese inclui  $U$  nas interfaces!

$(\vec{E}_i + \vec{X}_i + \vec{E}_{i+1} + \vec{X}_{i+1}) = \vec{B}_i$  é paralela à base da lamela (não tem componente radial)

Consequência indesejável:

Componentes radiais das pressões neutras horizontais também são ignoradas!

Quanto maiores, maior o erro no F: de maneira geral 5% a 15% a favor da segurança.



# Processo de Fellenius (equações resultantes)

Equilíbrio na direção radial:

$$\bar{N}_i + U_i = W_i \cos \alpha_i$$

$$\Delta l_i = \frac{\Delta x_i}{\cos \alpha_i}$$

$$\bar{N}_i = W_i \cos \alpha_i - u_i \Delta l_i$$

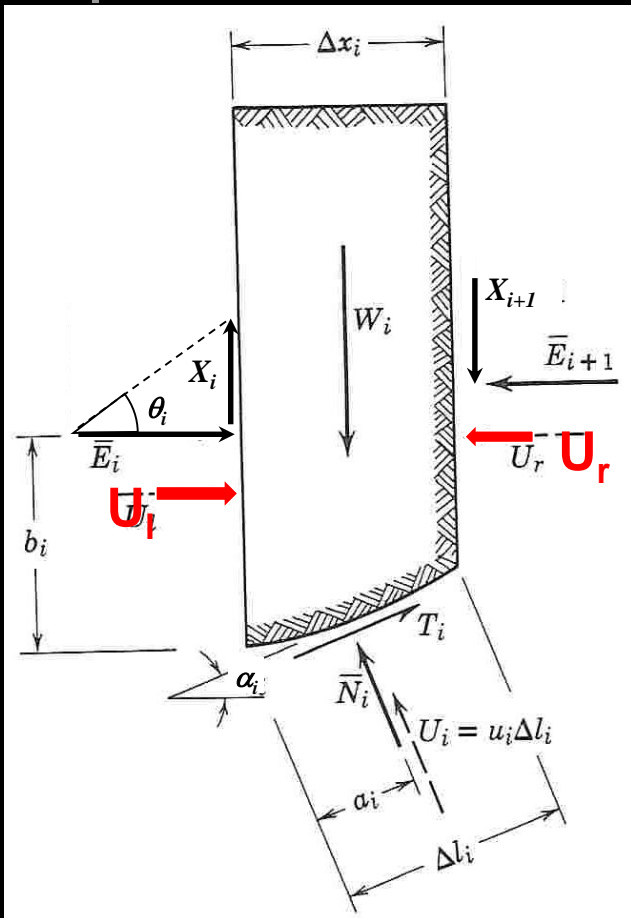
Lembrando que (slide 72):

$$F = \frac{\sum S_i}{\sum W_i \sin \alpha_i}$$

e

$$S_i = \bar{c}_i \Delta l_i + \bar{N}_i \tan \bar{\varphi}_i$$

$$F = \frac{\sum [\bar{c}_i \Delta l_i + (W_i \cos \alpha_i - u_i \Delta l_i) \tan \bar{\varphi}_i]}{\sum W_i \sin \alpha_i}$$





# Processo de Bishop

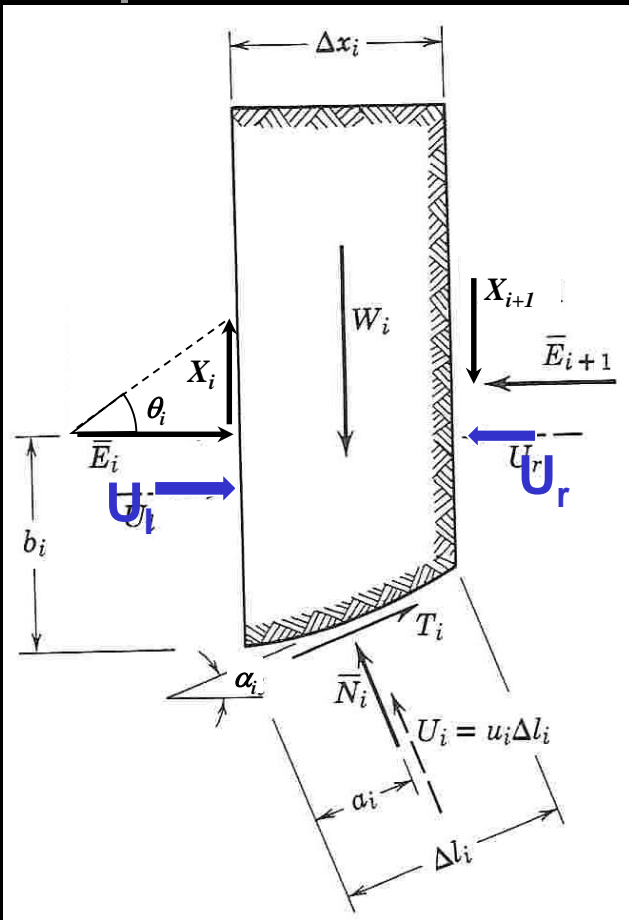
(outras consequências)

Hipótese simplificadora adicional:

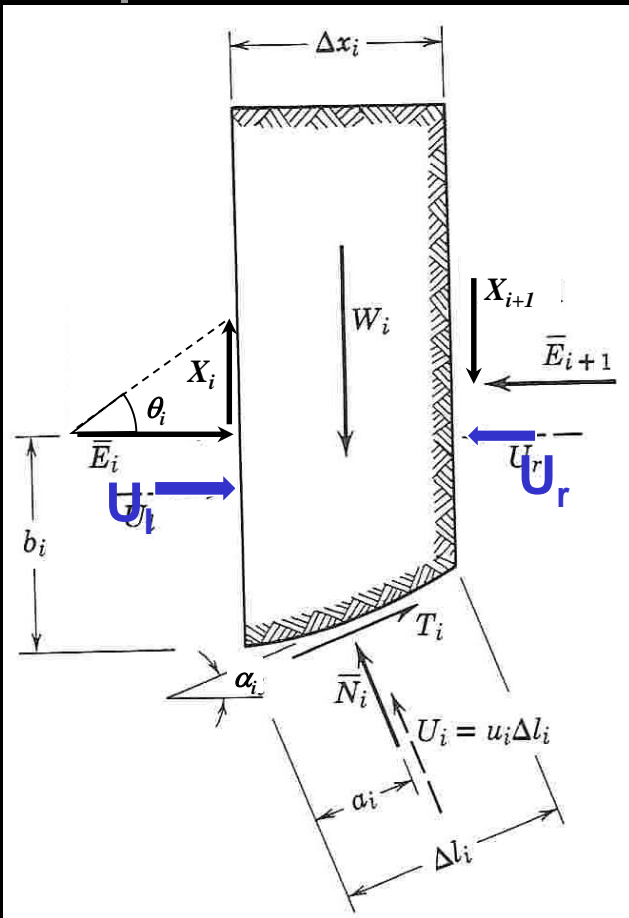
$(\vec{E}_i + \vec{X}_i + \vec{E}_{i+1} + \vec{X}_{i+1}) = \vec{B}_i$  é horizontal (não tem componente vertical)

Comentário:

Pressões neutras nas interfaces são mesmo horizontais, tal como admitido na hipótese simplificadora



# Processo de Bishop simplificado (equilíbrio na vertical)



Equilíbrio na direção vertical:

$$(\bar{N}_i + U_i) \cos \alpha_i + T_i \sin \alpha_i = W_i$$

$$\bar{N}_i = \frac{W_i}{\cos \alpha_i} - \frac{S_i \sin \alpha_i}{F \cos \alpha_i} - U_i$$

Lembrando que:

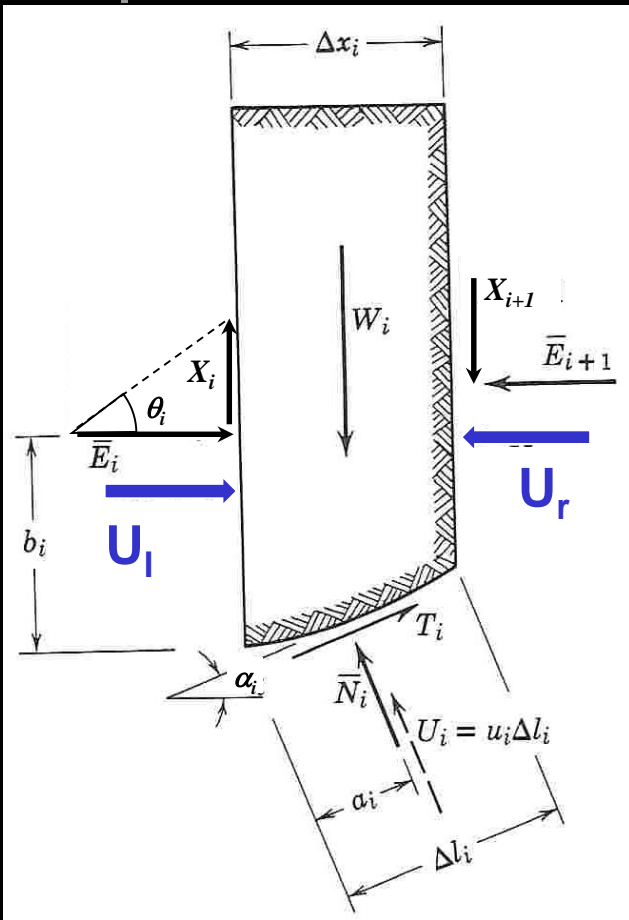
$$S_i = \bar{c}_i \Delta l_i + \bar{N}_i \tan \bar{\varphi}_i$$

$$S_i = \bar{c}_i \Delta l_i + \left( \frac{W_i}{\cos \alpha_i} - \frac{S_i \sin \alpha_i}{F \cos \alpha_i} - U_i \right) \tan \bar{\varphi}_i$$

$$S_i \left( 1 + \frac{1}{F} \frac{\sin \alpha_i}{\cos \alpha_i} \tan \bar{\varphi}_i \right) = \bar{c}_i \Delta l_i + \left( \frac{W_i}{\cos \alpha_i} - U_i \right) \tan \bar{\varphi}_i$$



# Comparação Fellenius x Bishop



$$F = \frac{\sum (\bar{c}_i \Delta l_i + \bar{N}_i \tan \bar{\varphi}_i)}{\sum W_i \sin \alpha_i}$$

**Geral**

$$F = \frac{\sum [\bar{c}_i \Delta x_i + (W_i \cos^2 \alpha_i - u_i \Delta x_i) \tan \bar{\varphi}_i] / \cos \alpha_i}{\sum W_i \sin \alpha_i}$$

**Fellenius**

$$F = \frac{\sum [\bar{c}_i \Delta x_i + (W_i - u_i \Delta x_i) \tan \bar{\varphi}_i] / m_{\alpha_i}}{\sum W_i \sin \alpha_i}$$

**Bishop**

$$m_{\alpha_i} = \left( \cos \alpha_i + \frac{\sin \alpha_i \tan \bar{\varphi}_i}{F} \right)$$





# Parâmetros de Resistência

---

**Qual a resistência do solo a ser adotada?**

**Qual o ensaio mais adequado para estimar essa resistência?**

**Ensaio triaxiais?**

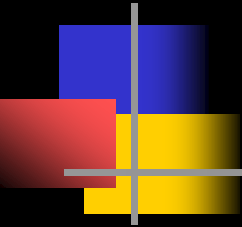
**CD, CU, UU?**

# Escolha do modelo de resistência

- F**  
**A**  
**S**  
**E**  
**D**  
**E**  
**P**  
**R**  
**E**  
**P**  
**A**  
**R**  
**O**
- Como são as tensões efetivas no terreno antes das novas solicitações (da obra)?
    - Iguais à tensão de pré-adensamento
      - Solo normalmente adensado ( $OCR=1$ )
      - Envoltórias (Mohr-Coulomb) de ensaios CD e CU passam pela origem ( $c'=0$ ;  $c=0$ )
      - Envoltória (Tresca) de ensaios UU ( $s=s_u$ ;  $\phi_u=0$ )
    - Inferiores à tensão de pré-adensamento (ou pré-compressão)
      - Solo sobre-adensado ( $OCR>1$ )
      - Nenhuma envoltória linear passa pela origem ( $c'\neq 0$ ;  $c\neq 0$ ;  $s_u\neq 0$ )
      - Atenção: compactação tem o efeito de conferir ao solo uma certa tensão de pré-adensamento

- F**  
**A**  
**S**  
**E**  
**D**  
**E**  
**R**  
**U**  
**P**  
**T**  
**U**  
**R**  
**A**
- Como será a variação de tensões provocada pela obra? Velocidade da solicitação vs. velocidade de drenagem (critério de velocidade:  $c_v$ )
    - Lenta  $\approx$  drenagem plena
      - $OCR=1$ 
        - Envoltória de tensões efetivas (só  $\phi'$ ,  $c'=0$ )
      - $OCR>1$ 
        - Envoltória de tensões efetivas ( $c'$  e  $\phi'$ )
    - Rápida  $\approx$  drenagem restrita
      - Solo saturado: admite-se drenagem nula, a favor da segurança
        - $OCR=1$ 
          - Resistência não drenada associada à tensão de pré-adensamento ( $s_u/\sigma'_a=c^{te}$ ); ou
          - Previsão de sobrepressões neutras + envoltória de tensões efetivas (só  $\phi'$ ,  $c'=0$ )
        - $OCR>1$ 
          - Resistência não drenada associada à tensão de pré-adensamento ( $s_u/\sigma'_a=f(OCR)$ ); ou
          - Previsão de sobrepressões neutras + envoltória de tensões efetivas ( $c'$  e  $\phi'$ )
      - Solo não saturado: drenagem nula ou parcial
        - Envoltória de tensões totais ( $c$  e  $\phi$ , retilínea como aproximação de envoltória curva); ou
        - Envoltória de tensões totais com  $c$  (e  $\phi$ ) variáveis em função da sucção ( $u_a-u_w$ )

# Ensaaios triaxiais: nomenclatura



FASE	PREPARO ou ADENSAMENTO		RUPTURA ou CISLHAMENTO		ENSAIO			
	S	(Consolidated)	S	(Drained)	CD	(SS)	Adensado, drenado	Lento (S)
S	(Consolidated)	N	(Undrained)	CU	(SN)	Adensado, não drenado	Adensado-rápido (R)	
N	(Unconsolidated)	N	(Undrained)	UU	(NN)	Não adensado, não drenado	Rápido (Q)	

S = com drenagem

N = sem drenagem

# Ensaio triaxiais: nomenclatura

FASE	DRENAGEM		
	PREPARO OU ADENSAMENTO	S ( <i>Consolidated</i> )	S ( <i>Consolidated</i> )
RUPTURA OU CISALHAMENTO	S ( <i>Drained</i> )	N ( <i>Undrained</i> )	N ( <i>Undrained</i> )
<b>ENSAIO</b>	<b>CD</b> (SS) Adensado, drenado  Lento (S)	<b>CU</b> (SN) Adensado, não drenado Adensado-rápido (R)	<b>UU</b> (NN) Não adensado, não drenado Rápido (Q)