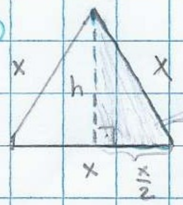
mat 1513 - Laboratório de matemática 1º semestre 2020
Licenciatura noturno (profa. Daniela)
Resolução segunda lista (exercícios 1,2,3 e 4)

1 a)



ÁREA

$$x^2 = h^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2 \to h^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4} \to h = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Area}_\Delta = \frac{b.h}{2} = \frac{x.h}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

Seja $a: \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ a função que representa área do triângulo em função de seu lado x

$$a(x) = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$$

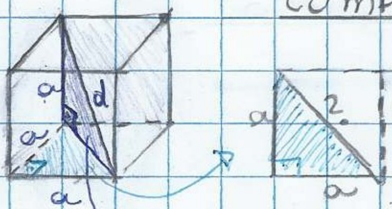
PERÍMETRO

Seja $p: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ a função que representa o perímetro do triângulo em função de seu lado x

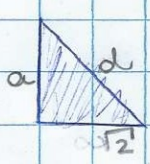
$$p(x) = 3x$$

b)

COMPRIMENTO DA ARESTA



$$?^2 = a^2 + a^2$$
$$? = a\sqrt{2}$$



$$d^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2 \to d^2 = a^2 + 2a^2 \to a^2 = \frac{d^2}{3}$$
$$\to a = \frac{d}{\sqrt{3}} = \frac{d\sqrt{3}}{3}$$

Seja $c: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ a função que representa o comprimento da aresta do cubo em função de sua diagonal interna d. $c(d) = \frac{d\sqrt{3}}{3}$

ÁREA DA SUPERFÍCIE (soma da área das 6 faces do cubo)

$$6a^2 = 6.\left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{6.d^2.3}{3.3} = 2d^2$$

Seja $s: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ a função que representa a área da superfície do cubo em função de sua diagonal interna d.

$$s(d) = 2d^2$$

Volume

Volume de qualquer prisma é área da base x altura, como o cubo possui todas as arestas com a mesma medida o volume do cubo é $a^3 = \left(\frac{d\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{d^3\sqrt{3}.\sqrt{3}^2}{3^3} = \frac{3d^3\sqrt{3}}{9.3} = \frac{d^3\sqrt{3}}{9}$

Seja $v: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ a função que representa o volume do cubo em função de sua diagonal interna d.

$$v(d) = \frac{d^3\sqrt{3}}{9}$$

$\boxed{2}$ a) $f(x) = 3x + 2$ $\quad$ $g(x) = \frac{x}{2} - 3$

I. $D_f = \mathbb{R}$ $\quad$ $D_g = \mathbb{R}$

$Im_f = \mathbb{R}$ $\quad$ $Im_g = \mathbb{R}$

II. $Im_f \subset D_{mg}$, $g \circ f$ está bem definida.

$Im_g \subset D_{mf}$, $f \circ g$ está bem definida

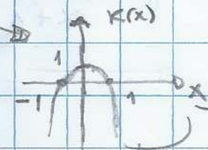
$$g \circ f = \frac{3x+2}{2} - 3 = \frac{3x+2-6}{2} = \frac{3x}{2} - 2 \qquad g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f \circ g = 3\left(\frac{x}{2} - 3\right) + 2 = \frac{3x}{2} - 9 + 2 = \frac{3x}{2} - 7 \qquad f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

b) $f(x) = x^2$ $\quad$ $g(x) = \sqrt{1-x^2}$ → Condição de existência

$\underbrace{1-x^2}_{K(x)} \geq 0$ → $K(x) \geq 0$

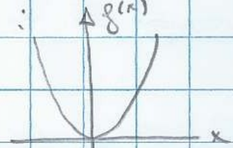
→ $-1 \leq x \leq 1$



i $Dm f = \mathbb{R}$, $]-\infty, \infty[$

$Im f = \mathbb{R}_+ = \{y \in \mathbb{R} / y \geq 0\}$, $[0, \infty[$

a imagem são só os reais positivos pois o gráfico de f é :



$Dm g = \{x \in \mathbb{R} / -1 \leq x \leq 1\}$, ou $[-1, 1]$

$Im g = \{y \in \mathbb{R} / 0 \leq y \leq 1\}$. ou $[0, 1]$

ii. $Im g \subset Dm f$; $f \circ g$ está bem definida

$Im f \not\subset Dm g$, $g \circ f$ não está bem definida

$f \circ g : [-1, 1] \to \mathbb{R}_+$, $f \circ g = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 = 1 - x^2$

c) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ $\quad$ $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ → Condição de existência

$x - 1 \neq 0 \to x \neq 1$

condição de existência

$x + 1 \neq 0 \to x \neq -1$

possibilidades de escrever.

i $Dm f = \mathbb{R} - \{-1\}$ ou $\{x \in \mathbb{R} / x \neq -1\}$ ou $]-\infty, -1[\cup]-1, \infty[$

$Im f = \mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} - \{0\}$ ou $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$ ou $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$

$Dm g = \mathbb{R} - \{1\}$ ou $\{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\}$ ou $]-\infty, 1[\cup]1, \infty[$

$Im g = \mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} - \{0\}$ ou $\{x \in \mathbb{R} | x \neq 0\}$ ou $]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$

ii. $Im g \not\subset Dm f$, $f \circ g$ não está bem definida

$Im f \not\subset Dm g$, $g \circ f$ não está bem definida.

③ a) $f(x) = 1 - x \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i. $Dm f = \mathbb{R}$

$Im f = \mathbb{R}$, consequentemente seu contradomínio também tem que ser $\mathbb{R}$.

ii. f é injetora, pois $f(x_1) = f(x_2) \to 1 - x_1 = 1 - x_2 \to x_1 = x_2$

f é sobrejetora, pois sua imagem é igual seu contradomínio.

iii. a inversa é possível pois f(x) é bijetora.

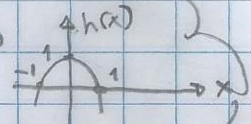
$f(x) = 1 - x \to x = 1 - f^{-1}(x) \to f^{-1}(x) = 1 - x$

b) $\sqrt{1 - x^2} = f(x) \to$

condição de existência

$\underbrace{1 - x^2}_{h(x)} \geq 0 \to h(x) \geq 0$

$\to -1 \leq x \leq 1$



i. $Dm f = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\}$

ou $[-1, 1]$

$Im f = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$

ou $[0, 1]$

ii. f não é injetora, pois $f(x_1) = f(x_2) \to \sqrt{1 - x_1^2} = \sqrt{1 - x_2^2}$

$\to 1 - x_1^2 = 1 - x_2^2 \to x_1^2 = x_2^2 \to x_1 = x_2$ ou $x_1 = -x_2$

Caso consideremos

① $f: [-1, 1] \to \mathbb{R}$, f não será sobrejetora, pois $im f \neq$ Contradomínio

② $f: [-1, 1] \to [0, 1]$, f será sobrejetora.

iii. como f(x) não é injetora (independente de ser ou não sobrejetora) ela não é bijetora e portanto não possui inversa

6) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3} \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i. $Dm f = \mathbb{R}$

$Im f = \mathbb{R}$, consequentemente seu contradomínio também será $\mathbb{R}$

ii. f é injetora, pois $f(x_1) = f(x_2) \to \sqrt[3]{1 - x_1^3} = \sqrt[3]{1 - x_2^3} \to 1 - x_1^3 = 1 - x_2^3 \to x_1 = x_2$

f é sobrejetora, pois sua imagem é igual o contradomínio iii $f(x)$ possui inversa, pois é bijetora

$f(x) = \sqrt[3]{1-x^3} \Rightarrow x = \sqrt[3]{1 - f^{-1}(x)^3} \Rightarrow x^3 = 1 - f^{-1}(x)^3 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

4) sendo $f(x) = x^2+1$; $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

a) $(f \cdot g)(x) = x^4 - 1 \Rightarrow (x^2+1)\,g(x) = x^4 - 1 \Rightarrow g(x) = \dfrac{(x^2-1)\cancel{(x^2+1)}}{\cancel{x^2+1}}$

$\Rightarrow g(x) = x^2 - 1$, sendo $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

b) $(f+g)(x) = 3x^2 \Rightarrow x^2+1+g(x) = 3x^2 \Rightarrow g(x) = 3x^2 - x^2 - 1$

$\Rightarrow g(x) = 2x^2 - 1$, sendo $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = 1 \quad \dfrac{x^2+1}{g(x)} = 1 \Rightarrow g(x) = x^2+1$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

como x^2+1 é sempre positivo, $g(x) \neq 0 \;\; \forall x \in \mathbb{R}$.