MAE221 - Probabilidade I

Prof. Fábio Machado

Lista 4 - fazer até 26/Abril

1. Considere a variável aleatória discreta X, com a seguinte função densidade de probabilidade.

$$p(x) = \frac{c}{3^x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots.$$

   a) Determine o valor de c.

   b) Sendo $A = \{x \in \mathbb{N} : x = 2+1, k \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 3k+1, k \in \mathbb{N}\}$, obtenha as probabilidades que $P(X \in A)$ e $P(X \in B)$.

2. Um experimento consiste no lançamento de três moedas. Seja X a variável aleatória "número total de caras obtidas". Calcule

   a) A função densidade de probabilidade de X e a função de distribuição acumulada e seus gráficos.

   b) Esperança e variância de X.

   c) A probabilidade de obter no máximo duas caras.

   d) A probabilidade de obter pelo menos uma cara.

3. Suponha que dois times joguem uma série de partidas que termina quando um deles tiver ganho i partidas. Suponha também que cada partida jogada seja vencida, independente do resultado das outras partidas jogadas, pelo time A com probabilidade p. Determine a esperança e variância quando

   a) $i = 2$.

   b) $i = 3$.

4. Pedro e Juan dividem ao azar uma barra de chocolate com $4n$ pedaços iguais de maneira que Pedro sempre pegue mais pedaços do que Juan, mas que Juan sempre fique com pelo menos um pedaço.

   a) Obter o número esperado de pedaços que Pedro irá pegar.

   b) Obter a variância do número de pedaços que Pedro irá pegar.

5. Seja X uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} c(1-x^2), & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

   a) Encontre o valor de c.

   b) Encontre a função de distribuição acumulada de X.

6. Considere a função

$$f_X(x) = \begin{cases} C(2x^2 - x^3), & \text{se} \quad 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   Esta função poderia ser uma função densidade de probabilidade? Se sim, encontre o valor de C.

7. Repita o exercício para a função definida por

$$f_X(x) = \begin{cases} C(2x - x^2), & \text{se} \quad 0 < x < \frac{5}{2} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

8. O tempo de vida em horas de um componente eletrônico é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade dada por

$$f(x) = xe^{-x} \text{ para } x \geq 0$$

Calcule o tempo esperado para a vida de tal componente.

9. O tempo (em horas) necessário para arrumar uma máquina tem distribuição exponencial com parâmetro $\lambda = \frac{2}{3}$. Calcule

   a) A probabilidade do conserto demorar mais do que 2 horas.

   b) A probabilidade condicional que o conserto demore mais do que 3 horas dado que já é superior a 2 horas.

   c) Compare a esperança do tempo de vida inicial com a esperança da sobrevida após uma hora de uso.

   d) O tempo de vida dos seres vivos pode ser modelado por uma distribuição exponencial? Argumente baseado no reultado obtido no item anterior.