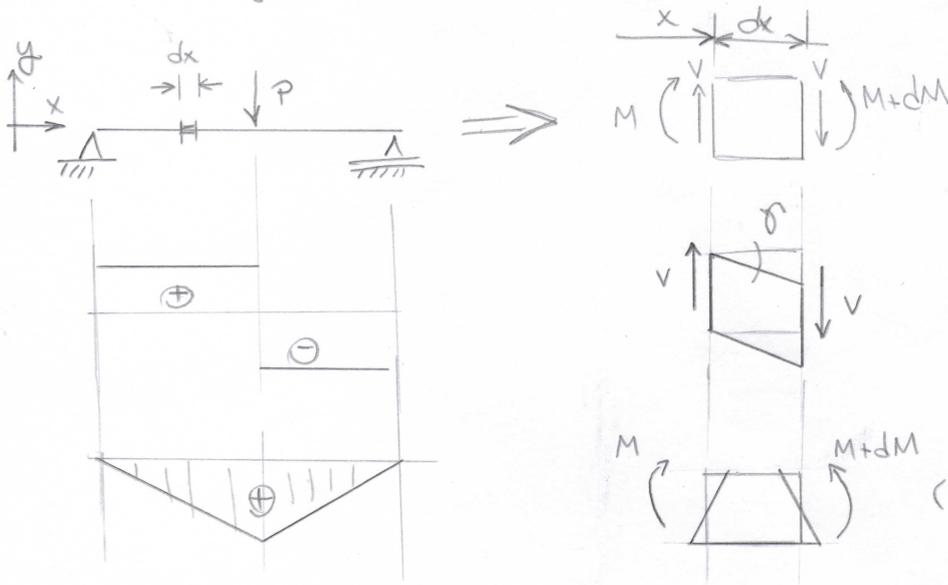


# Torçãõs

⇒ deformaçõs por cisalhamento:



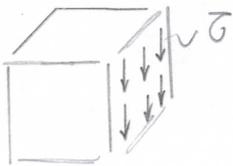
(veremos a diante esse tipo de deformaçãõ)

$\delta$ : distorçãõ [em rad]

$$\text{se } \delta \ll 1 \Rightarrow \delta \approx \text{tg } \delta = \frac{dy}{dx} = \text{cte}$$

## Tensãõ M\u00e9dia de Cisalhamento

$$\tau = \frac{V}{A}$$



Lei de Hooke

$$V = \int_S \tau dA$$

se  $\tau$  cte.:  $V = \tau \cdot A$

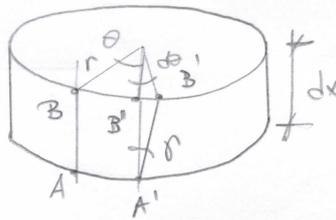
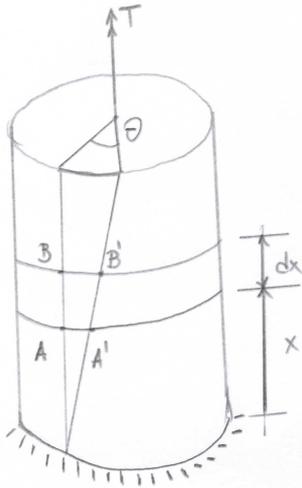
A Lei de Hooke e':  $\tau = G \cdot \gamma$ , an\u00f3logo a  $\sigma = E \cdot \epsilon$

$G$ : módulo de elasticidade transversal.

Para materiais elásticos e isotrópicos:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

### Torção de Eixos



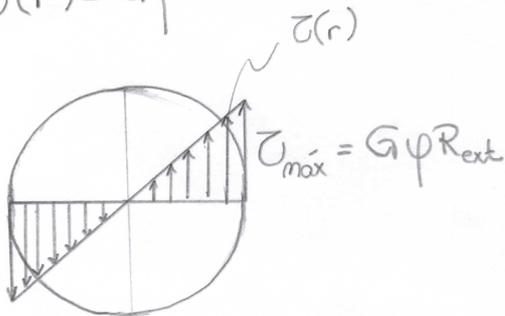
$$\left. \begin{aligned} \widehat{B''B'} &= r d\theta \\ \widehat{B''B} &= \delta dx \end{aligned} \right\} r d\theta = \delta dx$$

$$\delta = \frac{d\theta}{dx} \cdot r = \varphi \cdot r, \quad \frac{d\theta}{dx} = \varphi, \quad \text{quando } \frac{d\theta}{dx} \text{ e } dx.$$

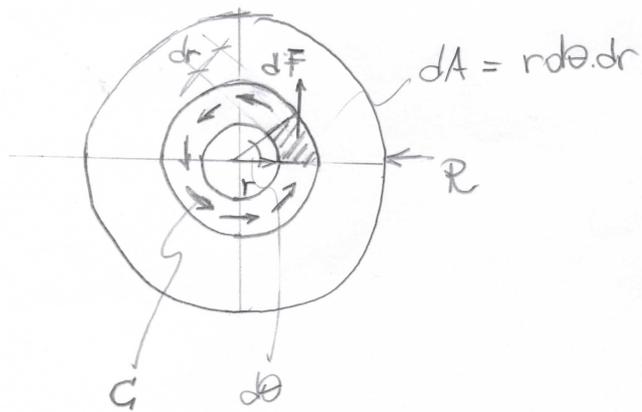
Lei de Hooke:

$$\tau = G \cdot \delta$$

$$\tau(r) = G \varphi r$$



# Distribuição das tensões de cisalhamento



$$dF = \tau dA$$

$$dT = dF \cdot r = \tau dA r = \tau r \cdot (r d\theta dr) = \tau r^2 dr d\theta$$

$$dT(r) = \int_0^{2\pi} dF r = \int_0^{2\pi} \tau r^2 dr d\theta = [\theta]_0^{2\pi} \tau r^2 dr = 2\pi \tau r^2 dr$$

$$T = \int_0^R 2\pi \tau r^2 dr = \int_0^R 2\pi (G\varphi) r^3 dr = 2\pi G\varphi \int_0^R r^3 dr = 2\pi G\varphi \left[ \frac{r^4}{4} \right]_0^R$$

$$T = \frac{G\varphi R^4 \pi}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{2T}{\pi G R^4}$$

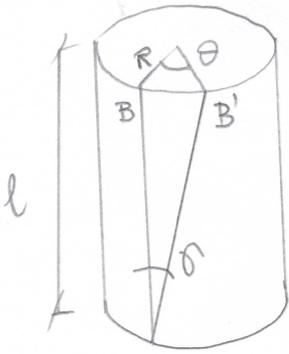
Substituindo na expressão  $\tau(r) = G\varphi r$ :

$$\tau = G \left( \frac{2T}{\pi G R^4} \right) r = \frac{2T}{\pi R^4} r = \frac{T}{J} r$$

$$\text{onde } \left| \frac{J = \pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32} \right|$$

J: momento polar de inércia (de uma seção circular cheia de raio externo R).

$$\delta = \varphi r \quad , \quad \varphi = \frac{T}{GJ} \rightarrow \text{módulo de rigidez à torção.}$$



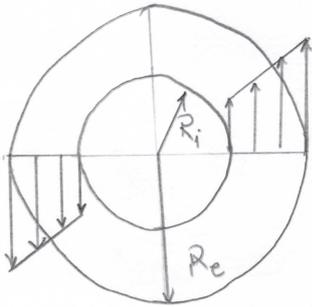
$$\overline{BB'} = R\theta = \delta l$$

$$\delta = \varphi R \quad (\text{no raio máximo})$$

$$\delta = \frac{TR}{GJ}$$

Logo  $R\theta = \frac{TR}{GJ} l \Rightarrow \theta = \frac{Tl}{GJ}$  (Análogo à  $\Delta l = \frac{Nl}{EA}$ )

### Eixo Vazado



$$\tau = \frac{T}{J} r$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{J} R_e$$

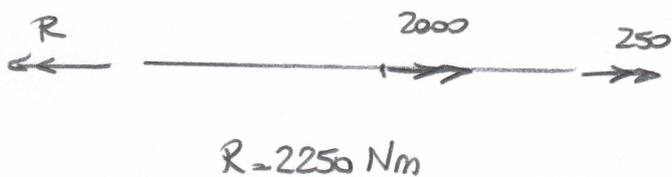
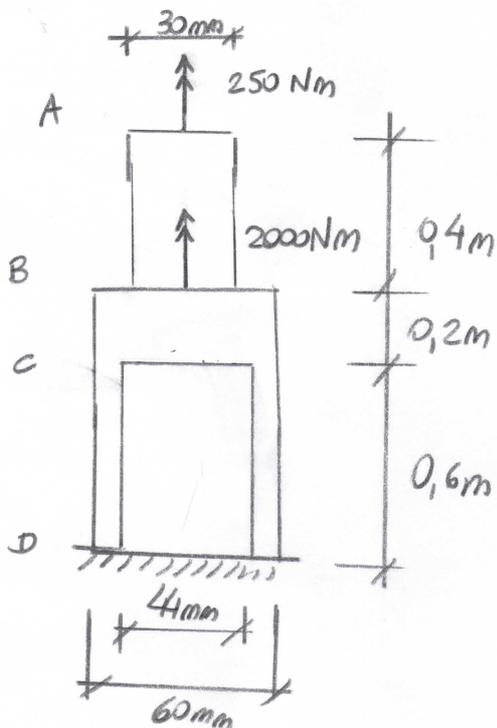
$$\theta = \frac{Tl}{GJ}$$

O que muda é o valor do momento polar de inércia

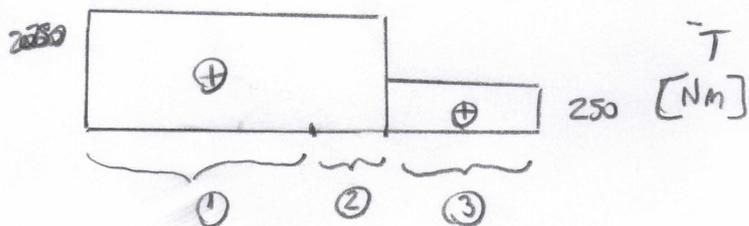
$$J = \frac{\pi(R_e^4 - R_i^4)}{2} = \frac{\pi(D_e^4 - D_i^4)}{32}$$

Verifica-se que o momento é igual à diferença entre os momentos de inércia do eixo com raio  $R_e$  e o eixo com raio  $R_i$ .

O eixo da figura está engastado e sujeito aos momentos dados. Determinar o ângulo de rotação da seção A, sabendo que o módulo de elasticidade transversal de seu material é  $G = 80 \text{ GPa}$ .



Temos 3 trechos:



Dados

	T	l	J	$r_e$	$r_i$	$GJ$
1	2250	0,6	$9,04 \cdot 10^{-7}$	0,03	0,022	72320
2	2250	0,2	$12,72 \cdot 10^{-7}$	0,03	—	101760
3	250	0,4	$0,79 \cdot 10^{-7}$	0,015	—	6320

$$\theta_A = \theta_{AC} + \theta_{CB} + \theta_{BA} = \frac{T_1 l_1}{GJ_1} + \frac{T_2 l_2}{GJ_2} + \frac{T_3 l_3}{GJ_3} = \frac{1}{G} \left( \frac{T_1 l_1}{J_1} + \frac{T_2 l_2}{J_2} + \frac{T_3 l_3}{J_3} \right)$$

$$\theta_A = 0,01866 + 0,00442 + 0,01582 = 0,0389 \text{ rad.}$$