ESCOLA POLITÉCNICA DA USP

PEF-3309 – Mecânica dos Solo Ambiental

Aula 8

Propagação de Tensões, Tensões e deformações e Elasticidade

Por que calcular tensões?

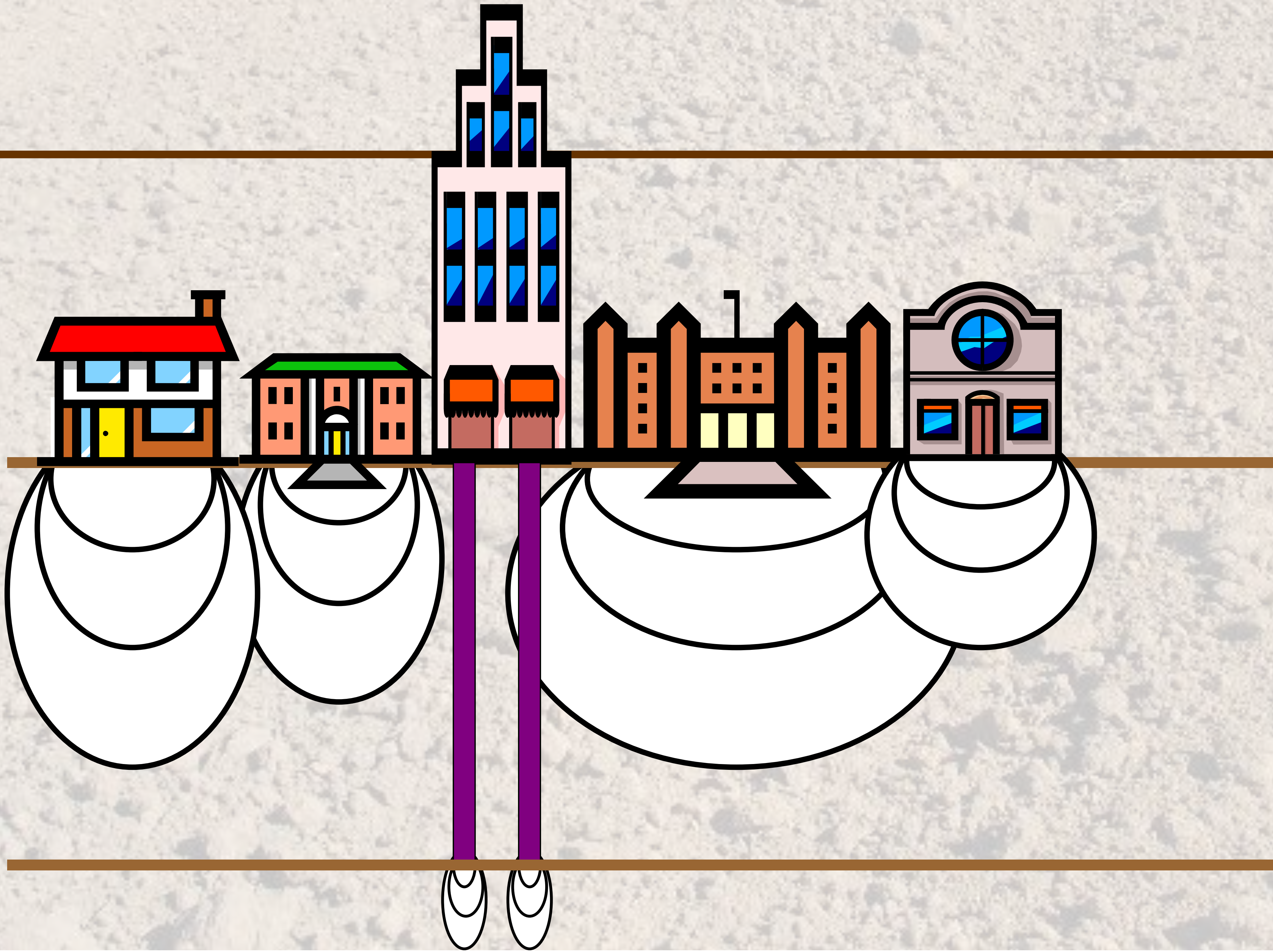
- Para prever deslocamentos (recalques, em particular)
- Ações – tensões – deformações – deslocamentos
- Ações típicas em obras geotécnicas ≈ ≈ carregamentos (ou descarregamentos!)

Carregamentos “infinitos”

vertical ($\Sigma\ \gamma z$)

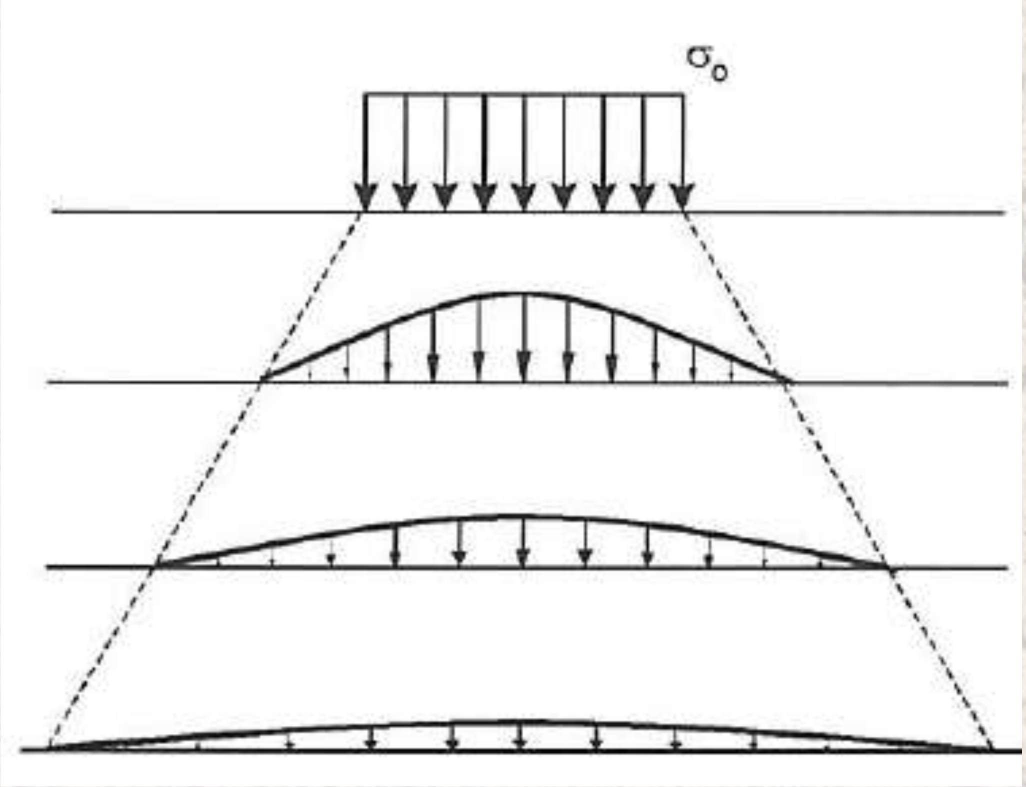
Carregamentos limitados

- Tensões se distribuem no maciço e decrescem à medida que aumenta a distância ao carregamento
- Princípio básico para essa distribuição: EQUILÍBRIO

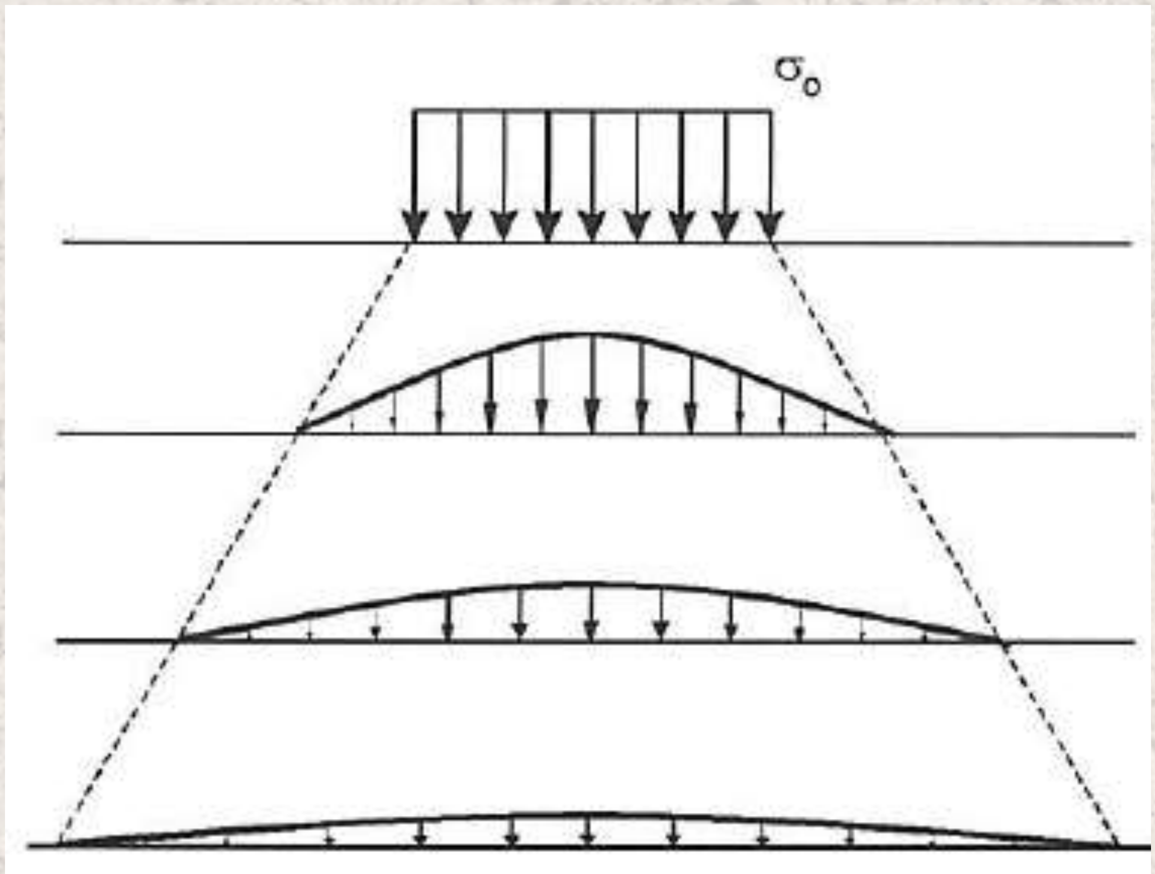


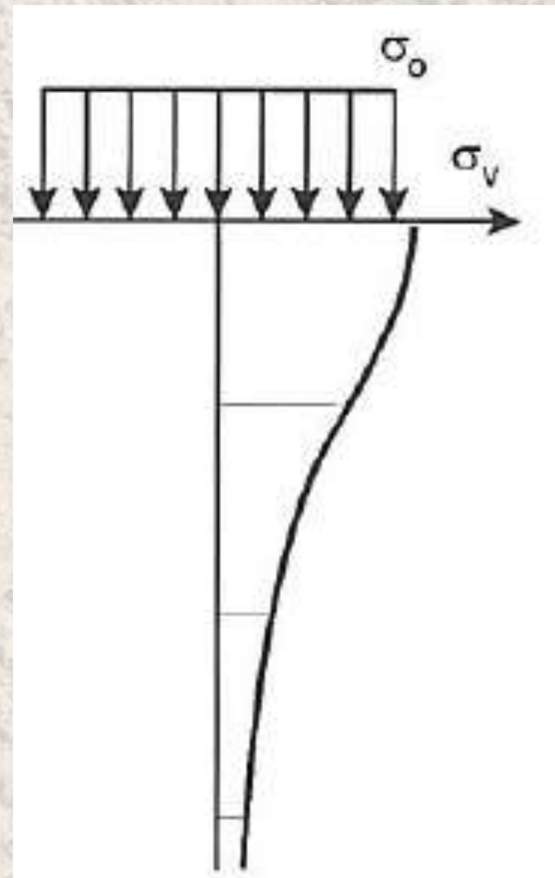
Distribuição de Tensões no Solo

Distribuição de Tensões no Solo



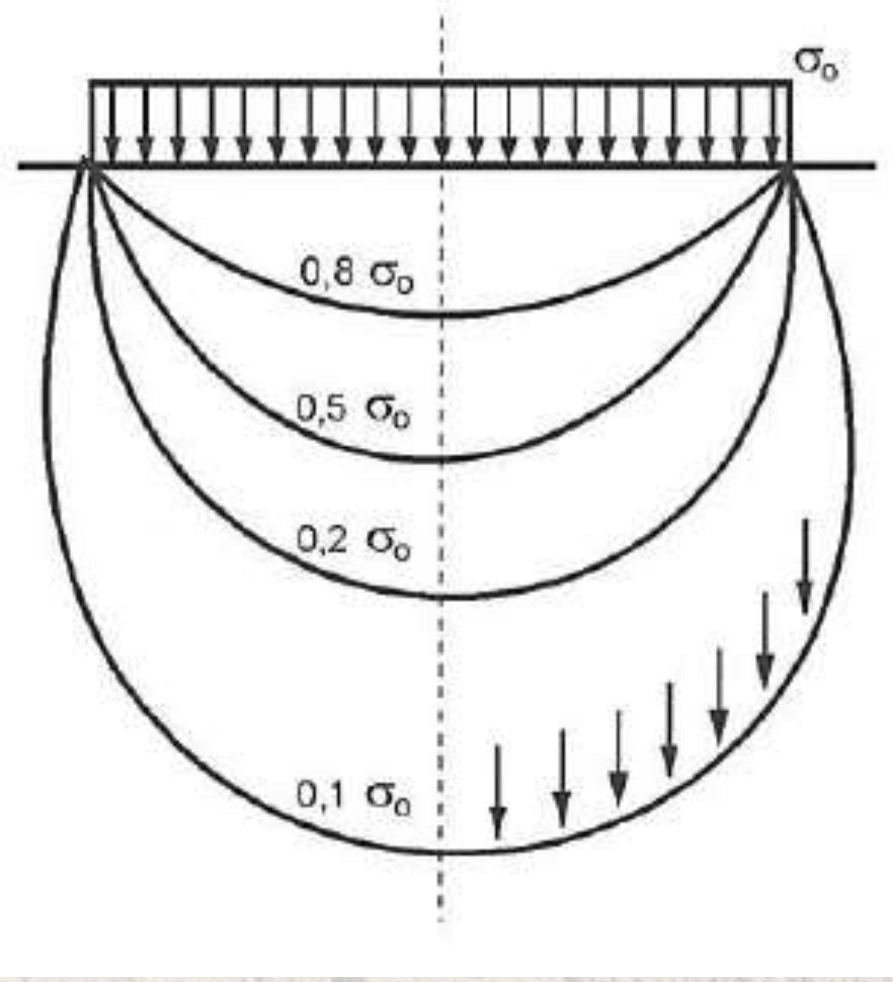
Distribuição de Tensões no Solo





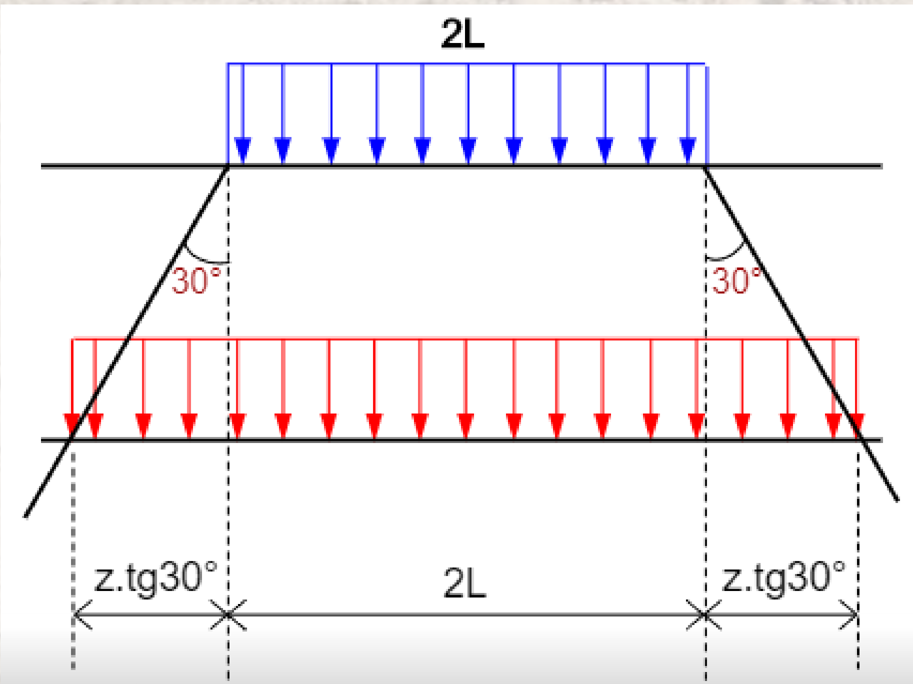
Bulbos

Bulbos



Espraiamento de Tensões

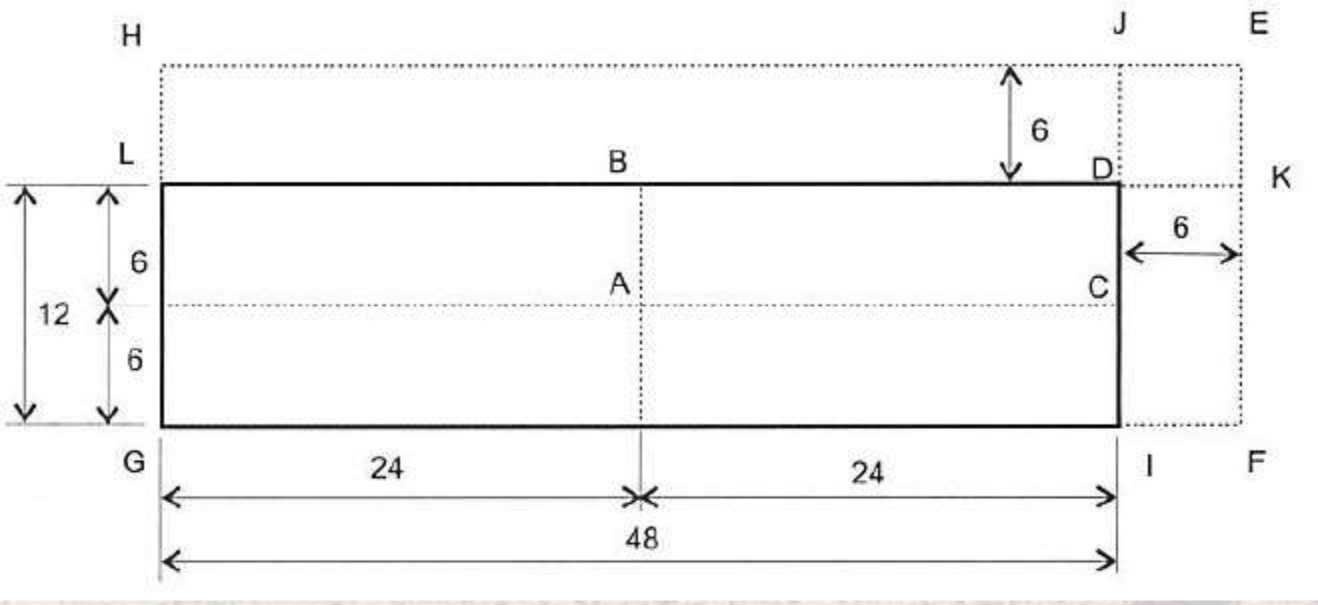
Espraiamento de Tensões



$$\sigma_v = \sigma_0 \cdot \boxed{\frac{2L}{2L + 2z.tg30^{o}}}$$

Espraiamento de Tensões - Exemplo

Uma construção industrial apresenta planta retangular conforme figura abaixo. O seu radier vai aplicar uma tensão de 50 kPa no solo. Estime o acréscimo de tensão na vertical em um ponto a 6m de profundidade.

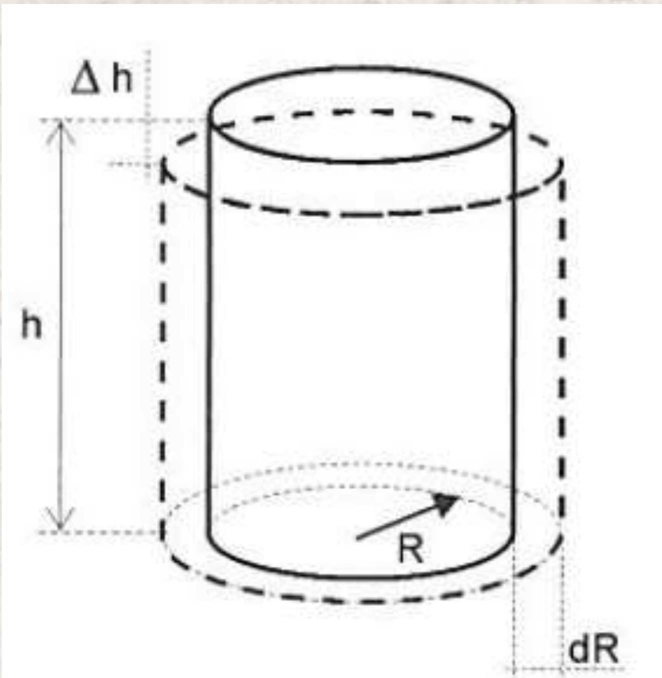


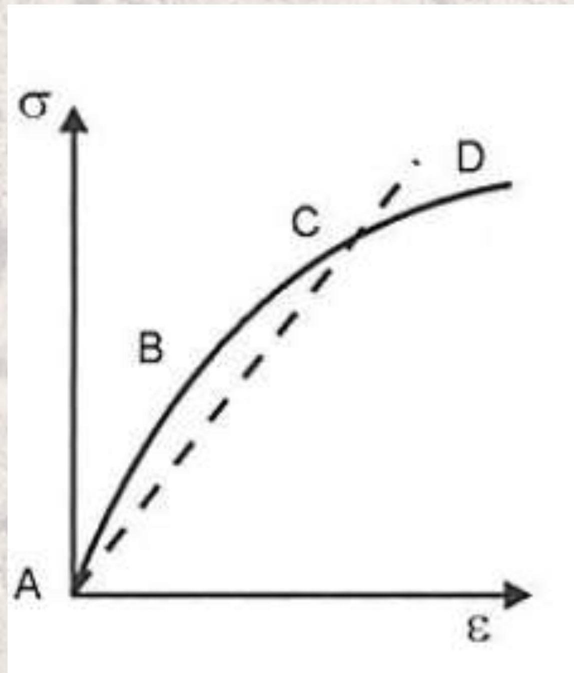
$$\sigma_v = \sigma_0 \cdot \frac{2L}{2L + 2z.tg30^o}$$

I = 2x48/(2x48 + 2x6xtg30°) = 0,93

σ_V = 50x0,93 = 46,6kPa

Teoria da Elasticidade



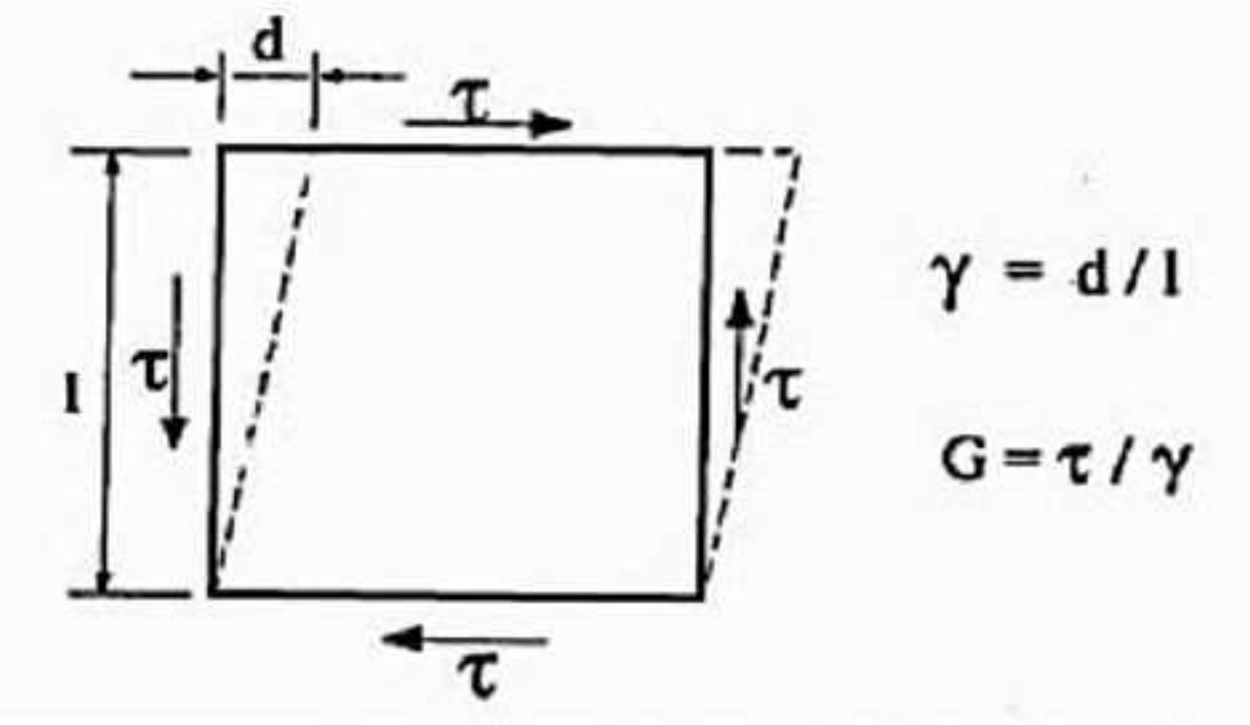


$$\varepsilon_l = \frac{\Delta h}{h} \qquad \varepsilon_r = \frac{\Delta r}{r}$$

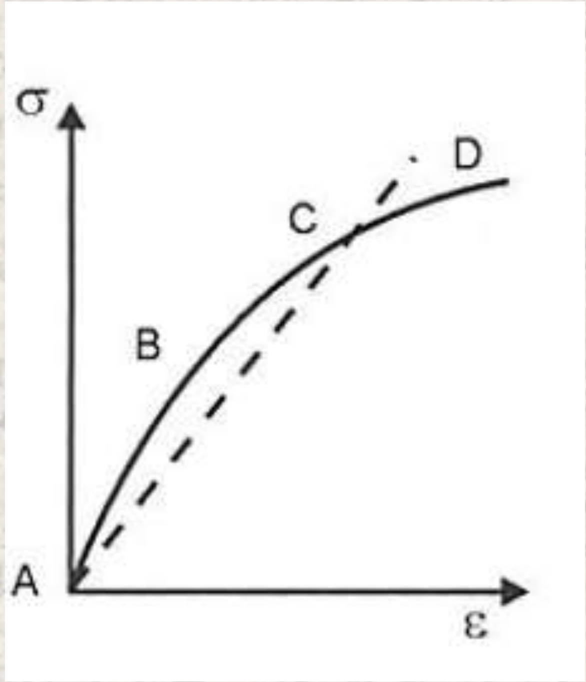
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_l}$$

$$\upsilon = -\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_l}$$

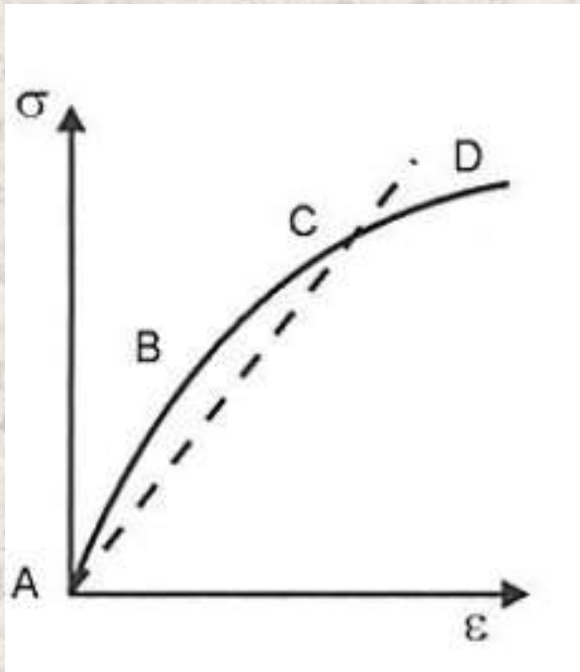
Teoria da Elasticidade

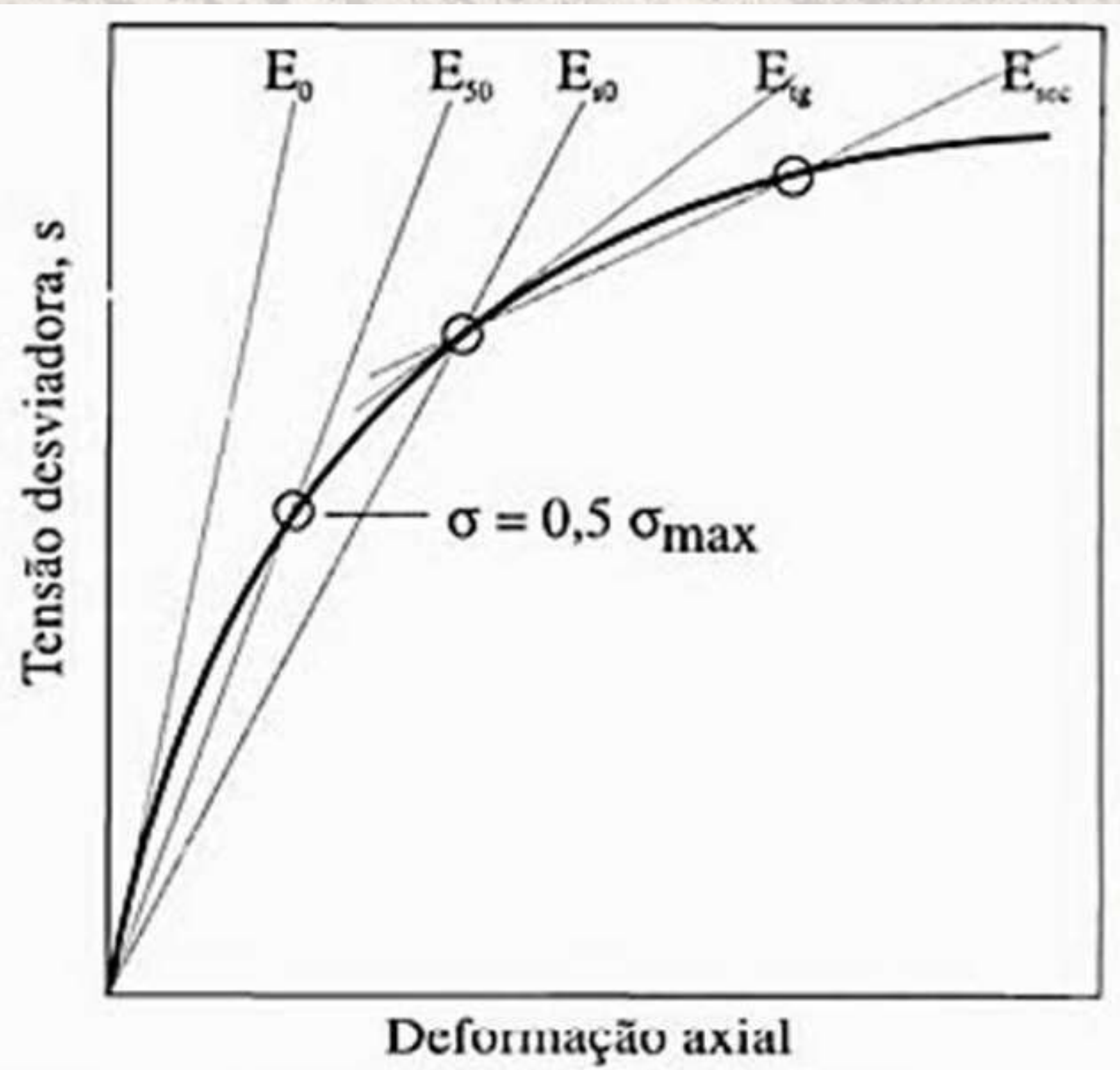


Teoria da Elasticidade – Módulo de Elasticidade (ou de Young)



Teoria da Elasticidade – Módulo de Elasticidade (ou de Young)





Estado de tensão (3D)

- 9 incógnitas (componentes do estado de tensão)
  - apenas 6 incógnitas se levadas em conta as 3 eqs. de equilíbrio de momentos (cisalhamentos iguais: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$)

$$\begin{bmatrix} \sigma_X & \tau_{XY} & \tau_{XZ} \\ \tau_{YX} & \sigma_Y & \tau_{YZ} \\ \tau_{ZX} & \tau_{ZY} & \sigma_Z \end{bmatrix}$$

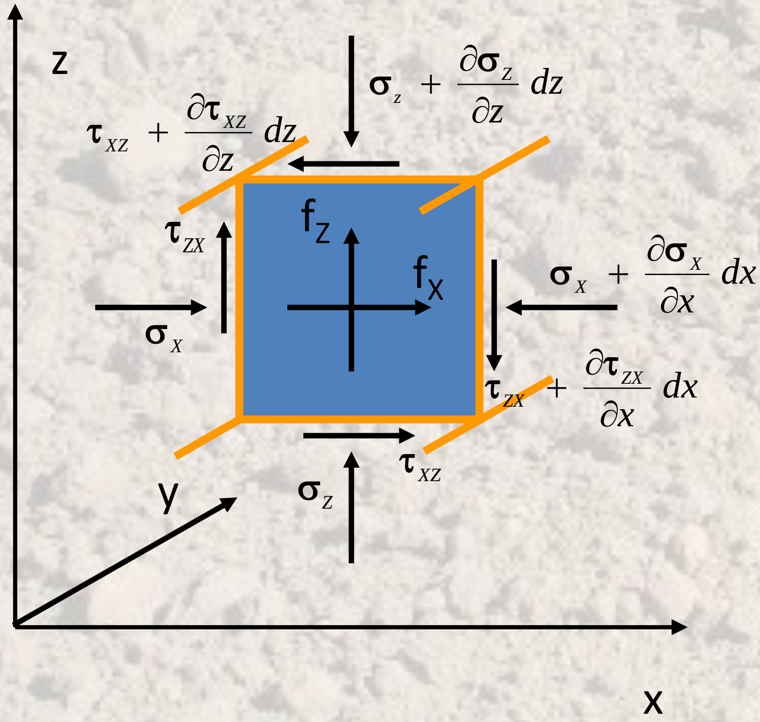
Se for EPT (2D - discutir condições)

- 4 incógnitas (componentes do estado de tensão)
  - apenas 3 incógnitas se levada em conta a eq. de equilíbrio de momentos (cisalhamentos iguais: $\tau_{ij} = \tau_{ji}$)

$$\begin{bmatrix} \sigma_X & \tau_{XZ} \\ \tau_{ZX} & \sigma_Z \end{bmatrix}$$

Equilíbrio

3 equações de equilíbrio de forças em um elemento de solo



$$\frac{\partial \sigma_X}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{XY}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{XZ}}{\partial z} = f_X$$

$$\frac{\partial \tau_{YX}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_Y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{YZ}}{\partial z} = f_Y$$

$$\frac{\partial \tau_{ZX}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{ZY}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_Z}{\partial z} = f_Z$$

Problema hiperestático

- ESTADO DE TENSÃO NO PONTO
- **6 incógnitas** componentes do estado de tensão (já considerando que $\tau_{ij} = \tau_{ji}$)

- EQUILÍBRIO
- **3 equações** de equilíbrio

3 equações, 6 incógnitas

Equações adicionais

Relações tensão-deformação

Definição $\rightarrow$ estado de deformação

Estado de deformação (3D)

- + 9 incógnitas (componentes do estado de deformação)
  - 6 incógnitas se levado em conta que $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_X & \gamma_{XY} & \gamma_{XZ} \\ \gamma_{YX} & \varepsilon_Y & \gamma_{YZ} \\ \gamma_{ZX} & \gamma_{ZY} & \varepsilon_Z \end{bmatrix}$$

Se for EPD (2D - discutir condições)

- + 4 incógnitas (componentes do estado de deformação)
  - **3 incógnitas** se levado em conta que $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_X & \gamma_{XZ} \\ \gamma_{ZX} & \varepsilon_Z \end{bmatrix}$$

Definição das componentes de deformação

$$\varepsilon_X = -\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{XY} = -\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \gamma_{YX}$$

$$\varepsilon_Y = -\frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{YZ} = -\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = \gamma_{ZY}$$

$$\varepsilon_Z = -\frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{ZX} = -\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \gamma_{XZ}$$

Estado de deformação

- + 9 incógnitas (componentes do estado de deformação)
  - 6 **incógnitas** se levado em conta que $\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$
- + **3 incógnitas** (deslocamentos nas três direções)
- Observar, porém, que as 6 componentes do estado de deformação são função dos 3 deslocamentos

Compatibilidade

- 6 equações adicionais relacionando as componentes do estado de deformação
- As equações adicionais garantem a compatiblidade entre as 6 deformações (lineares e angulares) e os 3 deslocamentos dos quais elas são derivadas

9 equações, 15 incógnitas

Equações adicionais

Relações tensão-deformação

Relações tensão-deformação

- Elasticidade linear
- Outros modelos
- Aplicabilidade

Elasticidade linear

Relações lineares entre deformações e tensões

$$\varepsilon_X = \frac{1}{E}\left(\sigma_X - \nu\sigma_Y - \nu\sigma_Z\right) \qquad \gamma_{XY} = \frac{\tau_{XY}}{G} = \frac{\tau_{YX}}{G} = \gamma_{YX}$$

$$\varepsilon_Y = \frac{1}{E}\left(-\nu\sigma_X + \sigma_Y - \nu\sigma_Z\right) \qquad \gamma_{YZ} = \frac{\tau_{YZ}}{G} = \frac{\tau_{ZY}}{G} = \gamma_{ZY}$$

$$\varepsilon_Z = \frac{1}{E}\left(-\nu\sigma_X - \nu\sigma_Y + \sigma_Z\right) \qquad \gamma_{ZX} = \frac{\tau_{ZX}}{G} = \frac{\tau_{XZ}}{G} = \gamma_{XZ}$$

E = módulo de Young

ν = coeficiente de Poisson

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Soluções do sistema de 15 equações diferenciais a 15 funções incógnitas

- Soluções exatas
  - analíticas
- Soluções aproximadas
  - numéricas
    - MEF
    - MDF
    - MEC

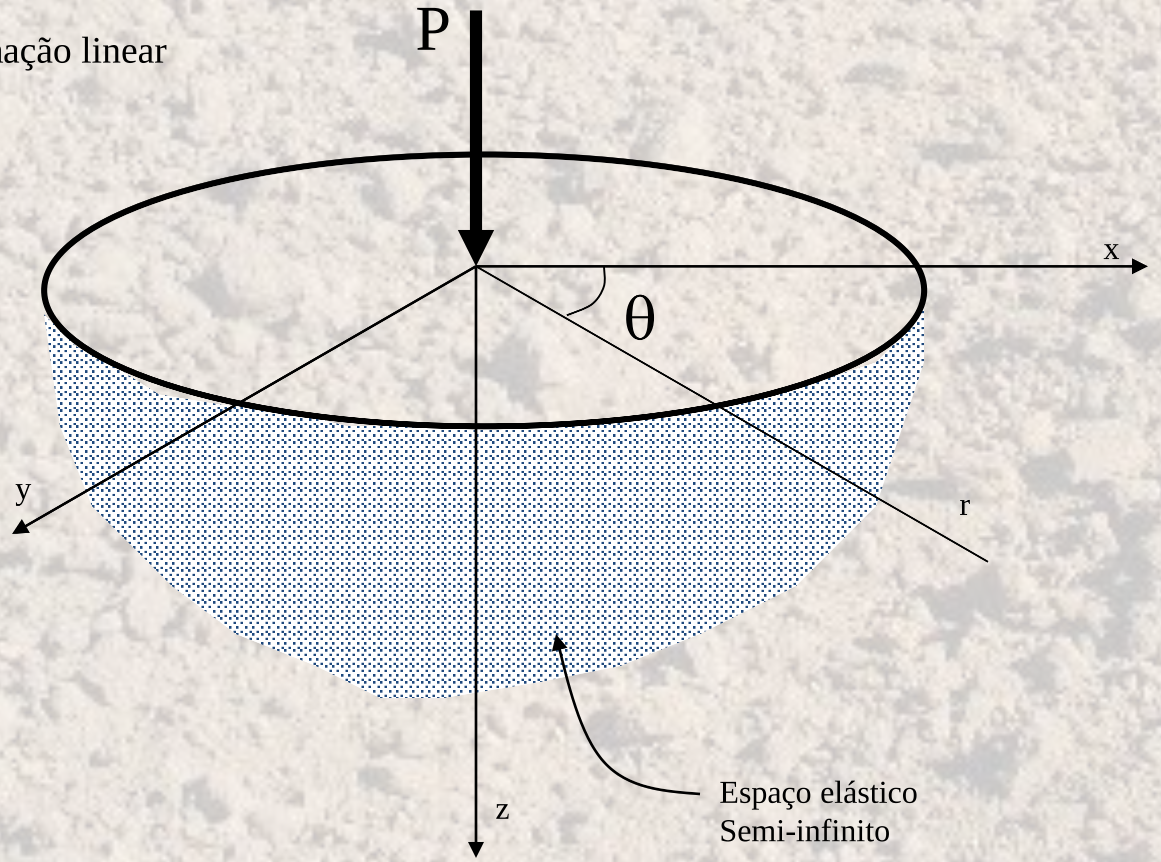
Uso de Teoria da Elasticidade

- Solução de Boussinesq – Carregamento Concentrado
- Extensões da solução de Boussinesq
  - Carregamento Retangular Finito (Solução de Newmark)
  - Carregamento Retangular Infinito - Sapata Corrida (Solução de Carothers e Terzaghi)
  - Carregamento Circular (Solução de Love)
  - Carregamento Triangular Infinito (Solução de Carothers)
  - Qualquer Carregamento (Gráfico de Newmark)
- Soluções diversas – Poulos e Davis (1974)

Propagação de tensões

O Problema de Boussinesq

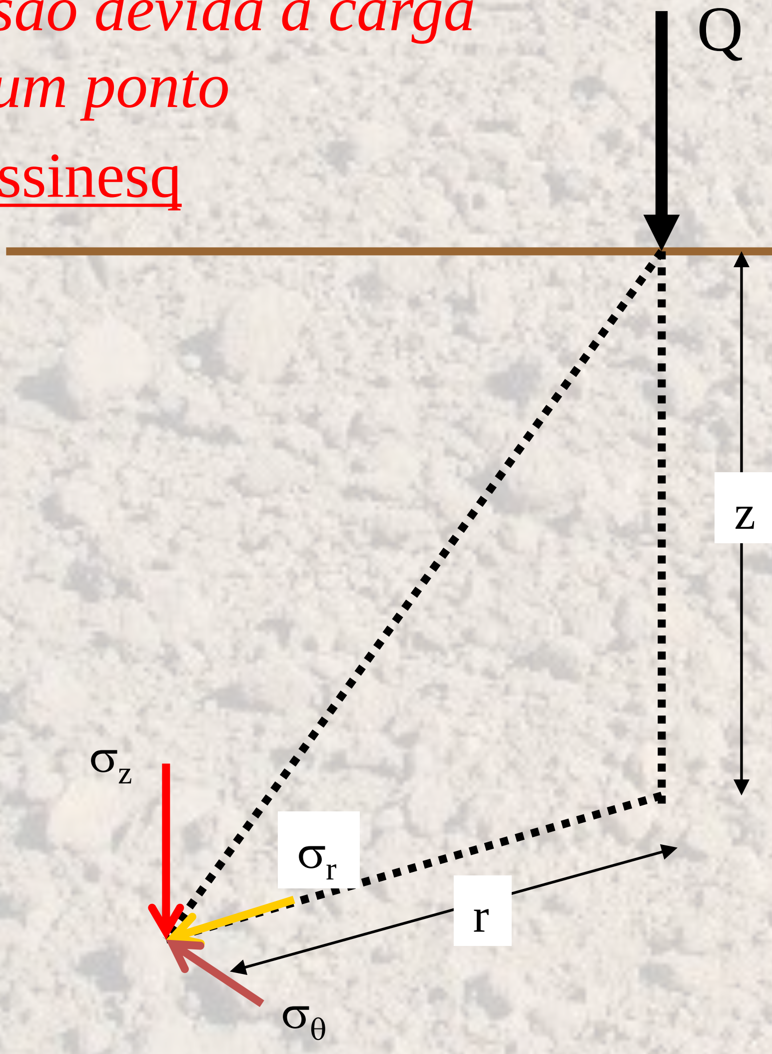
- Espaço semi-infinito
- Material homogêneo
- Massa Isotrópica
- Relação tensão deformação linear



Propagação de tensões

Tensão devida à carga em um ponto

Boussinesq



Fator de Influência

$$I_p = \frac{3}{2\pi}\left\{\frac{1}{1+\left(\frac{r}{z}\right)^2}\right\}^{5/2}$$

$$\boxed{\sigma_z = \frac{Q}{z^2} I_p}$$

Carregamento Concentrado - Solução de Boussinesq - EXEMPLO

Um poste de transmissão de energia possui um peso de 50tf. Há uma dutovia que passa a uma profundidade de 5m no eixo deste poste. Calcular o acréscimo de tensão que o poste causará no solo acima da dutovia, em seu eixo, e a 2m de distância.

$$\boxed{\sigma_z = \frac{Q}{z^2} I_p}$$

$$I_p = \frac{3}{2\pi} \left\{ \frac{1}{1 + \left(\frac{r}{z} \right)^2} \right\}^{5/2}$$

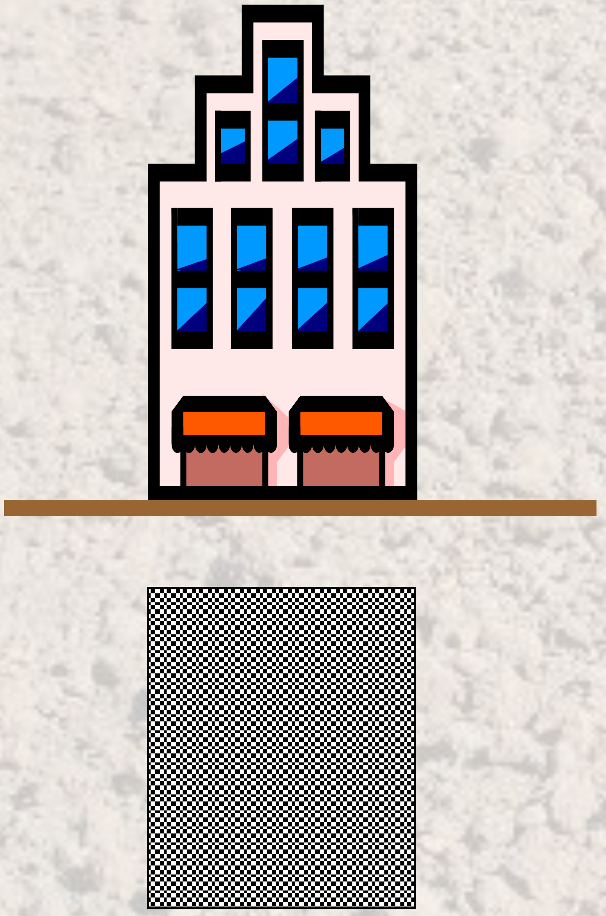
$I_p = 0{,}48$

$\sigma_z = 50 \times 0{,}48 / 5^2 = 1{,}0$ tf

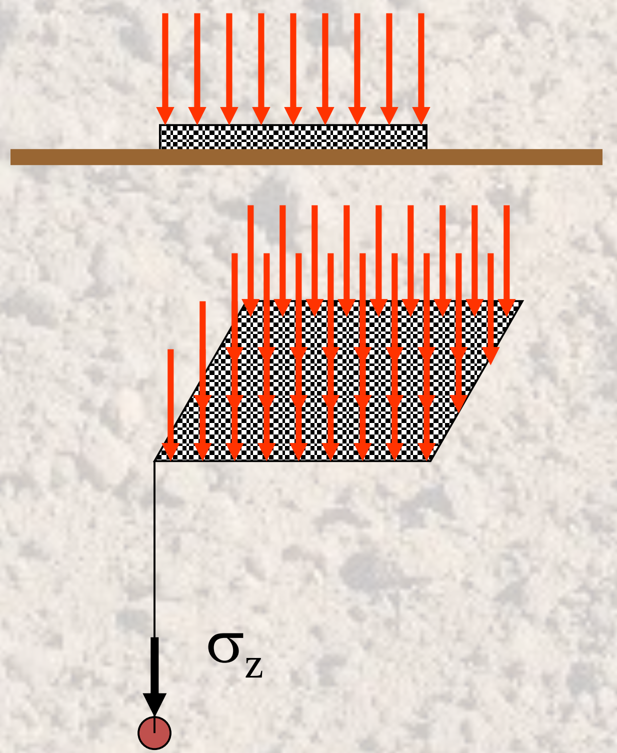
$I_p = 0{,}33$

$\sigma_z = 50 \times 0{,}33 / 5^2 = 0{,}7$ tf

Propagação de tensões

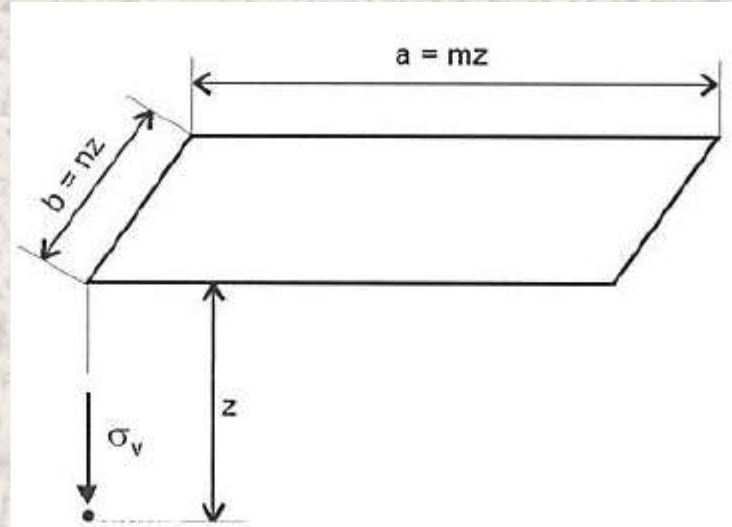


Tensão vertical no canto de uma área retangular uniformemente carregada



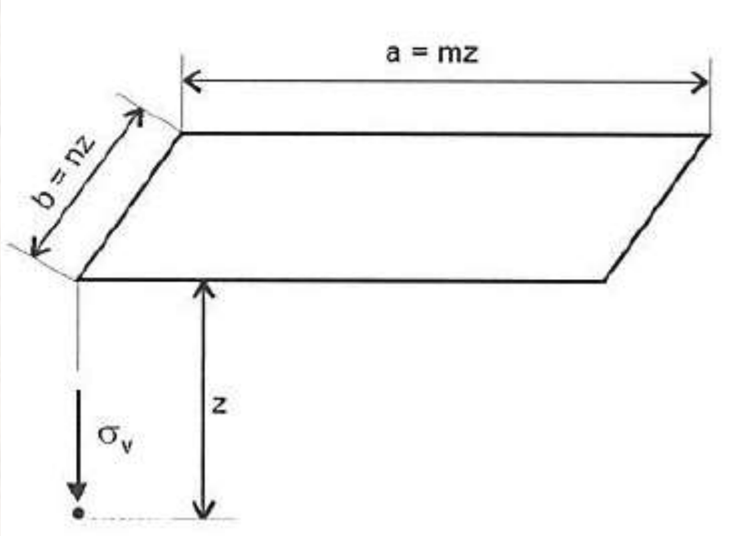
Carregamento Retangular Finito - Solução de Newmark

$$m = \frac{a}{z} \quad e \quad n = \frac{b}{z}$$



Carregamento Retangular Finito - Solução de Newmark

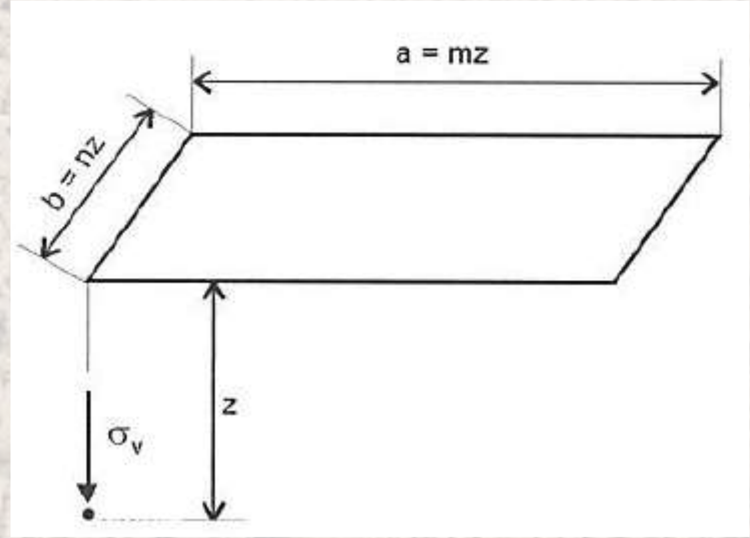
$$m = \frac{a}{z} \quad e \quad n = \frac{b}{z}$$



$$\sigma_v = \frac{\sigma_o}{4 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{\left[2mn\left(m^2+n^2+1\right)^{0,5}\right]\left(m^2+n^2+2\right)}{\left(m^2+n^2+1+m^2n^2\right)\left(m^2+n^2+1\right)} + \text{arctg}\, \frac{2mn\left(m^2+n^2+1\right)^{0,5}}{m^2+n^2+1-m^2n^2} \right]$$

Carregamento Retangular Finito - Solução de Newmark

$$m = \frac{a}{z} \quad \text{e} \quad n = \frac{b}{z}$$



$$\sigma_v = \frac{\sigma_o}{4 \cdot \pi} \cdot \left[\frac{\left[2mn\left(m^2+n^2+1\right)^{0,5}\right]\left(m^2+n^2+2\right)}{\left(m^2+n^2+1+m^2n^2\right)\left(m^2+n^2+1\right)} + \operatorname{arctg} \frac{2mn\left(m^2+n^2+1\right)^{0,5}}{m^2+n^2+1-m^2n^2} \right]$$

$$\sigma_v = I \cdot \sigma_o$$

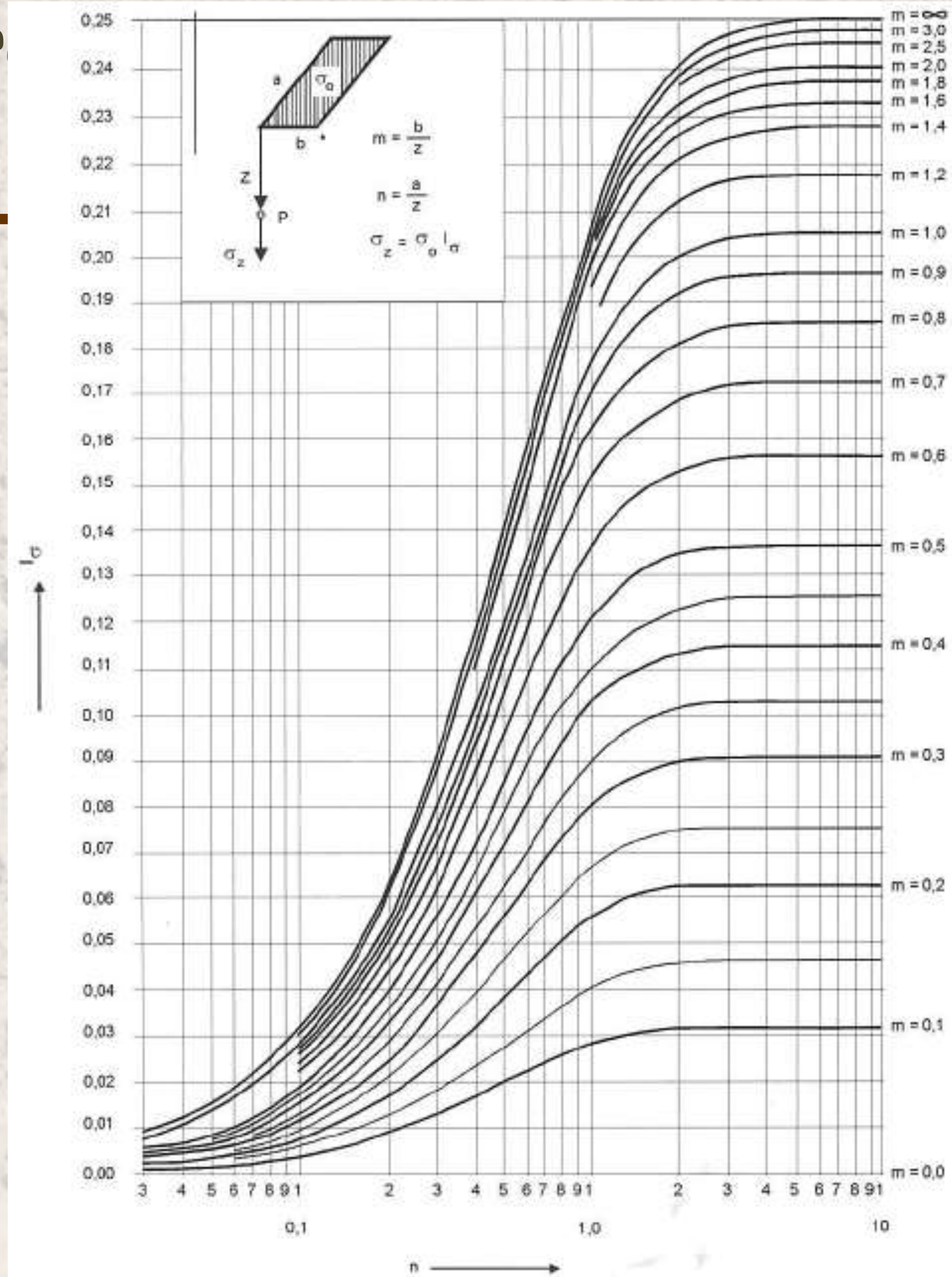
Carregamento Retangular Finito - Solução de Newmark

n ou m	n = a/z ou m = b/z								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0,1	0,005	0,009	0,013	0,017	0,020	0,022	0,.24	0,026	0,027
0,2	0,009	0,018	0,026	0,033	0,039	0,043	0,047	0,050	0,053
0,3	0,013	0,026	0,037	0,047	0,056	0,063	0,069	0,073	0,077
0,4	0,017	0,033	0,047	0,060	0,071	0,080	0,087	0,093	0,098
0,5	0,020	0,039	0,056	0,071	0,084	0,095	0,103	0,110	0,116
0,6	0,022	0,043	0,063	0,080	0,095	0,107	0,117	0,125	0,131
0,7	0,024	0,047	0,069	0,087	0,103	0,117	0,128	0,137	0,144
0,8	0,026	0,050	0,073	0,093	0,110	0,125	0,137	0,146	0,154
0,9	0,027	0,053	0,077	0,098	0,116	0,131	0,144	0,154	0,162
1,0	0,028	0,055	0,079	0,101	0,120	0,136	0,149	0,160	0,168
1,2	0,029	0,057	0,083	0,106	0,126	0,143	0,157	0,168	0,178
1,5	0,030	0,059	0,086	0,110	0,131	0,149	0,164	0,176	0,186
2,0	0,031	0,061	0,089	0,113	0,135	0,153	0,169	0,181	0,192
2,5	0,031	0,062	0,090	0,115	0,137	0,155	0,170	0,183	0,194
3,0	0,032	0,062	0,090	0,115	0,137	0,156	0,171	0,184	0,195
5,0	0,032	0,062	0,090	0,115	0,137	0,156	0,172	0,185	0,196
10,0	0,032	0,062	0,090	0,115	0,137	0,156	0,172	0,185	0,196
∞	0,032	0,062	0,090	0,115	0,137	0,156	0,172	0,185	0,196

Carregamento Retangular Finito - Solução de Newmark

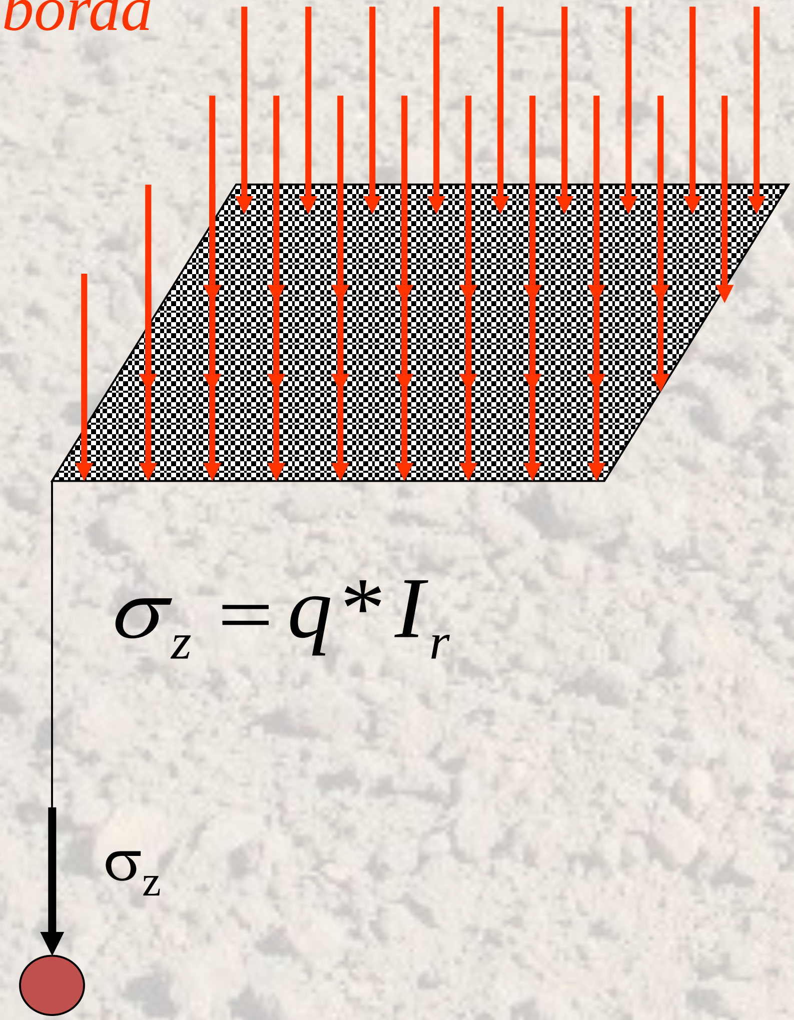
n ou m	n = a/z ou m = b/z								
	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	5,0	10,0	∞
0,1	0,028	0,029	0,030	0,031	0,031	0,032	0,032	0,032	0,032
0,2	0,055	0,057	0,059	0,061	0,062	0,062	0,062	0,062	0,062
0,3	0,079	0,083	0,086	0,089	0,090	0,090	0,090	0,090	0,090
0,4	0,101	0,106	0,110	0,113	0,115	0,115	0,115	0,115	0,115
0,5	0,120	0,126	0,131	0,135	0,137	0,137	0,137	0,137	0,137
0,6	0,136	0,143	0,149	0,153	0,155	0,156	0,156	0,156	0,156
0,7	0,149	0,157	0,164	0,169	0,170	0,171	0,172	0,172	0,172
0,8	0,160	0,168	0,176	0,181	0,183	0,184	0,185	0,185	0,185
0,9	0,168	0,178	0,186	0,192	0,194	0,195	0,196	0,196	0,196
1,0	0,175	0,185	0,193	0,200	0,202	0,203	0,204	0,205	0,205
1,2	0,185	0,196	0,205	0,212	0,215	0,216	0,217	0,218	0,218
1,5	0,193	0,205	0,215	0,223	0,226	0,228	0,229	0,230	0,230
2,0	0,200	0,212	0,223	0,232	0,236	0,238	0,239	0,240	0,240
2,5	0,202	0,215	0,226	0,236	0,240	0,242	0,244	0,244	0,244
3,0	0,203	0,216	0,228	0,238	0,242	0,244	0,246	0,247	0,247
5,0	0,204	0,217	0,229	0,239	0,244	0,246	0,249	0,249	0,249
10,0	0,205	0,218	0,230	0,240	0,244	0,247	0,249	0,250	0,250
∞	0,205	0,218	0,230	0,240	0,244	0,247	0,249	0,250	0,250

Carr… finito –
…k



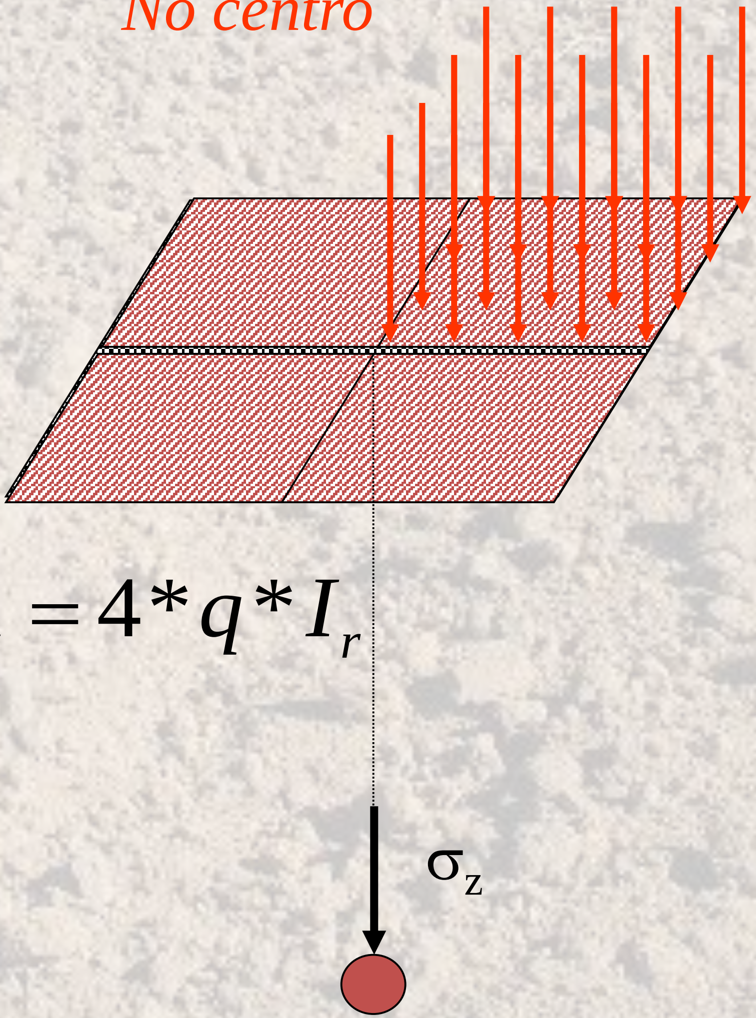
Propagação de tensões

Na borda



$$\sigma_z = q * I_r$$

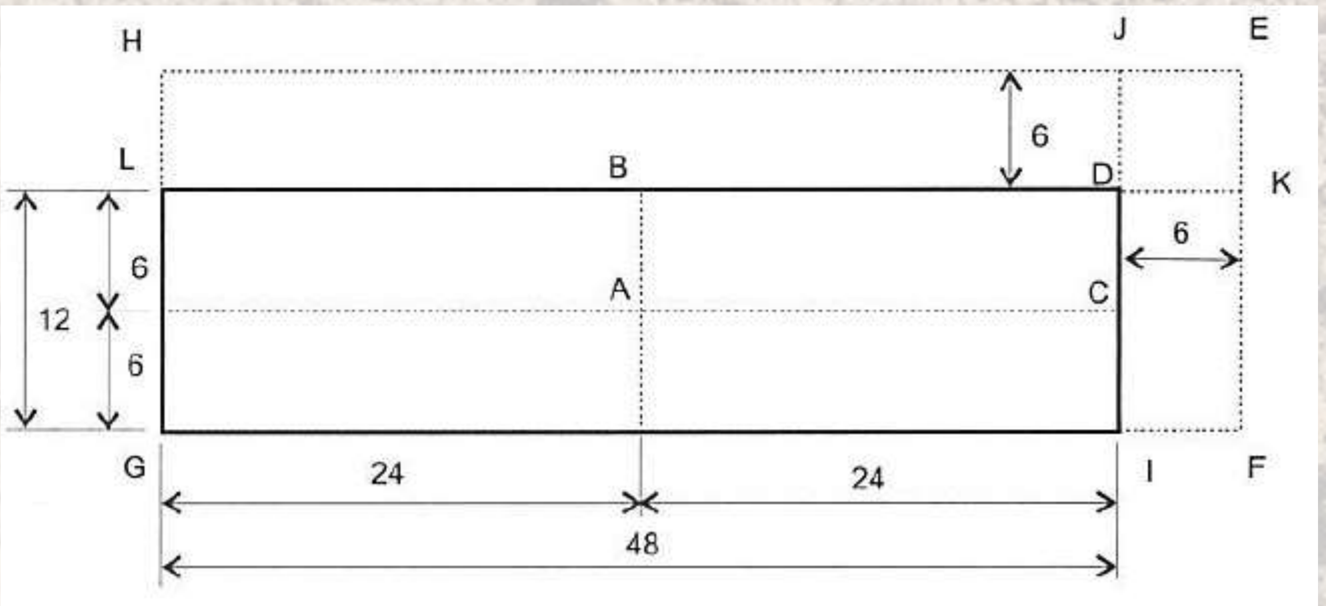
No centro

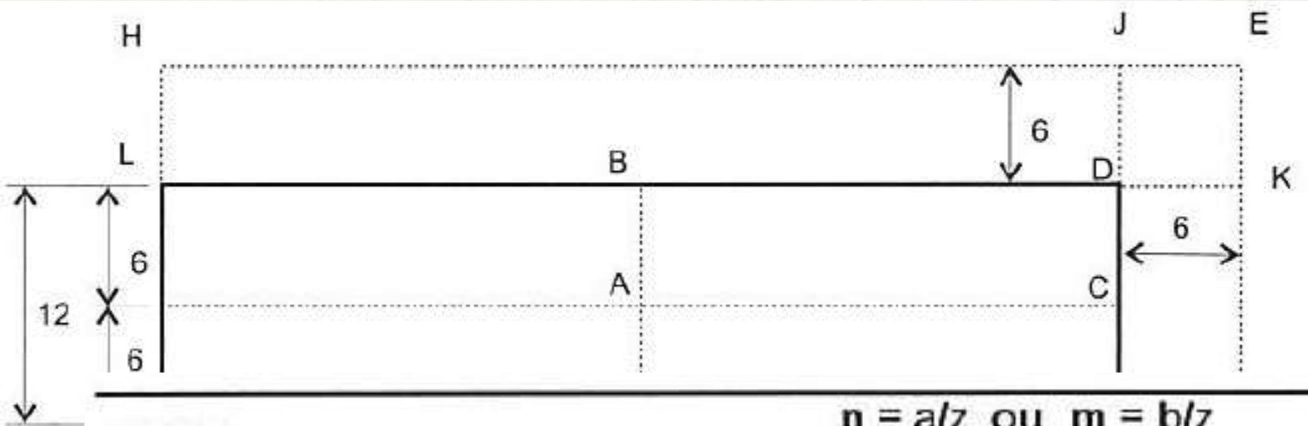


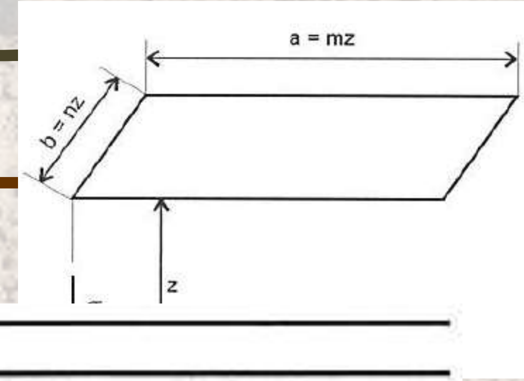
$$\sigma_z = 4 * q * I_r$$

Carregamento Retangular - Exemplo

Uma construção industrial apresenta planta retangular conforme figura abaixo. O seu radier vai aplicar uma pressão de 50 kPa no solo. Determine o acréscimo de tensão na vertical nos pontos A, B, C, D e E a 6m de profundidade.







n ou m	n = a/z ou m = b/z								
	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	5,0	10,0	∞
0,1	0,028	0,029	0,030	0,031	0,031	0,032	0,032	0,032	0,032
0,2	0,055	0,057	0,059	0,061	0,062	0,062	0,062	0,062	0,062
0,3	0,079	0,083	0,086	0,089	0,090	0,090	0,090	0,090	0,090
0,4	0,101	0,106	0,110	0,113	0,115	0,115	0,115	0,115	0,115
0,5	0,120	0,126	0,131	0,135	0,137	0,137	0,137	0,137	0,137
0,6	0,136	0,143	0,149	0,153	0,155	0,156	0,156	0,156	0,156
0,7	0,149	0,157	0,164	0,169	0,170	0,171	0,172	0,172	0,172
0,8	0,160	0,168	0,176	0,181	0,183	0,184	0,185	0,185	0,185
0,9	0,168	0,178	0,186	0,192	0,194	0,195	0,196	0,196	0,196
1,0	0,175	0,185	0,193	0,200	0,202	0,203	0,204	0,205	0,205
1,2	0,185	0,196	0,205	0,212	0,215	0,216	0,217	0,218	0,218
1,5	0,193	0,205	0,215	0,223	0,226	0,228	0,229	0,230	0,230
2,0	0,200	0,212	0,223	0,232	0,236	0,238	0,239	0,240	0,240
2,5	0,202	0,215	0,226	0,236	0,240	0,242	0,244	0,244	0,244
3,0	0,203	0,216	0,228	0,238	0,242	0,244	0,246	0,247	0,247
5,0	0,204	0,217	0,229	0,239	0,244	0,246	0,249	0,249	0,249
10,0	0,205	0,218	0,230	0,240	0,244	0,247	0,249	0,250	0,250
∞	0,205	0,218	0,230	0,240	0,244	0,247	0,249	0,250	0,250

Poi

m =

σ_V

Poi

m =

σ_V

Propagação de tensões

Aplicabilidade da Teoria da Elasticidade

Para cálculo de tensões

- ✓ Massa homogênea – Quando as condições de contorno do problema analítico se aproxima das condições de contorno “in situ”, a distribuição de tensões no campo são comparáveis àquelas obtidas pela análise linear elástica.

Para cálculo de deslocamentos

- ✓ O cálculo de deslocamentos depende mais diretamente da natureza da lei constitutiva e das magnitudes dos parâmetros utilizados, desta forma, a habilidade da teoria da elasticidade em prever deslocamentos depende, de forma mais marcante, da não linearidade e da heterogeneidade do material “in situ”.