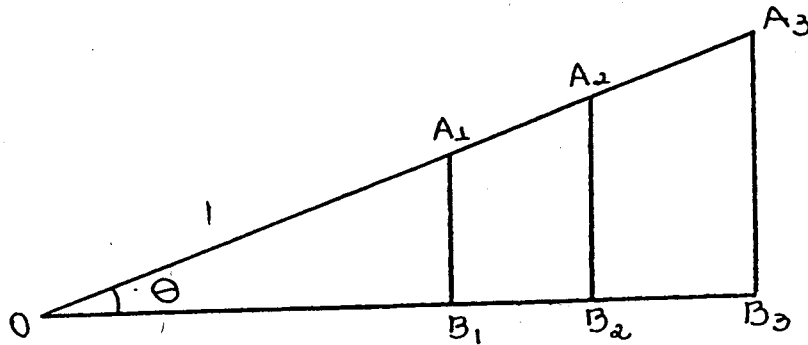


# MAT 1513 - Laboratório de Matemática

## Funções Trigonômicas

### As Funções trigonométricas no triângulo retângulo

Analisando a figura a seguir, temos que os triângulos retângulos  $\triangle OA_1B_1$ ,  $\triangle OA_2B_2$  e  $\triangle OA_3B_3$ , são semelhantes, pois possuem ângulos correspondentes congruentes.



Segue-se desta semelhança, as seguintes relações:

$$\frac{A_1B_1}{OA_1} = \frac{A_2B_2}{OA_2} = \frac{A_3B_3}{OA_3} \quad \frac{OB_1}{OA_1} = \frac{OB_2}{OA_2} = \frac{OB_3}{OA_3} \quad \frac{A_1B_1}{OB_1} = \frac{A_2B_2}{OB_2} = \frac{A_3B_3}{OB_3}$$

Observe que estas relações dependem apenas do ângulo  $\theta$ , medido em graus, e não dos comprimentos envolvidos, onde  $\theta$  é o ângulo  $\widehat{A_iOB_i}$ . Podemos então, definir três funções que tem como domínio o intervalo  $]0, 90[$ , isto é, consideremos as seguintes funções

$$\text{sen}\theta = \frac{A_1B_1}{OA_1} \quad \text{cos}\theta = \frac{OB_1}{OA_1} \quad \text{tg}\theta = \frac{A_1B_1}{OB_1}$$

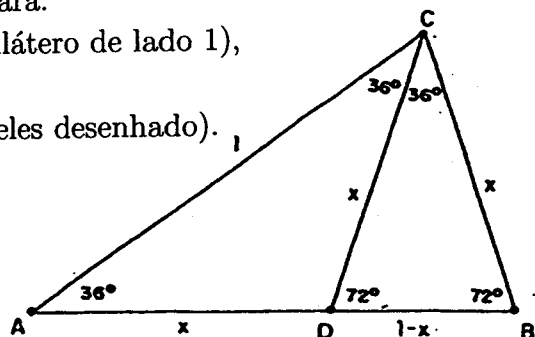
que se chamam, respectivamente, seno de  $\theta$ , cosseno de  $\theta$  e tangente de  $\theta$ . Observe que a imagem das funções seno e cosseno é  $]0, 1[$  e da função tangente é  $]0, \infty[$ , note ainda, que estas funções, chamadas de funções trigonométricas, estão relacionadas entre si.

**Exercício 1:** Demonstre que para  $\theta \in ]0, 90[$  valem as seguintes relações:

- (a)  $\text{sen}^2\theta + \text{cos}^2\theta = 1$ ,  
 (b)  $\text{tg}\theta = \frac{\text{sen}\theta}{\text{cos}\theta}$ ,  
 (c)  $\text{sen}(90^\circ - \theta) = \text{cos}\theta$ ,  
 (d)  $\text{tg}(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\text{tg}\theta}$ .

**Exercício 2:** Calcule o valor de  $\text{cos}\theta$ ,  $\text{sen}\theta$  e  $\text{tg}\theta$ , para:

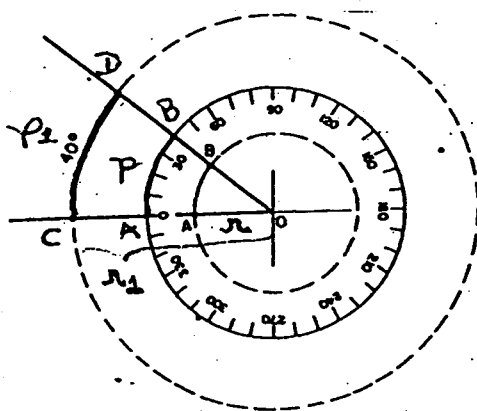
- (a)  $\theta = 30^\circ$  e  $\theta = 60^\circ$  (Dica: tome um triângulo equilátero de lado 1),  
 (b)  $\theta = 45^\circ$ ,  
 (c)  $\theta = 36^\circ$  e  $\theta = 18^\circ$  (Dica: utilize o triângulo isósceles desenhado).



Observe que o domínio das funções definidas acima é  $]0, 90[$ , no entanto, não nos interessa esta limitação do domínio nem tampouco o uso da unidade grau para a medida dos ângulos, pois queremos definir funções cujos domínios sejam os maiores possíveis dentro do conjunto de todos os números reais. Para isso, precisamos abandonar o triângulo retângulo e procurar um outro modelo geométrico que nos permita estabelecer relações análogas aquelas válidas no triângulo retângulo. O modelo geométrico é a circunferência orientada de raio unitário.

### Medidas de ângulos e de arcos. Radianos

Dada uma circunferência, estamos acostumados a usar expressões do tipo, *arco de*  $40^\circ$ , para nos referir ao arco que subentende um ângulo central de  $40^\circ$ . Assim podemos nos referir aos arcos  $AB$  e  $CD$  como arcos de  $40^\circ$ .



Note que, dado um ângulo, podemos considerar infinitas circunferências centradas no vértice do ângulo. Para cada uma delas, o ângulo dado subentende um arco diferente, cujo comprimento depende do raio da circunferência ao qual ele pertence. Assim, na figura, o comprimento de  $AB$  é menor que o comprimento de  $CD$  sendo ambos chamados de arcos de  $40^\circ$ .

Numa dada circunferência, os arcos mais compridos correspondem ângulos centrais (aberturas) maiores. Se você dobra a abertura do ângulo central, dobrará o comprimento do arco subentendido e vice-versa. Daí vem a possibilidade de usar o comprimento de arcos de uma circunferência fixada como medida dos ângulos com vértice no seu centro, para medir a abertura ou o giro correspondente a esses ângulos. Por exemplo, um arco de  $40^\circ$  equivale a  $1/9$  de uma circunferência, enquanto um de  $60^\circ$  equivale a  $1/6$  da mesma.

Por outro lado, dado um ângulo, podemos considerar infinitas circunferências centradas no vértice do ângulo.

Para cada uma dessas circunferências, o ângulo dado subentende um arco diferente. No entanto, existe uma relação de semelhança entre os arcos da circunferência que correspondem ao mesmo ângulo central, a saber:

$$\frac{\text{comprimento do arco } AB}{R_1} = \frac{\text{comprimento do arco } CD}{R_2}$$

Em particular, se  $C_1$  e  $C_2$  são os comprimentos das circunferências de raios  $R_1$  e  $R_2$ , respectivamente, temos que:

$$\frac{C_1}{R_1} = \frac{C_2}{R_2} \quad \text{ou ainda,} \quad \frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}.$$

**Definiremos:**  $\pi = \frac{C_1}{2R_1} = \frac{C_2}{2R_2}$  ou ainda,  $\pi =$  comprimento de um semi-círculo de raio 1.

Utilizando-se métodos de aproximação do comprimento de circunferências, obtemos aproximações para o valor de  $\pi$ , por exemplo,  $\pi \approx 3,1415926$ .

Assim, o comprimento de uma circunferência de raio  $R$  é  $2\pi R$  e os arcos correspondem a porções da circunferência.

**Definição:** A medida de um ângulo em radianos é a razão entre o comprimento do arco determinado pelo ângulo em uma circunferência cujo centro é o vértice do ângulo e o raio da circunferência.

Por conveniência, fixaremos no que se segue, uma circunferência de raio 1, pois, neste caso, o ângulo correspondente a uma volta inteira medirá  $2\pi$ , o de  $\frac{1}{4}$  de volta  $\frac{\pi}{2}$  e o de  $\frac{1}{9}$  de volta  $\frac{2\pi}{9}$ .

**OBS.:** não importa a unidade de medida de comprimento para o raio, pois por exemplo, se o raio da circunferência é igual a 1 km, o arco correspondente ao ângulo de  $\pi/4$  radianos mede  $\pi/4$  quilômetros; se o raio da circunferência mede 1 polegada, o arco correspondente ao ângulo de  $\pi/4$  radianos mede  $\pi/4$  polegadas.

### Exercícios:

(3) Mostre que 1 radiano  $\approx 57^\circ 17' 44''$ , onde  $1' = \frac{1}{60}1^\circ$  e  $1'' = \frac{1}{60}1'$ .

(4) Exprimir em radianos:

(a)  $45^\circ$     (b)  $225^\circ$     (c)  $210^\circ$     (d)  $270^\circ$     (e)  $240^\circ$     (f)  $22^\circ 30'$   
 (g)  $60^\circ$     (h)  $315^\circ$     (i)  $300^\circ$     (j)  $345^\circ$     (k)  $330^\circ$     (l)  $31^\circ 15' 45''$

(5) Exprimir em graus:

(a)  $\frac{\pi}{6}$  rad    (b)  $\frac{\pi}{4}$  rad    (c)  $\frac{2\pi}{3}$  rad    (d)  $\frac{5\pi}{6}$  rad  
 (e)  $\frac{3\pi}{8}$  rad    (f)  $\frac{11\pi}{6}$  rad    (g)  $\frac{\pi}{3}$  rad    (h)  $\frac{3\pi}{4}$  rad

(6) Um arco de circunferência mede  $30\text{cm}$  e o raio da circunferência mede  $10\text{cm}$ . Calcular a medida do ângulo central correspondente.

(7) Sobre uma circunferência de raio  $10\text{cm}$  marcam-se os pontos  $A$  e  $B$  de modo que a corda  $AB$  mede  $10\text{cm}$ . Calcular a medida do arco menor  $AB$ .

(8) Um decágono regular é inscrito em uma circunferência de raio  $1m$ . Calcular o comprimento do arco determinado por dois vértices consecutivos.

(9) Expressar em radianos os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  tais que  $\alpha - \beta = 15^\circ$  e  $\alpha + \beta = \frac{7\pi}{4}$ .

(10) Calcular em graus a medida do ângulo central  $\widehat{AOB}$  definido numa circunferência de raio  $10cm$ , com  $AB$  medindo  $3cm$ .

(11) Calcular a medida do ângulo central  $\widehat{AOB}$  que determina em uma circunferência de raio  $r$ , um arco de comprimento  $\frac{2\pi r}{3}$ .

MAT1513 - Laboratório de Matemática  
Trigonometria

Funções Trigonométricas

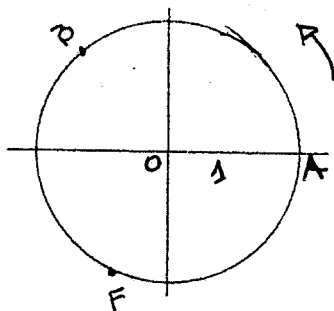
A CIRCUNFERÊNCIA ORIENTADA

Para prosseguir vamos considerar uma circunferência de raio 1 e tendo em mente o que foi discutido até aqui vamos identificar os ângulos e arcos correspondentes. Assim, para simplificar a nossa comunicação, vamos nos referir sem distinção ao ângulo  $\pi$  e ao arco  $\pi$ .

Vamos associar a cada número real um ponto sobre uma circunferência de raio 1, para depois disso podermos definir as funções trigonométricas de qualquer número real. Isto será feito da seguinte forma:

Sobre uma circunferência  $C$  de raio 1 vamos fixar um ponto  $A$  que será a origem dos arcos e a partir deste ponto vamos escolher o sentido anti-horário de percurso sobre a circunferência como sendo positivo para a representação dos arcos. Isto é, definimos a medida algébrica de um arco  $AB$  no sentido anti-horário desta circunferência como sendo o comprimento deste arco, associado a um sinal positivo se o sentido de  $A$  para  $B$  for anti-horário, e negativo se o sentido do percurso de  $A$  para  $B$  for horário.

No caso do desenho abaixo, a medida algébrica do arco  $AB$  (no sentido anti-horário) é um número positivo igual ao comprimento do arco  $AB$  ou a medida em radiano do ângulo central correspondente. Já no caso de arco  $AF$  (no sentido horário) sua medida algébrica é um número negativo igual a menos o comprimento do arco  $AF$ .



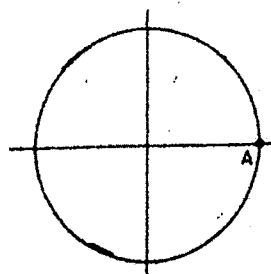
COMPRIENTO DO SEGMENTO  $\overline{OA} = 1$

**Exercício 1.** Represente na circunferência abaixo os pontos correspondentes aos arcos de medidas:

medida de  $AB = \frac{\pi}{8}$       medida de  $AC = \frac{3\pi}{4}$

medida de  $AD = -3$       medida de  $AE = 0$

medida de  $AF = 2\pi$



Com o que fizemos até agora para cada número  $x$  do intervalo  $[-2\pi, 2\pi]$  corresponde um ponto  $P_x$  sobre a circunferência de tal forma que o arco  $AP_x$  tenha medida  $|x|$  e o

percurso de  $A$  para  $P_x$  seja anti-horário ou horário dependendo do sinal de  $x$ .

Como estender esta correspondência para números além deste intervalo?

Vamos definir uma função que a cada número real faz corresponder um ponto  $P_x$  na circunferência assim: se  $x$  é positivo percorremos sobre a circunferência no sentido anti-horário um comprimento igual a  $x$  até determinar  $P_x$ , se  $x$  é negativo este percurso é feito no sentido horário.

Então se  $x < -2\pi$  ou  $x > 2\pi$  será necessário dar mais de uma volta na circunferência para atingir  $P_x$  num ou noutro sentido. Por outro lado, um dado ponto  $P$  da circunferência corresponderá a uma infinidade de números reais, como veremos.

### Exercícios

2. Quantas voltas serão dadas na circunferência para se representar os números  $\frac{25\pi}{3}$  e  $-12$ ?
3. Se um ponto  $K$  da circunferência corresponde ao número  $\frac{\pi}{7}$  a que outros números este mesmo ponto corresponde?
4. Se um ponto  $P$  da circunferência corresponde a um número  $x$ , qual é a forma dos outros números que também correspondem a este mesmo ponto? Estes números são chamados as várias determinações do arco  $AP$ .

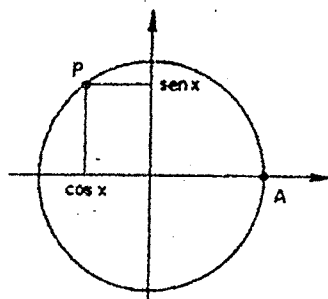
## AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos um sistema de coordenadas cuja origem é o centro de uma circunferência  $C$  de raio 1 e tome  $A = (1, 0)$  a origem dos arcos sobre  $C$ . Para cada número real  $x$ , seja  $P_x$  o ponto na circunferência  $C$  onde a medida do arco  $AP_x$  é  $x$ . Definimos

$\cos x =$  abscissa de  $P_x$

$\operatorname{sen} x =$  ordenada de  $P_x$

$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$  se  $\cos x \neq 0$



Observe que para  $P_0 = A$  é possível definir  $\cos 0 = 1$  e  $\operatorname{sen} 0 = 0$ , e para  $P_{\frac{\pi}{2}} = (0, 1)$  temos  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  e  $\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ .

5. Calcule ainda os valores de seno e cosseno para  $x = \pi$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$  e  $x = 2\pi$ .

Aqui queremos chamar a atenção para a vantagem de estarmos medindo os ângulos centrais em radianos e **não em graus**. Observe que, não importa a unidade de medida escolhida para a unidade do sistema de coordenadas, teremos os arcos e os ângulos centrais (em radianos) representando os valores de  $x$  e os valores de  $\operatorname{sen} x$ ,  $\cos x$  e  $\operatorname{tg} x$  todos na mesma unidade. Por isso, no Cálculo e em suas aplicações, a convenção adotada é medir ângulos em radianos, para evitar confusões pois ao estudarmos funções da forma  $F(x) = x + \operatorname{sen} x$ , se escolhermos como unidade do sistema de coordenadas 1 centímetro, cada ponto  $(x, F(x))$  do gráfico desta função terá suas ordenadas expressas em cm.

### Exercícios

6. Verifique que, para todo número real  $x$ , temos:  $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ .

7. Quais são os valores máximos e mínimos para  $\text{sen } x$  e para  $\text{cos } x$ ? O que podemos dizer sobre os valores da função tangente?
8. Para que valores de  $x$  não é possível definir  $\text{tg } x$ ?
9. Verifique que para todo número inteiro  $k$  e todo número real  $x$  temos:  $\text{cos } x = \text{cos}(x + 2k\pi)$ . Isto quer dizer que a função cosseno é periódica de período  $2\pi$ . A mesma igualdade vale para as funções seno e tangente? Por quê?
10. As funções seno e cosseno mudam de sinal dependendo do valor de  $x$ , ou seja, dependendo da posição do ponto  $P_x$  em cada um dos quadrantes do sistema de coordenadas. Além disso, estas funções são crescentes ou decrescentes em cada um dos quatro quadrantes. Observe estes fatos e complete a tabela a seguir:

	$P_x$ no 1 <sup>o</sup> Quadrante	$P_x$ no 2 <sup>o</sup> Quadrante	$P_x$ no 3 <sup>o</sup> Quadrante	$P_x$ no 4 <sup>o</sup> Quadrante
seno	positiva e crescente			
cosseno		negativa e decrescente		



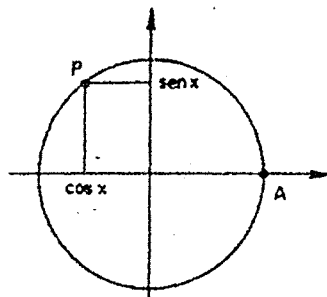
## AS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

Consideremos um sistema de coordenadas cuja origem é o centro de uma circunferência  $C$  de raio 1 e tome  $A = (1, 0)$  a origem dos arcos sobre  $C$ . Para cada número real  $x$ , seja  $P_x$  o ponto na circunferência  $C$  onde a medida do arco  $AP_x$  é  $x$ . Definimos

$\cos x =$  abscissa de  $P_x$

$\text{sen } x =$  ordenada de  $P_x$

$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$  se  $\cos x \neq 0$



Observe que para  $P_0 = A$  é possível definir  $\cos 0 = 1$  e  $\text{sen } 0 = 0$ , e para  $P_{\frac{\pi}{2}} = (0, 1)$  temos  $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$  e  $\text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$ .

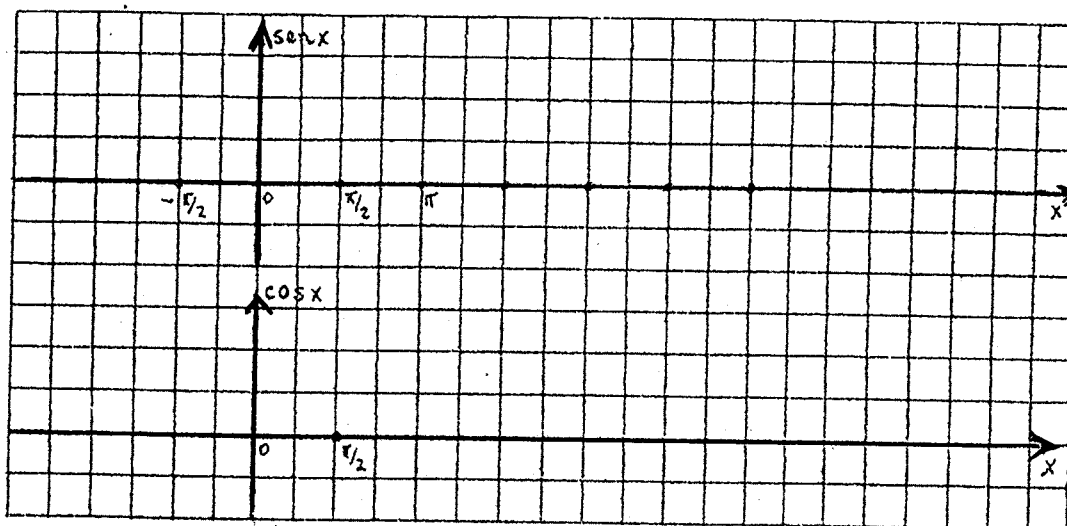
5. Calcule ainda os valores de seno e cosseno para  $x = \pi$ ,  $x = \frac{3\pi}{2}$  e  $x = 2\pi$ .

Aqui queremos chamar a atenção para a vantagem de estarmos medindo os ângulos centrais em radianos e **não em graus**. Observe que, não importa a unidade de medida escolhida para a unidade do sistema de coordenadas, teremos os arcos e os ângulos centrais (em radianos) representando os valores de  $x$  e os valores de  $\text{sen } x$ ,  $\cos x$  e  $\text{tg } x$  todos na mesma unidade. Por isso, no Cálculo e em suas aplicações, a convenção adotada é medir ângulos em radianos, para evitar confusões pois ao estudarmos funções da forma  $F(x) = x + \text{sen } x$ , se escolhermos como unidade do sistema de coordenadas 1 centímetro, cada ponto  $(x, F(x))$  do gráfico desta função terá suas ordenadas expressas em cm.

### Exercícios

6. Verifique que, para todo número real  $x$ , temos:  $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ .

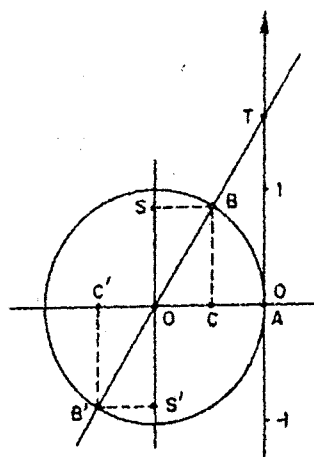
11. Com base nos resultados obtidos até aqui faça um esboço dos gráficos das funções seno e cosseno.



Para analisarmos o comportamento da função  $tg$  e construirmos seu gráfico é mais adequada uma outra interpretação de  $tgx$  sem depender das funções seno e cosseno, mas apenas do ponto  $P_x$ .

Para isso, vamos introduzir um outro eixo de coordenadas tendo como origem o ponto  $A$  e a direção da reta tangente à circunferência no ponto  $A$ , orientada positivamente como o eixo dos  $y$  do sistema original.

Sobre este eixo escolhemos a unidade de medida igual à do raio da circunferência.



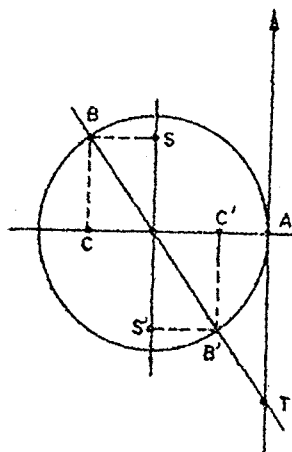
Se  $AB$  é um arco de medida  $x$ , a reta que passa por  $O$  e por  $B$  encontra a circunferência em  $B'$  e o novo eixo em  $T$ . Vamos mostrar que  $tgx =$  medida de  $AT$ , isto é,  $tgx$  é a medida algébrica de  $AT$ . Para se convencer disso faça os dois próximos exercícios:

12. Se o ponto  $B$  está no  $1^o$  ou no  $3^o$  quadrantes, considere que a medida de  $AB = x$  e a medida de  $AB' = x + \pi$ . Use a semelhança dos triângulos para completar as igualdades, justificando a validade das mesmas.

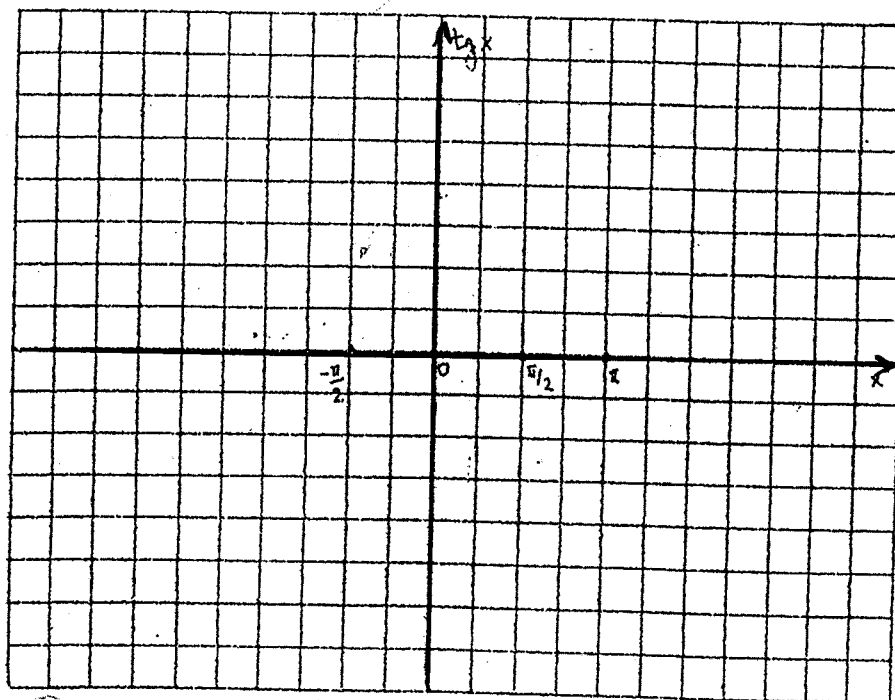
$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x} = \frac{\text{oposto}}{\text{adjacente}} = \text{medida de } AT$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\operatorname{sen}(x + \pi)}{\operatorname{cos}(x + \pi)} = \frac{\text{oposto}}{\text{adjacente}} = \text{medida de } AT$$

13. Se o ponto  $B$  está no 2º ou no 4º quadrantes, repita o mesmo raciocínio para concluir que:  $\operatorname{tg} x = -$  medida de  $AT$ .



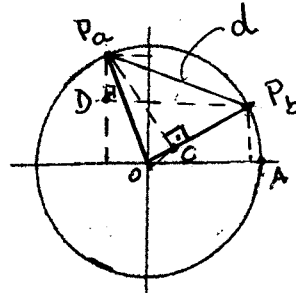
14. Usando esta nova interpretação para  $\operatorname{tg} x$  e os cálculos feitos, vimos que a função tangente é periódica de período  $\pi$ . Assim, para fazer seu gráfico basta saber seu sinal e o seu crescimento para  $x$  nos dois primeiros quadrantes. Faça o gráfico desta função:



15. Considere na circunferência trigonométrica orientada do raio 1 dois pontos  $P_a$  e  $P_b$  (onde  $a$  é o comprimento do arco  $AP_a$  e  $b$  é o comprimento do arco  $AP_b$ ). Temos então as seguintes coordenadas cartesianas para os pontos:

$$P_a = (\cos a, \operatorname{sen} a), \quad P_b = (\cos b, \operatorname{sen} b) \quad A = (1, 0)$$

$\angle P_b D P_a$  É RETO  
 $\angle P_b C P_a$  É RETO



- i) Explique por que  $\cos(a - b) =$  comprimento do segmento  $OC$ .

- ii) Sendo  $d$  a distância entre os dois pontos  $P_a$  e  $P_b$ , determine o valor de  $d^2$  utilizando o Teorema de Pitágoras nos seguintes triângulos retângulos:

$\Delta P_a C P_b$  e  $\Delta P_a D P_b$ .

- iii) Igualando as duas expressões obtidas para  $d^2$  em ii), deduza uma fórmula que permita determinar o valor de  $\cos(a - b)$  em termos de senos e cossenos de  $a$  e  $b$ .

Bibliografia básica para este texto: Carmo, M.P., Morgado, A.C., Wagner, E. - Trigonometria, Números Complexos. Coleção do Professor de Matemática - SBM.

MAT1513 - Laboratório de Matemática  
Trigonometria

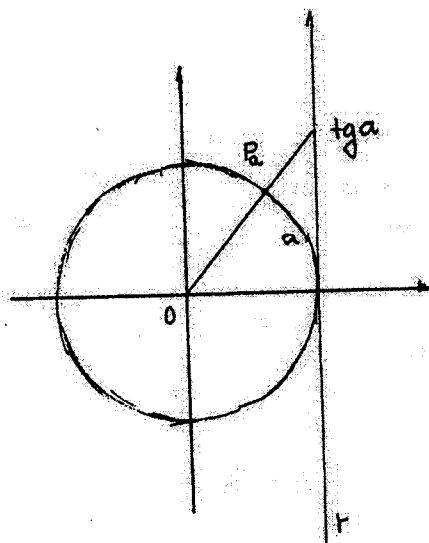
Funções Trigonométricas: tangente, cotangente, secante,

TANGENTE

A tangente de um número  $a$  é definida por

$$\operatorname{tga} = \frac{\operatorname{sena}}{\operatorname{cosa}}, \quad a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; \quad k \in \mathbf{Z}$$

A tangente de um número  $a$  é interpretada geometricamente na figura



Note que a reta  $r$  é formada dos pontos  $(1, y)$ . Um ponto está na reta  $OP_a$  se for da forma  $(k\operatorname{cosa}, k\operatorname{sena})$

No ponto de intersecção devemos ter

$$(k\operatorname{cosa}, k\operatorname{sena}) = (1, y)$$

Logo,  $k = \frac{1}{\operatorname{cosa}}$  e  $y = \frac{\operatorname{sena}}{\operatorname{cosa}} = \operatorname{tga}$ .

Agora:

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{sen}(a + b)}{\operatorname{cos}(a + b)} = \frac{\operatorname{sen} a \operatorname{cos} b + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{cos} a}{\operatorname{cos} a \operatorname{cos} b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

dividindo o numerador e o denominador por  $\operatorname{cos} a \operatorname{cos} b$  obtemos

$$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

como  $\operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{tg} a$  (verifique!)

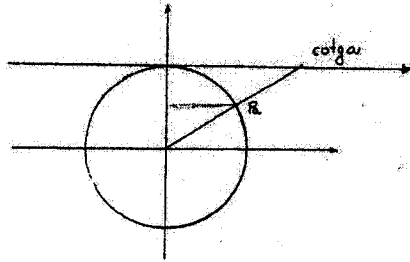
$$\operatorname{tg}(a - b) = \frac{\operatorname{tg} a - \operatorname{tg} b}{1 + \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$$

## COTANGENTE

$$\cotg a = \frac{\cos a}{\operatorname{sen} a}, \quad a \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Das definições

$$\operatorname{tg} a = \frac{1}{\cotg a}, \quad \text{com } a \neq k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi$$



## SECANTE E COSSECANTE

Definimos  $\sec a = \frac{1}{\cos a}$   $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$   $k \in \mathbb{Z}$  e  $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\operatorname{sen} a}$ ,  $a \neq k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

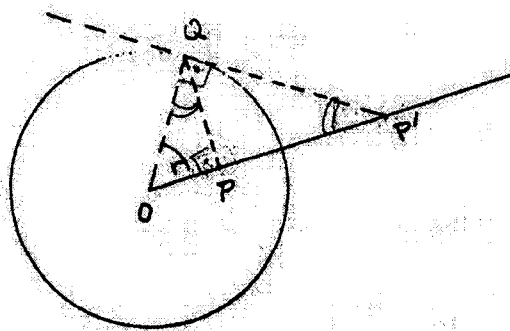
Note que

$$1 + \cotg^2 a = \operatorname{cosec}^2 a \quad \text{e} \quad 1 + \operatorname{tg}^2 a = \sec^2 a.$$

A secante é o inverso do cosseno e a cossecante o inverso do seno.

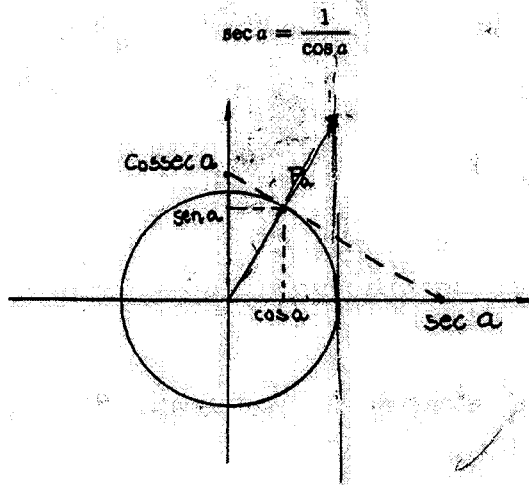
Como determinar geometricamente o inverso de um segmento?

**Problema:** Dado um ponto  $P$  que está a uma distância  $r$  de um ponto fixo  $O$ , determinar um ponto  $P'$  na semi-reta  $\overrightarrow{OP}$  cuja distância é  $\frac{1}{r}$  do ponto  $O$ .



Supondo  $r \leq 1$ , por  $P$ , traçamos uma das semi-retas perpendiculares a  $OP$  que corta o círculo unitário num único ponto  $Q$ . Traçemos a reta tangente ao círculo por  $Q$ . Esta intercepta a reta  $OP$  num ponto  $P'$ . Então,  $\overline{OP'} = \frac{1}{r}$ . De fato, os  $\Delta$ s  $OPQ$  e  $OQP'$  são semelhantes quando  $r < 1$ . Observe que quando  $r = 1$ ,  $P = Q = P'$

Voltando à secante e à cossecante:



**Observação:**

É instrutivo observar que a equação da reta tangente à circunferência, no ponto  $P_a$ , é

$$\cos a \cdot x + \text{sen } a \cdot y = 1$$

Esta reta intercepta o eixo  $x$  ( $y = 0$ ) no ponto  $(x, 0)$  dado por

$$\cos a \cdot x = 1$$

e o eixo  $y$  no ponto  $(0, y)$  dado por  $\text{sen } a \cdot y = 1$ . Obtemos assim  $x = \sec a$  e  $y = \text{cossec } a$

**Exercícios:**

1. Determine:  $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}, \operatorname{tg} \left(-\frac{\pi}{4}\right), \operatorname{tg} \frac{5\pi}{4}$

2. Deduza fórmulas para  $\operatorname{cotg}(a+b)$  e  $\operatorname{cotg}(a-b)$ .

3. Mostre que:

a)  $\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} = \frac{\sec a - 1}{\sec a + 1}$

b)  $\sec(a+b) = \frac{\sec a \sec b}{\operatorname{tg} b - \operatorname{tga}}$

c)  $\operatorname{cossec}(a+b) = \frac{\operatorname{cossec} a \operatorname{cossec} b}{\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b}$