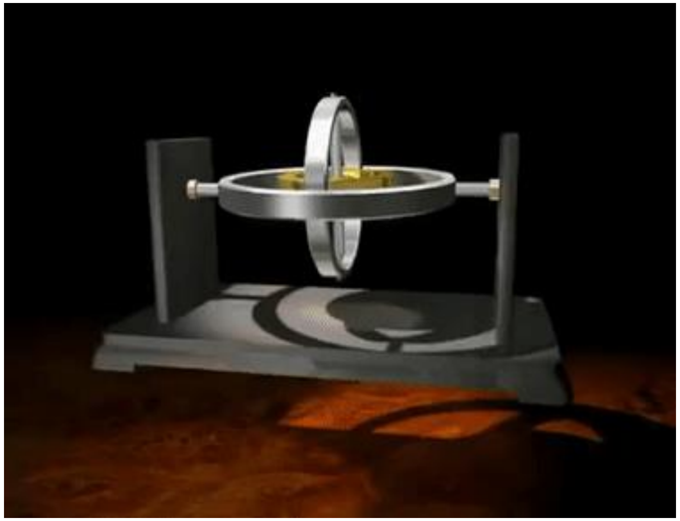
Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Disciplina 4300255

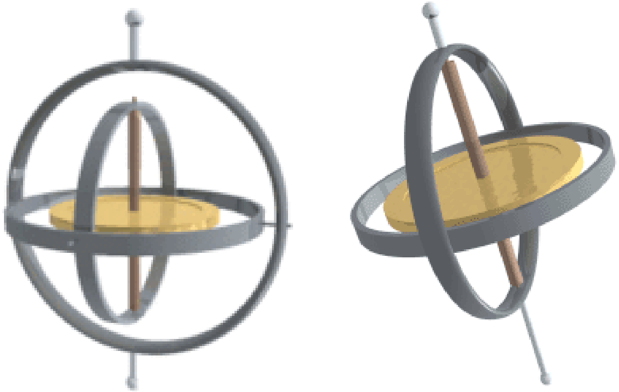
Mecânica dos Corpos Rígidos e dos Fluidos

O movimento de um giroscópio

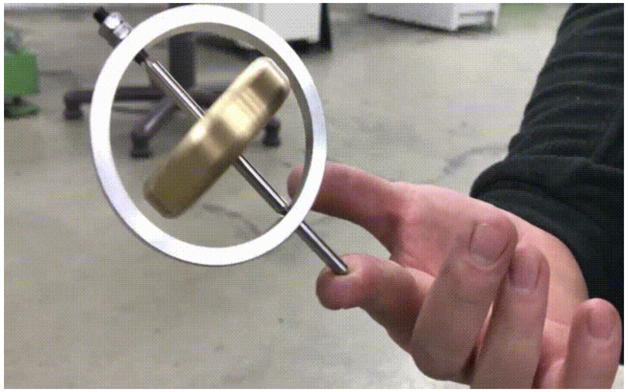
Giroscópio



Uma (ou várias) roda livre para girar em qualquer direção e com uma propriedade de se opor a qualquer tentativa de mudar sua direção original.

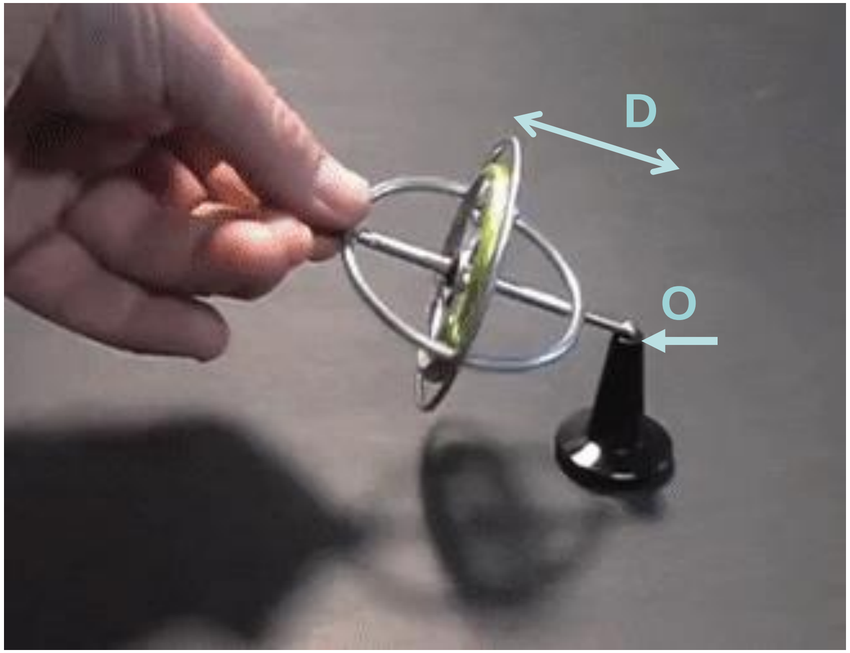


Na ausência de forças que o perturbem, o eixo de rotação mantém sempre a mesma direção



Aparelho que evidencia os efeitos de um movimento de rotação em torno de um eixo que não é fixo.

Giroscópio

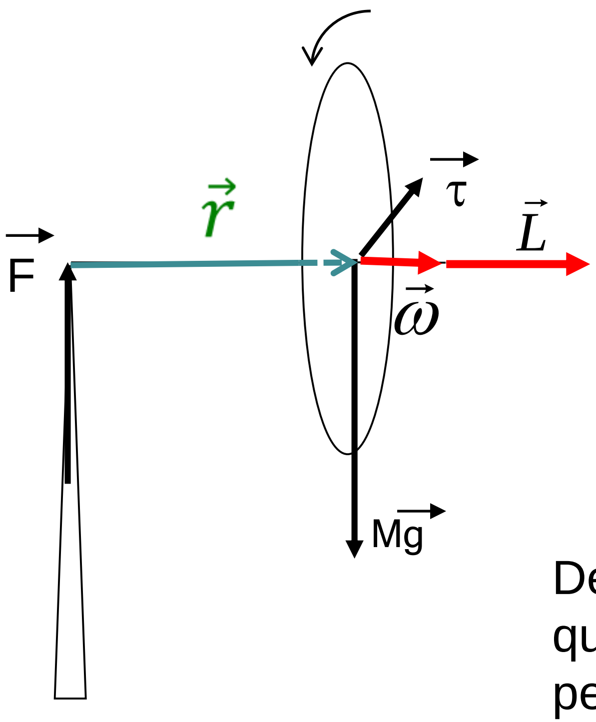


Se apoiarmos (ou suspendermos) num ponto O sobre o eixo de rotação sobre o qual a roda pode girar, a uma distância D do centro da roda, podemos observar que:

Se inicialmente
- A roda não gira, o copo tomba.
- A roda gira, o seu eixo de rotação pode assumir qualquer direção no espaço.

Nosso próximo trabalho será relacionado a este tópico.
http://www.fep.if.usp.br/~fisfoto/rotacao/giroscopioQualitativo/index.php

10. (MERIAM, KRAIGE CAP 7, E 95) Um professor de dinâmica faz uma demonstração dos princípios dos giroscópios aos seus alunos. Ele suspende uma roda que está girando rapidamente através de um fio fixado a uma das extremidades do eixo horizontal da roda. Descreva o movimento de precessão da roda.



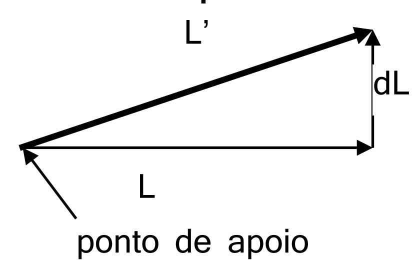
A partir da segunda lei de Newton,

$$\vec{\tau}_{res} = \frac{d\vec{L}}{dt} \Rightarrow d\vec{L} = \vec{\tau}_{res} dt$$

O peso da roda exerce um torque então, esse torque resultante é:

$$\vec{\tau}_{res} = \vec{r} \times M\vec{g}$$

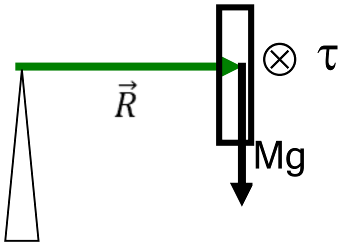
De onde podemos ver que $d\vec{L}$ possui a mesma direção que $\vec{\tau}_{res}$, neste caso, perpendicular ao plano formado pelos vetores peso e $\vec{r}$.



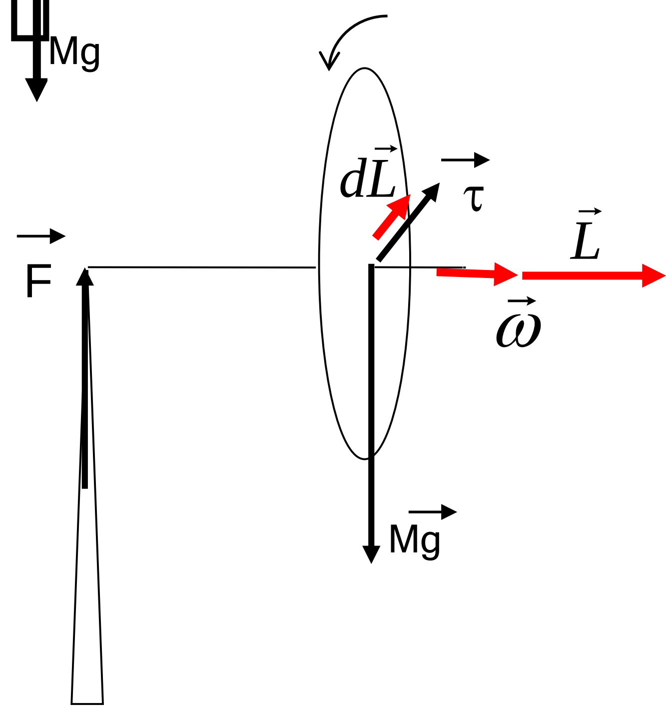
Olhando desde uma posição acima do giroscópio, Dado que a roda está girando em torno do seu próprio eixo, possui velocidade angular $\vec{\omega}$, e como vimos, esse movimento de rotação tem associado um momento angular $\vec{L}$.

Este vetor momento angular é paralelo a $\vec{\omega}$, portanto $\vec{L}$ e $d\vec{L}$ são perpendiculares.

Assim, podemos entender que o efeito do torque do peso é alterar o momento angular da roda de $\vec{L}$ para $\vec{L} + d\vec{L}$, num vetor de mesma intensidade que $\vec{L}$ porém orientado a uma direção levemente distinta.



Assim, como $\vec{L} = I_s \vec{\omega}_s$ onde I_s é a inércia rotacional da roda (do volante) em relação ao seu eixo de rotação (do spin da roda), para descrever o movimento do giroscópio devemos ver como varia o momento angular do “volante” que depende da resultante do torque que atua sobre ela.



Da expressão $$dL = \tau dt = Mgd\, dt$$

onde $\boldsymbol{Mgd}$ é o módulo do torque em relação ao ponto de apoio.

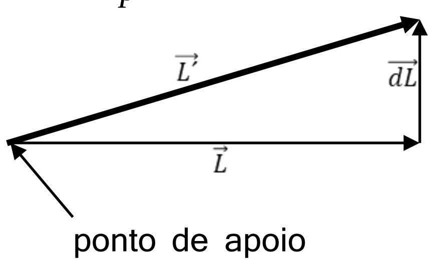
Assim, vimos que o momento angular resultante é a soma de $\vec{L}$ + $d\vec{L}$

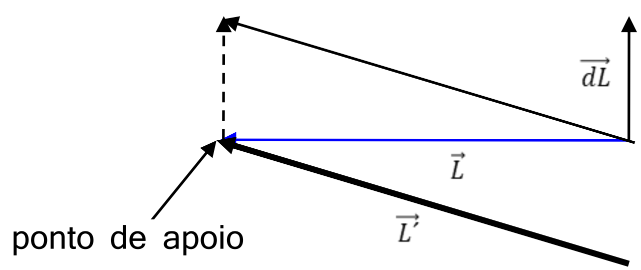
dois vetores em que o ângulo entre eles é $d\phi$ dado por: $$d\phi = \frac{dL}{L} = \frac{Mgd\, dt}{L}$$

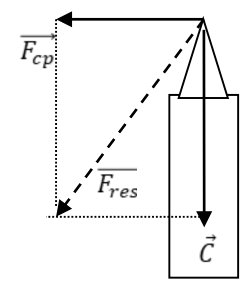
Conseguimos determinar a velocidade angular de precessão pela variação desse ângulo em função do tempo

$$\omega_{precessão} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgd}{L}$$

Cuidado!! A pesar de $d\phi$ poder ser uma grandeza vetorial, na expressão acima, isso **não** pode ser determinado como o quociente de dois vetores. O sentido de rotação de ω_p pode ser calculado da soma de L mais dL, assim







Na base

11. (TIPLER CAP 10, E 64) Uma roda de bicicleta, com 28 cm de raio, está montada no meio de um eixo de 50 cm de comprimento. O pneumático e o aro da roda, em conjunto, pesam 30 N. A roda gira a 12 rev/s, e o eixo está na horizontal, com a ponta apoiada. a) Qual o momento angular do movimento de rotação da roda? (considere a roda como se fosse um aro simples.) b) Qual a velocidade angular de precessão? c) Quanto tempo leva o eixo para dar uma volta de 360º em torno do apoio? d) Qual o momento angular associado ao movimento do centro de massa, isto é, à precessão? Que direção tem esse momento angular?

a)

$$\omega_{roda} = 12 rev/s = 12 \cdot 2 \cdot \pi \ rad/s = 75{,}4 rad/s$$

Unidades : [Massa].[L]²[vel ang.]= $\frac{kg.m^2}{s}$

$$L_{eixo,roda} = I_{roda}\omega_{roda} = MR^2\omega_{roda}$$

$$L_{eixo,roda} = \frac{30}{9{,}8}(0{,}28)^2 75{,}4 = 18{,}1\frac{kg\,m^2}{s}$$

b)

$$\omega_{precessão} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgd}{L}$$

$$\omega_{precesão} = \frac{MgD/2}{L} = \frac{\frac{30}{9{,}8}.9{,}8.0{,}25}{18{,}1} = \frac{30.0{,}25}{18{,}1} = 0{,}41 \ rad/s \equiv 0{,}066 rps \approx 4 rpm$$

c)

$$x = v.t \ e \ \theta = \omega.t \Rightarrow t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{2\pi}{0,414} \frac{rad}{rad/s} = 15,18\,s$$

$$ou \ t = \frac{x}{v} = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi 0,25}{0,103} = 15,25\,s$$

A diferença é devida ao arredondamento de Pi.

d) O momento angular associado ao movimento do centro de massa é:

$$\vec{L} = \vec{R} \times M\vec{v}_{CM}$$

,dado que

$$v_{CM} = R\omega_{precessão}$$

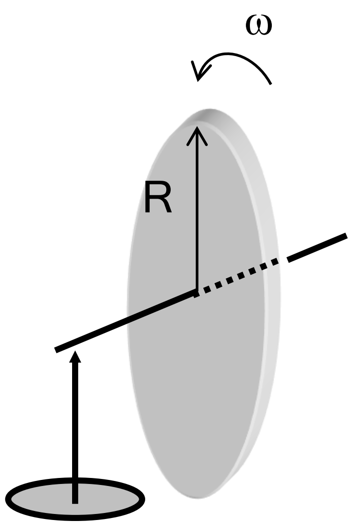
$$L_z = MR^2\omega_p$$

Vemos que a massa da roda se concentra no CM que normalmente estará no centro do eixo no centro da roda se esta for simétrica. A direção de L_p dependerá da direção de ω_p

$$L_p = L_{orbital} = MR^2\omega_p = I\omega_p = Md^2\omega_p = \frac{30}{9,8} 0,25^2 0,41 = 0,078 \frac{kg\,m^2}{s}$$

Sua direção será a perpendicular ao plano orbital e o sentido pela regra da mão direita do movimento de rotação do centro de massa.

12. (TIPLER CAP 10, E 65) Um disco homogêneo, com 2,5 kg e 6,4 cm de raio, está montado no centro de um eixo de 10 cm e gira a 700 rev/min. O eixo está na horizontal e apoiado por uma ponta num suporte em torno do qual pode girar. A outra ponta do eixo tem, no estado inicial, uma velocidade horizontal que propicia a precessão sem nutação. a) Qual a velocidade angular de precessão? b) Qual a velocidade do centro de massa durante a precessão? c) Que módulo e que direção tem a aceleração do centro de massa? d) Quais as componentes vertical e horizontal da força exercida pelo suporte sobre o eixo de rotação?



m_d = 2,5 kg; R = 6,4 cm; longitude do eixo = 10 cm;

a) $$\omega = 700\ rev/\min = \frac{700.2.\pi}{60}\ rad/s = 73{,}3\ rad/s$$

$$\omega_{precessão} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{Mgd}{L} = \frac{Mgd}{I_{disco}\omega_{disco}} = \frac{Mgd}{\frac{1}{2}MR^2\omega_{disco}} = \frac{2.9{,}8.0{,}05}{(0{,}064)^2\,73{,}3} = 3{,}26\ rad/s$$

$$\approx 0{,}5 rps$$

b) $$v_{CM} = \omega r_{CM} = 3{,}26.0{,}05 = 0{,}16\, m/s$$

c) Quando a roda gira no seu movimento de precessão, realiza um movimento uniformemente acelerado e a aceleração do centro de massa é a aceleração centrípeta, assim, o módulo da aceleração do centro de massa é :

$$a_{CM} = \frac{v^2}{R} \qquad a_{CM} = \frac{(0{,}16)^2}{0{,}05} = 0{,}512\,\mathbf{m/s}^2$$

A direção é para o centro do círculo, para o ponto de apoio.