Corrente elétrica

Física III — Aula de 20/04/2020
(Dated: Atualizado em 25/04/2020)

I. CORRENTE ELÉTRICA

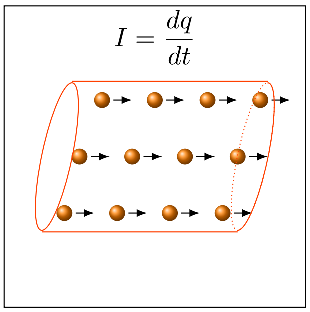


Fig. 1. Corrente elétrica em segmento de fio condutor.

O esquema da Fig. 1 mostra uma imagem idealizada da condução de eletricidade em um fio condutor. Cada pequena esfera representa uma carga elétrica que se desloca com velocidade $\vec{v}$ da esquerda para a direita. No cobre, o condutor mais comum de eletricidade, cada átomo perde um elétron, que passa a se mover sob a ação de um campo elétrico. Ao ceder um elétron, o átomo passa a ser um íon positivo. Os íons vibram em torno de suas posições de equilíbrio, mas em média não se movimentam. A condução é feita pelos elétrons.

Em outras condições, a condução pode ser feita por íons que se movem. Isso acontece, por exemplo, quando corrente elétrica atravessa uma solução de água salgada. Nos metais condutores, porém, o transporte de eletricidade é sempre feito por elétrons.

A ordem na Fig. 1 não é encontrada na realidade. Os elétrons têm velocidades diferentes, tanto em módulo como em direção. Entretanto, em média eles avançam com a mesma velocidade $\vec{v}$, paralela ao eixo do fio. A ilustração nos ajuda a visualizar o que acontece em média.

O fio é longo, e estamos examinando um pequeno segmento, um cilindro que não precisa ser reto. Na figura, o cilindro é oblíquo, com faces planas que não são perpendiculares ao eixo. Para definir a corrente que atravessa o cilindro, podemos considerar a face esquerda ou a direita. Tanto faz. Para definir a corrente elétrica I através da face direita, deixamos passar um intervalo de tempo Δt e medimos a carga Δq que atravessa a face nesse tempo. A corrente é a razão entre Δq e Δt, no limite em que $\Delta t \to 0$:

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{1}$$

A. Unidade

A dimensão da corrente é carga/tempo. A unidade de corrente no Sistema Internacional é o *Ampere*, denotado A:

$$1\mathrm{A} = 1\mathrm{C/s} \tag{2}$$

O Ampere é uma unidade conveniente, para aplicações práticas. A corrente que passa pelos fios dentro das paredes de uma residência típica é da ordem de Amperes. Os disjuntores encontrados na entrada de uma tal residência se desligam automaticamente quando a corrente excede um valor de segurança, que pode ser, por exemplo, 70 A. O carregador de seu celular fornece corrente de 1 A ou 2 A para o aparelho. Uma corrente de 15 mA é suficiente para *grudar* uma pessoa no ponto de contato com um condutor, isto é, suficiente para flexionar os músculos da mão de tal forma que a pessoa não consiga largar o condutor. Uma corrente de 20 mA é suficiente para provocar parada respiratória. Uma corrente de 200 mA através do coração pode provocar *fibrilação*: o coração é feito de músculos que, normalmente, se movimentam em sincronia. Fibrilar significa que os músculos perdem a sincronia, e o coração perde a capacidade de bombear sangue.

B. Sinal da corrente

A corrente elétrica pode ser positiva ou negativa, dependendo do sinal das partículas, chamadas de *portadores*, que atravessam o plano que escolhemos para medi-la e do sentido que adotamos como referência. Na Fig. 1, os portadores são elétrons. A corrente será negativa se adotarmos como referência o sentido da esquerda para a direita e contarmos a carga que atravessa um dos planos nas extremidades dos segmentos. O sinal da corrente, portanto, depende da referência.

Existe, porém, uma situação em que a referência é pré-definida. Uma das razões para se medir ou calcular a corrente é determinar a carga que entra em, ou que sai de, uma superfície fechada. Nesses casos, seguiremos a convenção adotada ao definir o fluxo de um campo: o sentido positivo é o de saída; o sentido de entrada na superfície é negativo. Por exemplo, se estivéssemos interessados na carga que entra no segmento de fio da Fig. 1, contabilizaríamos como positiva a contribuição dos elétrons que entram pela face direita: eles entram (fator negativo), mas têm carga negativa (outro fator negativo). Já a contribuição dos que saem pela face direita seria negativa: os elétrons saem (fator positivo), mas sua carga é negativa (fator negativo). Somadas as duas contribuições, obteríamos zero, o que significa que a carga no interior do segmento de fio não está aumentando nem diminuindo: em média, cada vez que um elétron sai do segmento, outro entra, e o número de elétrons no segmento não varia.

II. DENSIDADE DE CORRENTE

A informação que a corrente elétrica dá é pouco detalhada. Ela mede a taxa de transmissão de carga através de uma superfície, mas não nos conta se a transmissão é uniforme e nem em que direção as cargas se movem. Quando se trata de um fio, como o da Fig. 1, isso pode ser o bastante, mas se a superfície não for plana ou se a distribuição não for uniforme, conhecer a corrente pode ser insuficiente. Por isso, define-se uma grandeza adicional, a partir da qual se pode determinar a corrente.

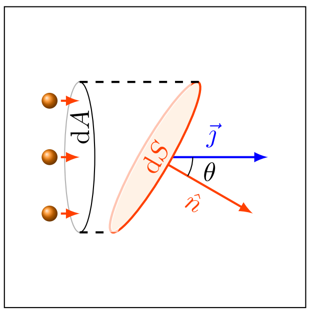


Fig. 2. Densidade de corrente.

A Fig. 2 mostra cargas elétricas que atravessarão uma superfície de interesse, representada pela elipse laranja, de área infinitesimal dS. Para calcular a corrente através de dS, podemos contar as cargas que atravessam a elipse de área dA, que é a projeção de dS no plano perpendicular à velocidade das cargas. Se a carga que atravessar dA num intervalo Δt for Δq, a corrente será

$$\mathrm{d}I = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \tag{3}$$

que é infinitesimal porque a área dA é infinitesimal. A mesma corrente I atravessará a área dS.

De posse dessa informação, podemos agora definir a *densidade de corrente* $\vec{\jmath}$. Definimos $\vec{\jmath}$ como o vetor que tem a *direção* da velocidade das cargas, o *sentido* da velocidade se as cargas forem positiva e o oposto se as cargas forem negativas e *módulo* dado pela razão entre a corrente e a área que os portadores atravessam.

$$|\vec{\jmath}| = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}A}. \tag{4}$$

Uma vez que estamos interessados na elipse de área dS e não na de área dA, é melhor relacionar a densidade de corrente com dS. A Fig. 2 nos ajuda. Como dA é a projeção de dS sobre o plano perpendicular às velocidades, isto é, perpendicular a $\vec{\jmath}$, podemos ver da figura que

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}S\cos(\theta), \tag{5}$$

e como o produto escalar do vetor $\vec{\jmath}$ com o versor $\hat{n}$ é

$$\vec{\jmath}\cdot\hat{n} = |\vec{\jmath}|\cos(\theta), \tag{6}$$

concluímos que

$$\vec{\jmath}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S = |\vec{\jmath}|\mathrm{d}A. \tag{7}$$

Mas, de acordo com a Eq. (4), o produto à direita é simplesmente a corrente infinitesimal dI. Assim, podemos reescrever a Eq. (7) na forma

$$\mathrm{d}I = \vec{\jmath}\cdot\hat{n}\mathrm{d}S. \tag{8}$$

Essa igualdade nos diz que, se conhecermos o vetor $\vec{\jmath}$ num ponto de uma superfície, poderemos calcular a corrente infinitesimal através de uma região infinitesimal em torno daquele ponto. O vetor densidade de corrente $\vec{\jmath}(\vec{r},t)$ nem sempre é uniforme (no espaço) ou constante (no tempo). Ele pode mudar de ponto para ponto e de instante para instante. Entretanto, se conhecermos $\vec{j}$ em todos os pontos da superfície num dado momento, poderemos somar as contribuições do tipo da Eq. (8) para encontrar a corrente através de toda a superfície naquele instante:

$$I(t) = \int_{\mathcal{S}} \vec{j}(\vec{r}, t) \cdot \hat{n} \mathrm{d}S, \tag{9}$$

onde a integral corre toda a superfície $\mathcal{S}$.

A Eq. (9) pode ser resumida numa frase curta: a corrente através de uma superfície $\mathcal{S}$ é o fluxo da densidade de corrente através de $\mathcal{S}$. Esse resultado tem uma consequência imediata muito importante, como veremos a seguir.

A. Equação da continuidade

Sabe-se, experimentalmente, que a carga elétrica é conservada. É impossível criá-la ou destruí-la. Para que a carga elétrica de uma certa região do espaço $\mathcal{V}$ aumente, é necessário que cargas de outras regiões migrem para $\mathcal{V}$. Para que a carga diminua, é necessário que parte dela seja transferida para outras regiões.

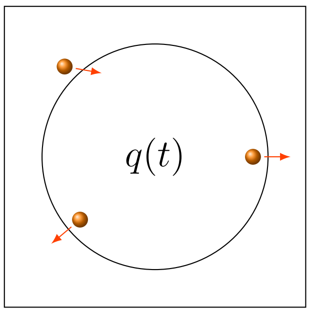


Fig. 3. Cargas que entram e saem de uma região fixa do espaço.

A Fig. 3 nos ajuda a expressar essas noções algebricamente. Ela mostra uma região do espaço delimitada por uma superfície $\mathcal{S}$. A ilustração mostra uma superfície esférica, mas a discussão a seguir independe do formato. Como há portadores entrando e saindo da esfera, a carga no interior da superfície é uma função do tempo, $q = q(t)$. Podemos, portanto, calcular a corrente através da superfície:

$$I_{\mathcal{S}} = -\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}. \tag{10}$$

O sinal negativo respeita a convenção que atribui valor positivo à corrente devida a cargas que saem de uma região fechada. Quando sai carga, $q(t)$ diminui, o que significa que $dq/dt < 0$. O sinal na Eq. (10) garante que a corrente seja positiva. Quando, ao contrário, entra carga na esfera, q aumenta e dq/dt se torna positiva. Nesse caso, o sinal no lado direito da Eq. (10) faz com que $I_{\mathcal{S}} < 0$, conforme recomenda a convenção.

A carga dentro da superfície $\mathcal{S}$ pode ser computada a partir da densidade volumétrica de carga dentro dela:

$$q(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\vec{r}, t)\, \mathrm{d}V, \tag{11}$$

onde $\mathcal{V}$ é o volume envolvido pela superfície $\mathcal{S}$.

A partir das Eqs. (10) e (11), podemos calcular a corrente através da superfície $\mathcal{S}$:

$$I_{\mathcal{S}} = -\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \rho}{\partial t}\, \mathrm{d}V. \tag{12}$$

Podemos também empregar a Eq. (9) para calcular a mesma corrente. E podemos aproveitar o teorema de Gauss, que demonstramos quando discutimos o fluxo do campo elétrico. Segundo aquele teorema, o fluxo de um vetor através de uma superfície é igual à integral do divergente do mesmo vetor no volume delimitado pela superfície. No caso do vetor densidade de corrente, significa que

$$\int_{\mathcal{S}} \vec{j} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}\, \mathrm{d}V, \tag{13}$$

e segue da Eq. (9) que

$$I_{\mathcal{S}} = \int_{\mathcal{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{j}\, \mathrm{d}V. \tag{14}$$

Basta agora comparar a Eq. (14) com a Eq. (12) para vermos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \tag{15}$$

resultado que deve valer em qualquer ponto do espaço, visto que a superfície $\mathcal{S}$ e, portanto, o volume $\mathcal{V}$ são arbitrários.

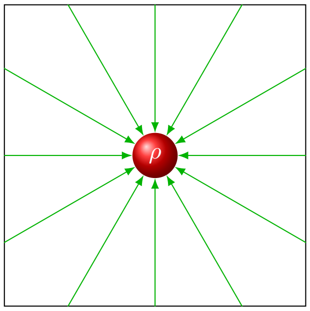


Fig. 4. Linhas de campo da densidade de corrente $\vec{\jmath}$ (verde) e acúmulo na densidade de carga ρ (vermelho).

A Eq. (15) é conhecida como a *equação da continuidade*. Podemos aproveitar nossa experiência com o campo elétrico para interpretá-la geometricamente. A densidade de corrente é uma grandeza vetorial que depende da posição. É, portanto, um campo, e pode ser representada por linhas de campo, que são conhecidas por *linhas de corrente*. A Fig. 4 mostra um exemplo. As setas verdes representam as linhas de corrente em uma certa região do espaço. As linhas convergem para um mesmo ponto. Conforme aprendemos ao discutir o campo elétrico, as linhas de campo desaparecem nos pontos onde a divergência do campo é negativa. Concluímos que, na região representada por uma esfera vermelha na figura, a divergência de $\vec{\jmath}$ é negativa. De acordo com a Eq. (15), portanto, a densidade de carga deve crescer na esfera.

Podemos chegar à mesma conclusão por raciocínio físico. Suponhamos que os portadores na Fig. 4 sejam positivos. As linhas verdes indicam que eles estão sendo transportados para o ponto central, de todos os pontos em torno dele. Consequentemente, haverá acúmulo de carga na região da esfera vermelha, e a densidade crescerá continuamente.

Alternativamente, se os portadores forem negativos, as linhas verdes mostram que eles estão fugindo da esfera vermelha. Isso significa que a esfera está ficando cada vez mais positiva; sua carga, portanto, está crescendo.

Em qualquer um desses casos, o transporte de carga retratado na figura tende a durar pouco, porque o acúmulo de cargas na esfera vermelha irá gerar um campo elétrico dirigido para fora, que tende a empurrar os portadores na direção radial e sentido de dentro para fora. Com o correr do tempo, o campo acabará anulando a densidade de corrente. Veremos mais sobre isso na aula de 27 de abril.

B. Regime estacionário

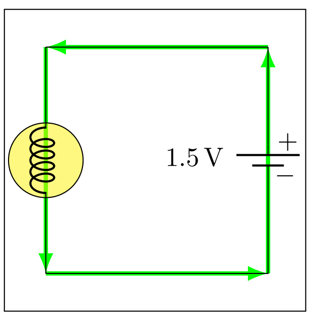


Fig. 5. Linha de corrente que se fecha sobre si mesma. As setas verdes mostram a linha de corrente ao longo do circuito.

Um caso particular da Eq. (15) merece atenção. Quando se perturba uma distribuição de cargas, o campo elétrico muda, e as cargas tendem a se movimentar. O que acontece em seguida depende da situação, mas, frequentemente, o movimento gera um nova configuração que não mais muda com o tempo. Isso acontece, por exemplo, quando alguém acende os faróis de um automóvel: rapidamente, começa a correr uma corrente constante pelas lâmpadas dos faróis.

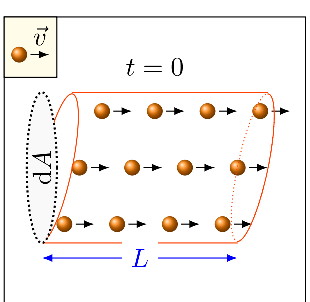
Depois do movimento inicial, a densidade de carga ρ deixa de mudar com o tempo, e $\partial\rho/\partial t$ se anula. Dizemos que as cargas e correntes entraram em *regime estacionário*, no qual as grandezas físicas independem do tempo. De acordo com a Eq. (15), então,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{\jmath} = 0. \tag{16}$$

Isso significa que as linhas de campo da densidade de corrente não podem ter começo nem fim. É o que acontece com as linhas de força de $\vec{E}$, na ausência de densidade de carga. No caso do campo eletrostático, se o divergente for nulo no espaço todo, o campo será necessariamente nulo, já que $\vec{\nabla}\times\vec{E} = 0$. Já quando se trata da densidade de corrente, nem sempre o rotacional é nulo. Significa que as linhas de corrente podem fechar-se sobre si mesmas.

A Fig. 5 mostra um exemplo. As linhas pretas representam um circuito elétrico, formado por uma bateria (símbolo à direita), uma elâmpada (símbolo à esquerda) e os fios que as unem. Como o circuito está fechado, corre uma corrente elétrica que acende a lâmpada. As setas verdes representam a linha de corrente. Como não há acúmulo de carga em ponto nenhum do circuito, a derivada $\partial\rho/\partial t$ é nula, o divergente de $\vec{\jmath}$ é nulo, e a a linha de corrente se fecha sobre si mesma.

C. Significado microscópico da densidade de corrente



A Fig. 7 mostra um segmento cilíndrico de um condutor. O segmento é muito menor do que o condutor, tanto em seu comprimento como na dimensão lateral: a seção transversal é infinitesimal. A figura mostra a carga em movimento que se encontra no segmento num instante inicial $t = 0$. Como na Seção II, para simplificar, vamos imaginar que todos os portadores se movem com a mesma velocidade $\vec{v}$, e que a densidade volumétrica carga ρ dos portadores dentro do segmento é uniforme. Por construção, o eixo do segmento cilíndrico é paralelo a $\vec{v}$.

Podemos então calcular a carga Δq contida no segmento. O volume do pequeno cilindro é $\mathrm{d}V = L\mathrm{d}A$, onde $\mathrm{d}A$ é a seção reta do cilindro, perpendicular à velocidade. A carga é, portanto,

$$\Delta q = \rho L \mathrm{d}A. \tag{17}$$

Depois de um intervalo de tempo $\Delta t = L/v$, todas os portadores terão tido tempo para atravessar o segmento, como mostra a Fig. 8. Uma vez que todos eles atravessaram a face direita do segmento, podemos agora calcular a corrente $\mathrm{d}I$ através daquela face:

$$\mathrm{d}I = \frac{\Delta q}{\Delta t}, \tag{18}$$

ou seja,

$$\mathrm{d}I = \frac{\rho L \mathrm{d}A}{\Delta t}. \tag{19}$$

E, como $L/\Delta t = v$, a Eq. (19) pode ser escrita na forma

$$\mathrm{d}I = \rho v \mathrm{d}A. \tag{20}$$

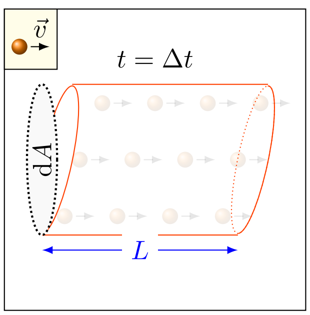


Fig. 8. O cilindro da figura anterior depois de um tempo Δt, tal que todas os portadores antes no interior do segmento tenham tido tempo para percorrê-lo. As cargas que entram em seu lugar são representadas por pequenas esferas opacas.

Podemos agora voltar ao raciocínio que, com apoio da Fig. 2, conduziu à Eq. (8). A superfície $\mathrm{d}S$, do condutor, e a seção reta são relacionadas pela Eq. (5), que pode ser escrita na forma equivalente

$$v\mathrm{d}A = \vec{v} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S, \tag{21}$$

pois o ângulo entre o vetor $\vec{v}$ e o versor normal à superfície $\hat{n}$ é $\cos\theta$. Com isso, a Eq. (20) assume a forma

$$\mathrm{d}I = \rho \vec{v} \cdot \hat{n}\, \mathrm{d}S. \tag{22}$$

A comparação com a Eq. (8) mostra que a densidade de corrente é proporcional à velocidade:

$$\vec{j} = \rho \vec{v}. \tag{23}$$

A Eq. (23) mostra que, quando os portadores são positivos, a densidade de corrente é no sentido da velocidade. Quando eles são negativos, $\vec{j}$ é no sentido oposto à velocidade. Como os portadores, na maioria dos casos, são elétrons, a densidade de corrente avança no sentido oposto. Isso não é motivo para preocupação e nem tem, em si, consequências importantes. Apenas indica que, para estudar a eletricidade, devemos focalizar nossa atenção na densidade de corrente, e não na velocidade dos portadores.

A proporcionalidade entre densidade de corrente e velocidade expressa na Eq. (23) encontra um análogo no trânsito rodoviário. Numa estrada de duas pistas, como a Washington Luis ou a Bandeirantes, o fluxo de veículos em cada sentido é limitado pelo número de faixas em cada pista. Cada faixa de trânsito pode dar vazão a até mil veículos por hora.

Um dado fluxo de automóveis pode ser conseguido de duas formas: carros a alta velocidade e bem separados um do outro ou carros que andam lentamente e estão bem próximos um do outro. No primeiro caso, a velocidade é alta, mas a densidade (carros por metro) é pequena. No segundo — um engarrafamento — a velocidade é baixa, mas em compensação a densidade é muito grande. O fluxo é o produto da densidade pela velocidade.

Na eletricidade, a Eq. (23) é muito importante. Vejamos um exemplo simples: ela permite estimar a velocidade média com que os elétrons se movimentam em um fio de cobre que alimenta uma lâmpada elétrica. Um fio desses, em uma residência, tem tipicamente seção reta de $1\,\mathrm{mm}^2$. Entre os eletricistas, essa área é conhecida como *bitola* do fio. As normas técnicas permitem usar a bitola de $1\,\mathrm{mm}^2$ para correntes de até 12 A. Por uma lâmpada fluorescente de 15 W, que pode ser encontrada em supermercados, passa corrente de aproximadamente 0.12 A, bem abaixo do limite. De posse desses dados podemos facilmente estimar a densidade de corrente:

$$j = \frac{0.12\,\mathrm{A}}{1\,\mathrm{mm}^2}. \tag{24}$$

Levando em conta que $1\,\text{mm}^2 = 1\times 10^{-6}\,\text{m}^2$, podemos concluir que a densidade é $j = 1.2\times 10^5\,\text{A/m}^2$. Precisamos agora da densidade eletrônica ρ. A massa de um mol de cobre, que contém 6.0×10^{23} átomos, é, aproximadamente, $6.4\times 10^{-3}\,\text{kg}$. A massa de um átomo de cobre é, portanto,

$$m_{\text{Cu}} = \frac{6.4\times 10^{-3}\,\text{kg}}{6.0\times 10^{23}} = 1.1\times 10^{-26}\,\text{kg}. \tag{25}$$

A densidade (massa/volume) do cobre é aproximadamente $9.0\times 10^3\,\text{kg/m}^3$. De posse desse dado, podemos calcular o número de átomos por unidade de volume:

$$\mathcal{N}_{\text{Cu}} = \frac{9.0\times 10^3\,\text{kg/m}^3}{1.1\times 10^{-26}\,\text{kg}} = 8.2\times 10^{29}\,/\text{m}^3. \tag{26}$$

Como cada átomo libera um elétron para condução e como a carga do elétron é $1.6\times 10^{-19}\,\text{C}$, podemos obter a densidade de volumétrica de carga:

$$\rho = \mathcal{N}_{\text{Cu}} 1.6\times 10^{-19}\,\text{C} = 1.31\times 10^{11}\,\text{C/m}^3. \tag{27}$$

E agora, da Eq. (23), podemos calcular a velocidade média dos elétrons:

$$v = \frac{1.2\times 10^5\,\text{A/m}^2}{1.31\times 10^{11}\,\text{C/m}^3} = 9.5\times 10^{-7}\,\text{m/s}. \tag{28}$$

Essa velocidade, de alguns milímetros por hora, é muito baixa. Mesmo que a corrente fosse o máximo (12 A) que o fio suporta, ela não chegaria a um metro por hora. Essa não é a velocidade com que a corrente elétrica se propaga. Quando um condutor começa a transmitir eletricidade, a densidade de corrente se distribui, quase que instantaneamente, em todo o material. É como uma fila de cinema, que começa a se mover quando as portas se abrem. Suponhamos que a fila tenha cinquenta metros e que cada pessoa avance com velocidade de meio metro por segundo. A última pessoa da fila vai levar cem segundos para chegar à porta, mas isso não quer dizer que ninguém vá entrar no cinema durante esse tempo.

Analogamente, a densidade de corrente passa rapidamente a percorrer todo o condutor quando começa a circular corrente num fio, ainda que a velocidade média dos elétrons seja pequena. Isso entendido, ainda precisamos saber por que a velocidade é baixa. A essa questão voltaremos na aula de 27 de abril.