Teorema do Limite Central

Aula de Probabilidade 21/04/2020

Nestor Caticha - IFUSP

Somas de Variáveis aleatórias

Determinar a distribuição/densidade de prob.

- X_i uma variável aleatória
- $P(X_i = x_i \,|\, I_i)$. com distribuição conhecida

μ_x

σ_x^2

$$Y_N = \sum_{i}^{N} X_i$$

$$Y_N = \sum_i^N X_i$$

$Y_1 = X_1$

$Y_2 = X_1 + X$

- Qual é a distribuição de Y_N?

Problema geral de importância fundamental

$P(Y_N | I_1^N)$ onde $I_1^N = I_1 \wedge I_2 \wedge \ldots \wedge I_N$

Caso simples : IID

$$Y_N = \sum_i^N X_i, \quad P(Y_N \mid I_1^N) \quad I_1^N = I_1 \wedge I_2 \wedge \ldots \wedge I_N$$

Caso simples : IID Independentes Identicamente distribuídas

indep.

$$P(X_i \mid \{X_k\}_{k \neq i} I_1^N) = P(X_i \mid I_i)$$

ident distrib

$$P(X_j = x \mid I_j) = P(X_i = x \mid I_i)$$

$$\forall i, j$$

$$Y_N = \sum_i^N X_i, \quad \boxed{P(Y_N \mid I_1^N)} \quad I_1^N = I_1 \wedge I_2 \wedge \ldots \wedge I_N$$

Caso simples : IID Independentes Identicamente distribuídas

$$P(X_i \mid \{X_k\}_{k \neq i} I_1^N) = P(X_i \mid I_i)$$

$$P(X_j = x \mid I_j) = P(X_i = x \mid I_i) := p(x)$$

$$\forall i, j$$

Marginalização

[Regra da Soma Lógica]

$$P(Y_N | I_1^N) = \int P(Y_N, X_1, \ldots X_N | I_1^N) dX_1 dX_2 \ldots dX_N$$

Note: $Y_N = \sum X_i$: $y_N = \sum x_i$

Soma Aritmética

$\int P(Y, X | I) dX = P(Y | I)$ Soma Lógica

Marginalização [Regra da Soma Lógica]

$$P(Y_N|I_1^N) = \int P(Y_N, X_1, \ldots X_N|I_1^N)dX_1dX_2\ldots dX_N$$

$$P(Y_N|I_1^N) = \int \underbrace{P(X_1, \ldots X_N|I_1^N)P(Y_N|X_1\ldots X_N, I_1^N)}_{\text{Regra do produto Lógico}}dX_1dX_2\ldots dX_N$$

IID

$$P(Y_N | I_1^N) = \int P(Y_N, X_1, \ldots X_N | I_1^N) dX_1 dX_2 \ldots dX_N$$

$$P(Y_N | I_1^N) = \int P(X_1, \ldots X_N | I_1^N) P(Y_N | X_1 \ldots X_N, I_1^N) dX_1 dX_2 \ldots dX_N$$

$$P(X_1, \ldots X_N | I_1^N) = \prod_i^N P(X_i | I_i)$$

Independência

$$P(X_1 = x_1, \ldots X_N = x_N | I_1^N) = \prod_i p(x_i)$$

Igual/ Dist.

função conhecida

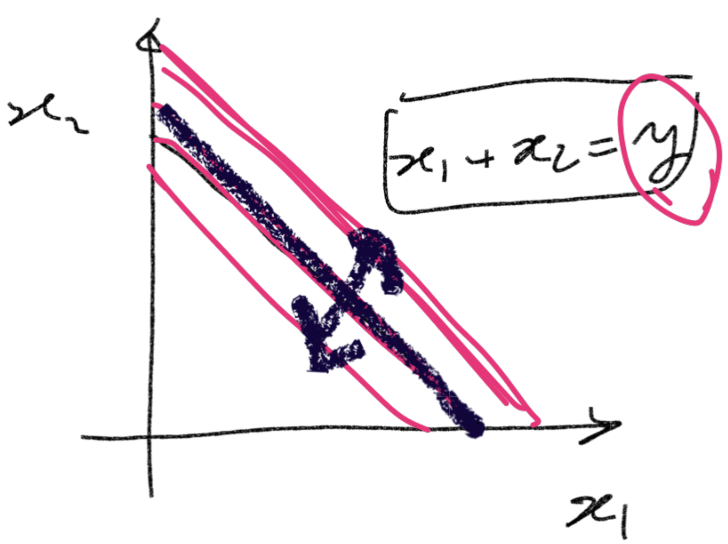
(membro de uma família)

$$P(Y_N|I_1^N) = \int P(X_1, \dots X_N|I_1^N)P(Y_N|X_1\dots X_N, I_1^N)dX_1dX_2\dots dX_N$$

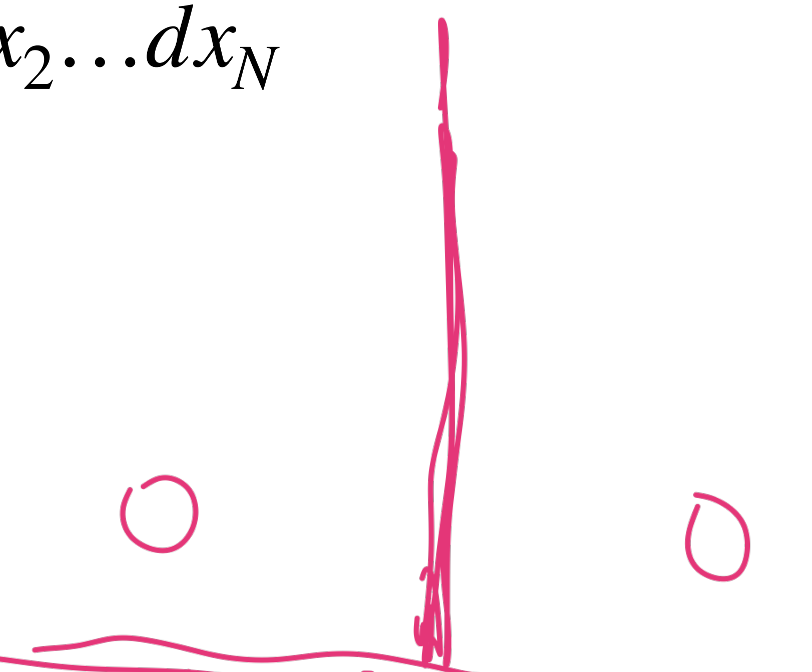
$$P(Y_N|I_1^N) = \int \prod_i^N p(x_i)P(Y_N = y_N|x_1\dots x_N, I_1^N)dx_1dx_2\dots dx_N$$

Integral de Riemann

$$P(Y_N = y_N|I_1^N) = \int \prod_i^N p(x_i)\delta(y_N - \sum x_i)dx_1dx_2\dots dx_N$$



$$Y_N = \sum_{i=1}^{N} x_i$$



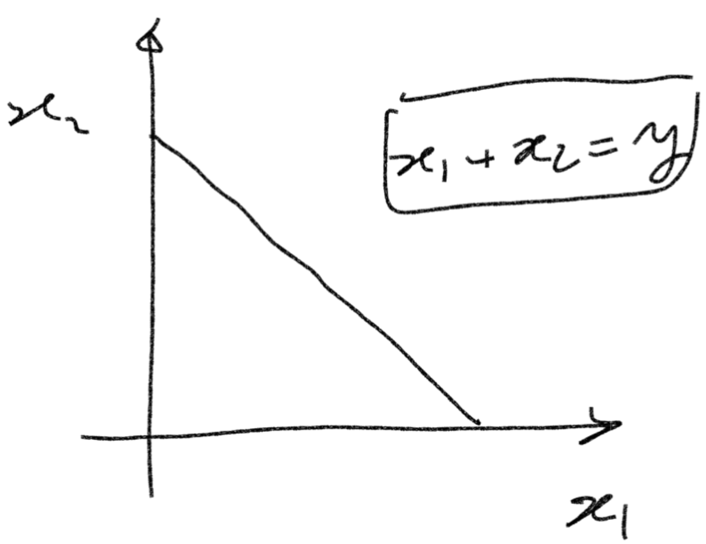
$$y_N \neq \sum X_i$$

$$P(Y_N | I_1^N) = \int P(X_1, \ldots X_N | I_1^N) P(Y_N | X_1 \ldots X_N, I_1^N) dX_1 dX_2 \ldots dX_N$$

$$P(Y_N | I_1^N) = \int \prod_i^N p(x_i) P(Y_N = y_N | x_1 \ldots x_N, I_1^N) dx_1 dx_2 \ldots dx_N$$

Integral de Riemann

$$P(Y_N = y_N | I_1^N) = \int \prod_i^N p(x_i) \delta(y_N - \sum x_i) dx_1 dx_2 \ldots dx_N$$



$$Y_N = \sum_{i=1}^{N} x_i$$

Entendido como limite de sequência

Delta Dirac

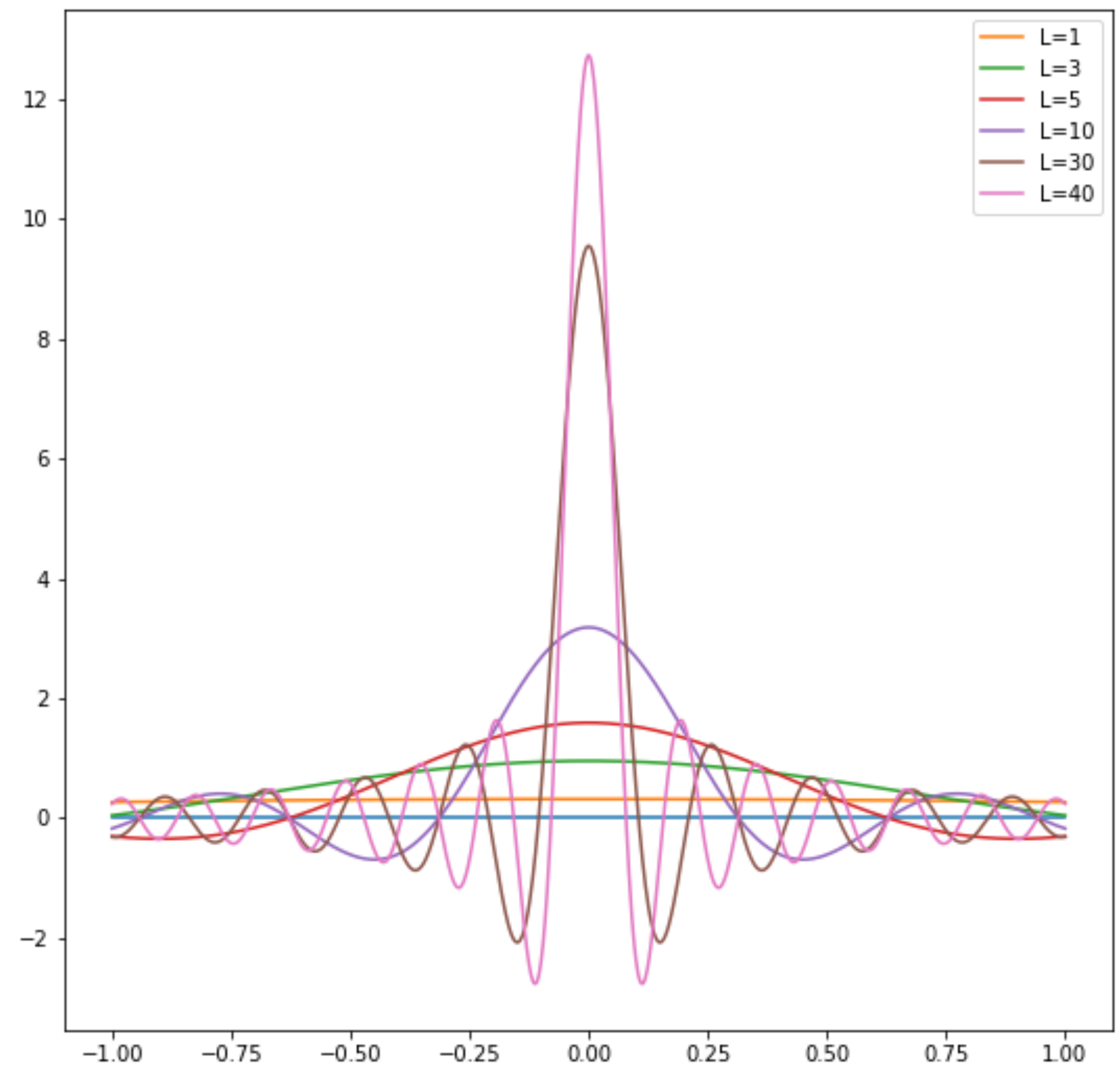
$$P(Y_N = y_N | I_1^N) = \int \prod_i^N p(x_i)\delta(y_N - \sum x_i) dx_1 dx_2 \ldots dx_N$$

DELTA DE DIRAC

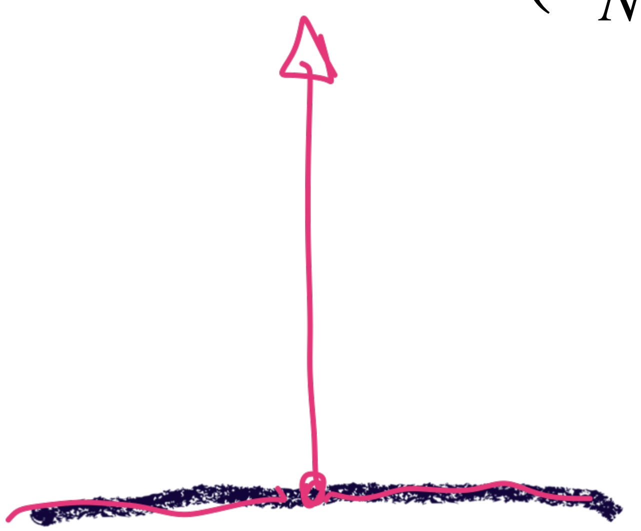
$$\boxed{\delta(x) = \lim_{L\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^{L} e^{ikx} dk}$$

$$e^{ikx} = \boxed{\cos kx} + i\, \boxed{\operatorname{sen} kx}$$

$$\delta_L(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} e^{ikx}dk = \frac{1}{x\pi}\sin Lx$$



$$P(Y_N = y_N | I_1^N) = \int \prod_i^N p(x_i)\underline{\delta(y_N - \sum x_i)}dx_1 dx_2 \ldots dx_N$$



DELTA DE DIRAC

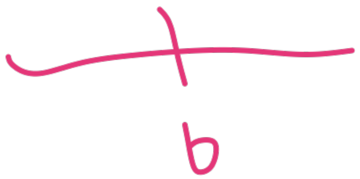
$$\boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk}$$

Representação de Fourier

|| Integral

Há outras representações (mas não agora)

DELTA DE DIRAC



$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dk$$

Tem "sentido" dentro de integrais (Manipulação Formal).

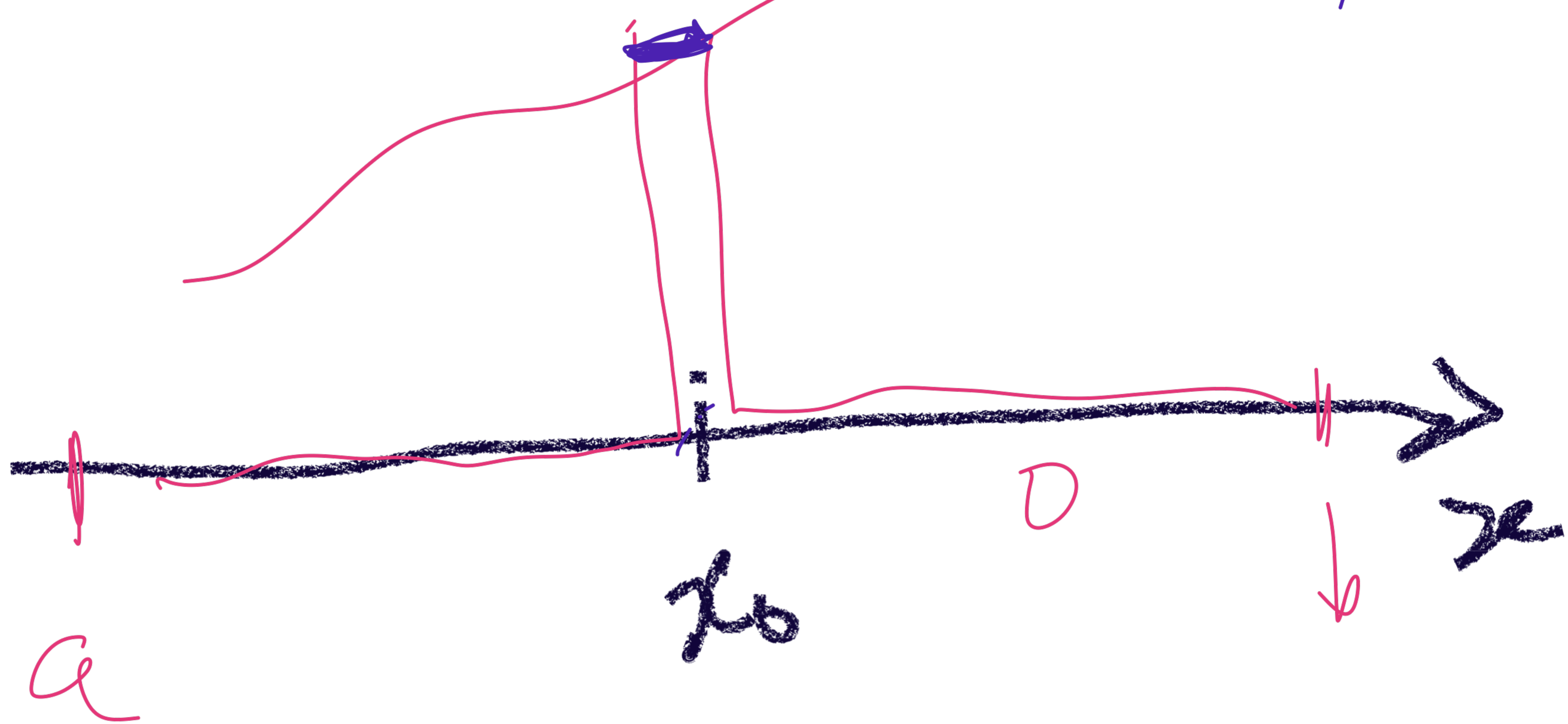
$$\delta(x) = 0 \quad \text{se} \quad x \neq 0$$

$$\int_a^b \delta(x)\,dx = 1, \quad -a, b > 0$$

$$\boxed{f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\,dx}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f(x)\,\underbrace{\delta(x-x_0)}_{0}\,dx = f(x_0)\underbrace{\int \delta(x-x_0)\,dx}_{1}$$

$x_0 \pm \varepsilon$



DELTA DE DIRAC

Fourier

$$\boxed{\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}\,dk}$$

Se isto for "verdade"

$\delta(x) = 0$ se $x \neq 0$

$\int_a^b \delta(x)\,dx = 1$, $a, b > 0$

$$\boxed{f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x - x_0)\,dx}$$

Transformada de Fourier

Dado $f(x)$ suficientemente bem comportada

Defina:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Então

f, g

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

Transformada de Fourier

Se:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Então

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

Substitui:

$$? = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right) e^{ikx} dk$$

Transformada de Fourier

Se:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Então

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

Substitui:

$$? = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right)}_{g(k)} e^{ikx} dk$$

por definição

?

Transformada de Fourier

Se:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'}dx'$$

Então

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k)e^{ikx}dk$$

Substitui:

$$h(x)\ ? = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x')e^{-ikx'}dx' \right) e^{ikx}dk$$

Troca ordem de Integração

Transformada de Fourier

Se:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Então

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

Substitui:

$$? = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x') e^{-ikx'} dx' \right) e^{ikx} dk$$

$$? = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x'-x)} dk \right) dx$$

$\delta(x'-x)$

Transformada de Fourier

Se:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Então

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

$$? = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x'-x)} dk \right) dx$$

$$? = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \quad \delta(x' - x) dx$$

Transformada de Fourier

Se:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Então

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

$$? = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(x'-x)} dk \right) dx'$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x') \;\; \delta(x'-x) dx'$$

Análise Harmônica

Transformada de Fourier

Se:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Então

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

- Isto pode ser provado de verdade
- Para que classe de funções?
- Função delta, troca de ordem de integração?

Transformada de Fourier

Se:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Então

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

- Isto pode ser provado de verdade
- Para que classe de funções?
- Função delta, troca de ordem de integração?

Brincadeira?

Não, dá mais trabalho

Transformada de Fourier

Se:

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Então

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

- Isto pode ser provado de verdade
- Para que classe de funções?
- Função delta, troca de ordem de integração?

Brincadeira?

Não, dá mais trabalho

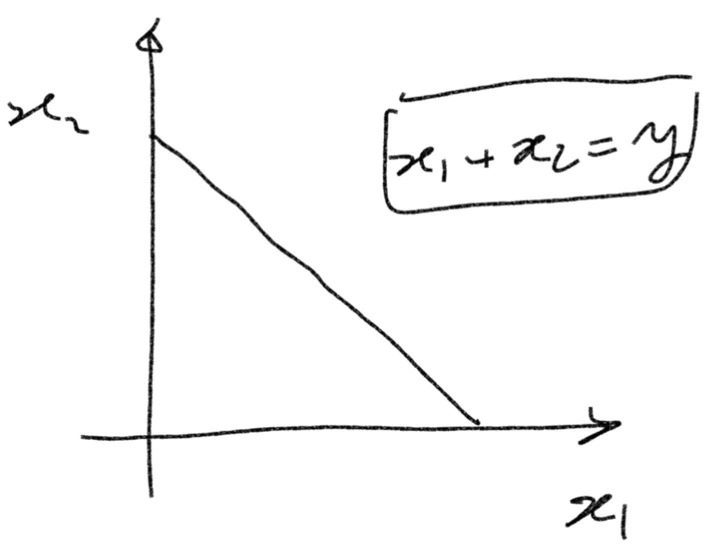
Djairo Figueiredo
Análise de Fourier e EDP.
Ed. Soc. Br. Matemática

$$\left\{ P(Y_N | I_1^N) = \int P(X_1, \ldots X_N | I_1^N) P(Y_N | X_1 \ldots X_N, I_1^N) dX_1 dX_2 \ldots dX_N \right.$$

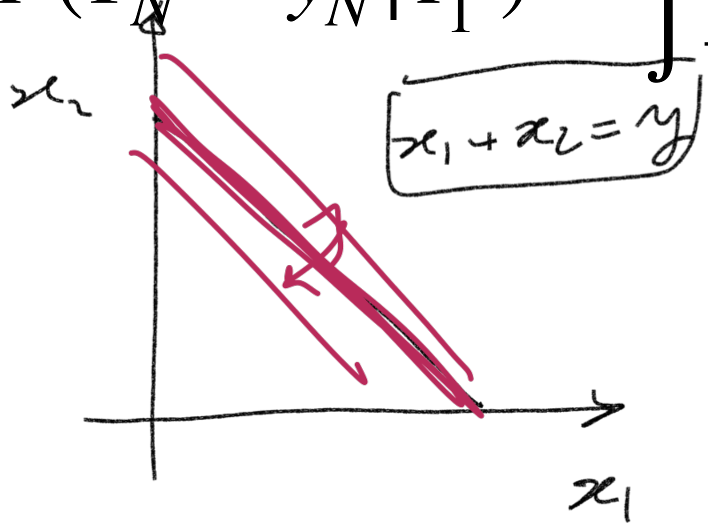
$$P(Y_N | I_1^N) = \int \prod_i^N p(x_i) \underbrace{P(Y_N = y_N | x_1 \ldots x_N, I_1^N)} dx_1 dx_2 \ldots dx_N$$

Integral de Riemann

$$P(Y_N = y_N | I_1^N) = \int \prod_i^N p(x_i) \underbrace{\delta(y_N - \sum x_i)}_{Y_N = \sum_{i=1}^{N} x_i} dx_1 dx_2 \ldots dx_N$$



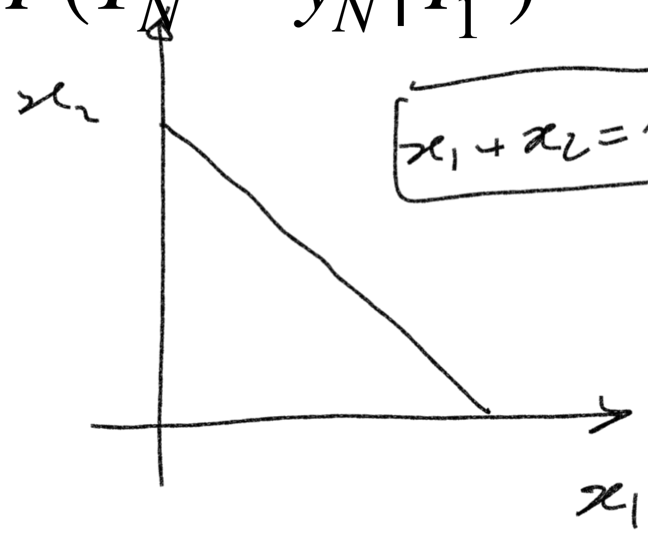
$$P(Y_N = y_N \,|\, I_1^N) = \int \prod_i^N p(x_i)\underbrace{\delta(y_N - \sum x_i)}_{Y_N = \sum_{i=1}^{N} x_i} dx_1 dx_2 \dots dx_N$$



$N = 2$

$$P(Y_2 = y_2 \,|\, I_1^2) = \int \underline{p(x_1)}\,\underline{p(x_2)}\,\underbrace{\delta(y_2 - x_1 - x_2)}_{\int e^{ik(y_2 - x_1 - x_2)} \frac{dk}{2\pi}} dx_1 dx_2$$

$$P(Y_N = y_N \mid I_1^N) = \int \prod_i^N p(x_i)\,\delta(\underbrace{y_N - \sum x_i}_{Y_N = \sum_{i=1}^{N} x_i})\,dx_1 dx_2 \dots dx_N$$



$\boxed{x_1 + x_2 = y}$

$$N = 2$$

$$P(Y_2 = y_2 \mid I_1^2) = \int p(x_1)\, p(x_2)\, \underbrace{\delta(y_2 - x_1 - x_2)}_{\int e^{ik(y_2 - x_1 - x_2)} \frac{dk}{2\pi}}\, dx_1\, dx_2$$

$$= \int \left[\int p(x_1) e^{-ikx_1} \frac{dx_1}{\sqrt{2\pi}}\right] \left[\int p(x_2) e^{-ikx_2} \frac{dx_2}{\sqrt{2\pi}}\right] e^{iky_2}\, dk$$

Função característica

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-ikx} dk$$

Função característica

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-ikx} dx$$

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k) e^{ikx} dk$$

Função característica

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{-ikx} dk$$

$$P(Y_N = y_N | I_1^N) = \int \prod_i^N p(x_i) \delta(y_N - \sum x_i) dx_1 dx_2 \ldots dx_N$$

- N=2: Calcula a característica de $P(Y_2 = y_2 | I_1^2)$
- Escreve $p(x_i)$ em termos da função característica

Função característica

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$\Phi(k) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{-ikx}dk$$

$$P(Y_2 = y_2 \,|\, I_1^2) = \int \prod_{i=1}^{2} p(x_i)\delta(y_2 - \sum x_i)dx_1dx_2$$

- N=2: Calcula a característica de $P(Y_2 = y_2 \,|\, I_1^2)$
- Escreve $p(x_i)$ em termos da função característica

Função característica

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$P(Y_2 = y \mid I_1^2) = \int \prod_{i=1}^{2} p(x_i)\delta(y - \sum x_i)\boxed{dx_1 dx_2}$$

$$P(Y_2 = y \mid I_1^2) = \int \{ \int \frac{dk_1}{2\pi}\phi(k_1)e^{ik_1x_1}\}\{ \int \frac{dk_2}{2\pi}\phi(k_2)e^{ik_2x_2}\}\delta(y - \sum x_i)dx_1dx_2$$

$$P(Y_2 = y \mid I_1^2) = \int \frac{dk_1}{2\pi}\frac{dk_2}{2\pi}dx_1dx_2\phi(k_1)e^{ik_1x_1}\phi(k_2)e^{ik_2x_2}\delta(y - \sum x_i)$$

Função característica

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$P(Y_2 = y \,|\, I_1^2) = \int \prod_{i=1}^{2} p(x_i)\delta(y - \sum x_i)dx_1dx_2$$

$$P(Y_2 = y \,|\, I_1^2) = \int \{ \int \frac{dk_1}{2\pi}\phi(k_1)e^{ik_1x_1}\}\{ \int \frac{dk_2}{2\pi}\phi(k_2)e^{ik_2x_2}\}\delta(y - \sum x_i)dx_1dx_2$$

$$P(Y_2 = y \,|\, I_1^2) = \int \frac{dk_1}{2\pi}\frac{dk_2}{2\pi}dx_1dx_2\phi(k_1)e^{ik_1x_1}\phi(k_2)e^{ik_2x_2}\int \frac{dk}{2\pi}e^{ik(y - \sum x_i)}$$

Função característica

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$P(Y_2 = y_2 | I_1^2) = \int \frac{dk_1}{2\pi}\frac{dk_2}{2\pi} dx_1 dx_2 \phi(k_1) e^{ik_1 x_1} \phi(k_2) e^{ik_2 x_2} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(y_2 - \sum x_i)}$$

$$P(Y_2 = y | I_1^2) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \int dk_1 dk_2 \phi(k_1)\phi(k_2) \{ \int e^{-i(k-k_1)x_1} \frac{dx_1}{2\pi} \}\{ \int e^{-i(k-k_2)x_2} \frac{dx_2}{2\pi} \}$$

Função característica

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$P(Y_2 = y_2 | I_1^2) = \int \frac{dk_1}{2\pi}\frac{dk_2}{2\pi} dx_1 dx_2 \phi(k_1) e^{ik_1 x_1} \phi(k_2) e^{ik_2 x_2} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(y_2 - \sum x_i)}$$

$$P(Y_2 = y | I_1^2) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \int dk_1 dk_2 \phi(k_1)\phi(k_2) \{ \int e^{-i(k-k_1)x_1} \frac{dx_1}{2\pi} \} \{ \int e^{-i(k-k_2)x_2} \frac{dx_2}{2\pi} \}$$

$$P(Y_2 = y | I_1^2) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \int dk_1 dk_2 \phi(k_1)\phi(k_2) \delta(k - k_1)\delta(k - k_2)$$

Função característica

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$P(Y_2 = y_2 | I_1^2) = \int \frac{dk_1}{2\pi}\frac{dk_2}{2\pi} dx_1 dx_2 \phi(k_1) e^{ik_1 x_1} \phi(k_2) e^{ik_2 x_2} \int \frac{dk}{2\pi} e^{ik(y_2 - \sum x_i)}$$

$$P(Y_2 = y | I_1^2) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \int dk_1 dk_2 \phi(k_1)\phi(k_2) \{ \int e^{-i(k-k_1)x_1} \frac{dx_1}{2\pi} \} \{ \int e^{-i(k-k_2)x_2} \frac{dx_2}{2\pi} \}$$

$$P(Y_2 = y | I_1^2) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \int dk_1 \phi(k_1) \delta(k - k_1) \int dk_2 \phi(k_2) \delta(k - k_2)$$

Função característica

$x_1 \cdots x_N$

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$P(Y_2 = y \mid I_1^2) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \int dk_1 \phi(k_1)\delta(k - k_1) \int dk_2 \phi(k_2)\delta(k - k_2)$$

$$P(Y_2 = y \mid I_1^2) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \phi_{X_1}(k)\phi_{X_2}(k)$$

$$P(Y_N = y \mid I_1^N) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \phi(k)^N = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \Phi_{Y_N}(k)$$

Função característica

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$P(Y_2 = y \,|\, I_1^2) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \prod_{i=1}^{N} \phi_{X_i}(k) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \Phi_{Y_N}(k)$$

$$P(Y_N = y \,|\, I_1^N) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \phi(k)^N = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \Phi_{Y_N}(k)$$

$$\boxed{\Phi_{Y_N}(k) = \prod_{i=1}^{N} \phi_{X_i}(k) = \phi_X(k)^N}$$

Fourier

Função característica

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$P(Y_2 = y \,|\, I_1^2) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \prod_{i=1}^{N} \phi_{X_i}(k) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \Phi_{Y_N}(k)$$

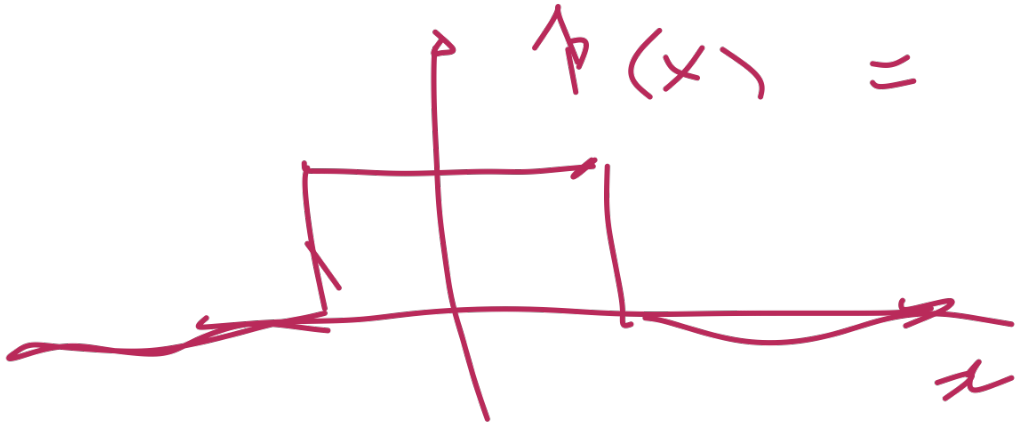
$$P(Y_N = y \,|\, I_1^N) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \phi(k)^N = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \Phi_{Y_N}(k)$$

Indep.

$$\Phi_{Y_N}(k) = \prod_{i=1}^{N} \phi_{X_i}(k) = \phi_X(k)^N \leftarrow \underbrace{\text{I. I. D}}$$

$Y_N = \sum x_i$, dado $p(x_i)$

1 Integral $\rightarrow \phi_X(k)$, 1 integral $P(Y_N | I_1^N)$



$$p(x) = \begin{cases} 1 & -1/2 < x < 1/2 \\ 0 & \text{senão} \end{cases}$$

X_1, X_2, indep

$$\phi_y = \left[\phi_x(k)\right]^2 = \left[\int_{-1/2}^{1/2} 1\, e^{ikx}\, dx\right]^2$$

$$P(Y_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_y(k)\, e^{-ikx}\, dk$$

Função característica

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$P(Y_N = y \,|\, I_1^N) = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \phi(k)^N = \int \frac{dk}{2\pi} e^{iky} \Phi_{Y_N}(k)$$

$$\phi_x(k) = \int e^{-ikx} p(x) dx = \int \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-ikx)^s}{s!} p(x) dx$$

$$\phi_x(k) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-ik)^s}{s!} \int x^s p(x) dx = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-ik)^s}{s!} M_s$$

Função característica

Transformada de Fourier de densidade de probabilidade

$$\phi_x(k) = \int e^{-ikx} p(x) dx = \int \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-ikx)^s}{s!} p(x) dx$$

$$\underline{\text{II}}$$

$$\phi_x(k) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-ik)^s}{s!} \int x^s p(x) dx = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-ik)^s}{s!} M_s$$

A expansão em Série de Taylor de $\phi_x(k)$ tem como coeficientes $-i^s M_s$

Momentos de X

função Geratriz dos Momentos (Geradora) !

Logaritmo da Função característica

$$\Phi_{Y_N}(k) = \prod_{i=1}^{N} \phi_{X_i}(k) = \phi_X(k)^N$$

$$\kappa_Y(k \,|\, N) = \log \Phi_{Y_N}(k)$$

$$\kappa_X(k) = \log \phi_X(k)$$

$$\kappa_Y(k \,|\, N) = \sum_{i=1}^{N} \kappa_{X_i}(k) = N\kappa_X(k)$$

Logaritmo da Função característica

$$\kappa_Y(k\,|\,N) = \sum_{i=1}^{N} \kappa_{X_i}(k) = N\kappa_X(k)$$

Expande em série de Taylor

$$\kappa_X(k) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-ik)^s}{s!} \underline{C_s}$$

Logaritmo da Função característica

$$Y_{(N)} = \sum^{N} X_i$$

$$\kappa_Y(k\,|\,N) = \sum_{i=1}^{N} \kappa_{X_i}(k) = N\kappa_X(k)$$

Expande em série de Taylor

$$\underset{Y}{\kappa}(k|N) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-ik)^s}{s!} \underbrace{C_s(N)}$$

$$\boxed{\text{Cumulantes}}$$

$$\underset{X}{\kappa}(k) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-ik)^s}{s!} \underbrace{C_s(1)}$$

Logaritmo da Função característica

$$\kappa_Y(k \,|\, N) = \sum_{i=1}^{N} \kappa_{X_i}(k) = N\kappa_X(k)$$

Expande em série de Taylor

$$\kappa_Y(k|N) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-ik)^s}{s!} C_s(N)$$

$$\kappa_X(k) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-ik)^{\boxed{s}}}{s!} C_s(1)$$

$$C_s(N) = \sum_{i=1}^{N} C_s^{X^1}(1)$$

$$C_s^Y(N) = N\, C_s^X(1)$$

IID

Logaritmo da Função característica

Geradora dos Cumulantes

$$\kappa_Y(k\,|\,N) = \sum_{i=1}^{N} \kappa_{X_i}(k) = N\kappa_X(k)$$

Expande em série de Taylor

$$\kappa_Y(k|N) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-ik)^s}{s!} \underline{C_s(N)}$$

$$\kappa_X(k) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-ik)^s}{s!} \underline{C_s(1)}$$

$C_s(N) = \sum C_s(1)$

$C_s(N) = N\, C_s(1)$

IID

Logaritmo da Função característica

Geradora dos Cumulantes

$$\kappa_Y(k\,|\,N) = \sum_{i=1}^{N} \kappa_{X_i}(k) = N\kappa_X(k)$$

Expande em série de Taylor

Cumulantes "acumulam"

$$\boxed{Y_N = \sum_{i=1}^{N} X_i}$$

$$\begin{cases} C_s(N) = \sum C_s(1) \\ C_s(N) = N\,C_s(1) \end{cases}$$

IID

Exercício:

Encontre a relação dos cumulantes com os momentos para $s = 0, 1, 2, 3$

(Ver **notas**)

$$Y = \sum_{i}^{N} X_i$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i}^{N} X_i$$

$$W = \frac{1}{N} \sum_{i}^{N} X_i$$

Variações sobre o tema

já vimos $$Y = \sum_{i}^{N} X_i = Y$$

(Intermediária) $$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i}^{N} X_i = \frac{Y}{\sqrt{N}}$$

Média Empírica $$W = \frac{1}{N} \sum_{i}^{N} X_i = \frac{Y}{N}$$

Primeiros momentos

$$Y = \sum_i^N X_i \qquad \langle Y \rangle = N \langle X \rangle$$

$$Z = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i^N X_i \qquad \langle Z \rangle = \sqrt{N} \langle X \rangle$$

$$W = \frac{1}{N} \sum_i^N X_i \qquad \langle W \rangle = \langle X \rangle$$

Como ficam os cumulantes?

Cumulantes de X

$$c_0 = 0$$

$$c_1 = \langle x \rangle$$

$$c_2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$$

$$c_3 = \langle x^3 \rangle - 3\langle x^2 \rangle \langle x \rangle + 2\langle x \rangle^3$$

$$c_4 = \langle x^4 \rangle - 4\langle x^3 \rangle \langle x \rangle - 3\langle x^2 \rangle^2 + 12\langle x^2 \rangle \langle x \rangle^2 - 6\langle x \rangle^4$$

$$c_5 = \langle x^5 \rangle \ldots\ldots$$

$$Y = \sum X_i \quad , \quad Z = N^{-1/2} Y \, , \quad W = N^{-1} Y$$

$A = c\underline{\underline{te}}$

Análise Dimensional!

$$C_s^Y(N) = N^{\frac{s}{2}} C_s^Z(N)$$

$$= N^s C_s^W(N)$$

$$\boxed{N C_s^X = C_s^Y(N) = N^{\frac{s}{2}} C_s^Z(N) = N^s C_s^W(N)}$$

$$Y = \sum X_i, \quad Z = N^{-1/2} Y, \quad W = N^{-1} Y$$

$$\boxed{N C_s^X = C_s^Y(N) = N^{\frac{s}{2}} C_s^Z(N) = N^s C_s^W(N)}$$

$$C_s^Y(N) = N C_s^X$$

$$C_s^Z(N) = \frac{1}{N^{\frac{s}{2}-1}} C_s^X$$

$$C_s^W(N) = \frac{1}{N^{s-1}} C_s^X$$

$$C_s^y(N) = N\, C_s^x$$

$$C_s^z(N) = \frac{1}{N^{\frac{s}{2}-1}}\, C_s^x$$

$$C_s^w(N) = \frac{1}{N^{s-1}}\, C_s^x$$

o que significa a variação com N?

$$C_s^x = \langle x^s \rangle + \cdots$$

dimensões

Procuramos quantidades ADIMENSIONAIS.

$$\left[C_s^x \right] = [x]^s$$

vamos medir em unidades de desvio padrão.

Procuramos quantidades ADIMENSIONAIS.

$$[C_s^x] = [x]^s$$

vamos medir em unidades de desvio padrão.

$$\boxed{u_s^x = \frac{C_s^x}{[C_2^x]^{\frac{s}{2}}}}$$

Adimensional

$$u_s^y(N) = \frac{C_s^y(N)}{\left[C_2^y(N)\right]^{\frac{}{2}}}$$

$$u_s^y(N) = \frac{C_s^y(N)}{\left[C_2^y(N)\right]^{\frac{s}{2}}}$$

Adimensional

$$\mathcal{U}_s^{y}(N) = \frac{C_s^{y}(N)}{\left[C_2^{y}(N)\right]^{\frac{s}{2}}}$$

Adimensional

$$\mathcal{U}_s^{z}(N) = \frac{C_s^{z}(N)}{\left[C_2^{z}(N)\right]^{\frac{s}{2}}}$$

$$\mathcal{U}_s^{w}(N) = \frac{C_s^{w}(N)}{\left[C_2^{w}(N)\right]^{\frac{s}{2}}}$$

$$u_s^y(N) = \frac{C_s^y(N)}{\left[C_2^y(N)\right]^{\frac{s}{2}}} = \frac{N C_s^x}{\left(N C_2^x\right)^{s/2}}$$

$$u_s^z(N) = \frac{C_s^z(N)}{\left[C_2^z(N)\right]^{\frac{s}{2}}} = \frac{\frac{1}{N^{\frac{s}{2}-1}} C_s^x}{\left(\frac{1}{N^{\frac{2}{2}-1}} C_2^x\right)^{s/2}}$$

$$u_s^w(N) = \frac{C_s^w(N)}{\left[C_2^w(N)\right]^{\frac{s}{2}}} = \frac{\frac{1}{N^{s-1}} C_s^x}{\left(\frac{1}{N^{2-1}} C_2^x\right)^{s/2}}$$

$$u_s^{y}(N) = \frac{C_s^{y}(N)}{\left[C_2^{y}(N)\right]^{\frac{s}{2}}} = \frac{N C_s^{X}}{\left(N C_2^{X}\right)^{s/2}} = N^{1-\frac{s}{2}} u_s^{X}$$

$$u_s^{z}(N) = \frac{C_s^{z}(N)}{\left[C_2^{z}(N)\right]^{\frac{s}{2}}} = \frac{\frac{1}{N^{\frac{s}{2}-1}} C_s^{x}}{\left(\frac{1}{N^{\frac{2}{2}-1}} C_2^{X}\right)^{s/2}} = N^{1-\frac{s}{2}} u_s^{x}$$

$$u_s^{W}(N) = \frac{C_s^{w}(N)}{\left[C_2^{w}(N)\right]^{\frac{s}{2}}} = \frac{\frac{1}{N^{s-1}} C_s^{X}}{\left(\frac{1}{N^{2-1}} C_2^{X}\right)^{s/2}} = N^{1-\frac{s}{2}} u_s^{X}$$

$$
\left.
\begin{aligned}
u_s^{y}(N) &= \frac{C_s^{y}(N)}{\left[C_2^{y}(N)\right]^{\frac{s}{2}}} \\[2ex]
u_s^{z}(N) &= \frac{C_s^{z}(N)}{\left[C_2^{z}(N)\right]^{\frac{s}{2}}} \\[2ex]
u_s^{w}(N) &= \frac{C_s^{w}(N)}{\left[C_2^{w}(N)\right]^{\frac{s}{2}}}
\end{aligned}
\right\}
\; N^{1-\frac{s}{2}} \, u_s^{x}
$$

$$\kappa_s^{y}(N) = \kappa_s^{z}(N) = \kappa_s^{w}(N) = N^{1-\frac{s}{2}}\,\kappa_s^{x}$$

Os cumulantes, medidos em unidades de (desvio padrão)$^{\text{dimensão}}$

escalam com N

da mesma forma!

escalam com N

da mesma forma!

o quê significa

isto?

veremos que é importante

$$u_s^y(N) = u_s^z(N) = u_s^w(N) = N^{1-\frac{s}{2}}\, u_s^x$$

$s \geq 1$

$$u_s^y(N) = u_s^z(N) = u_s^w(N) = N^{1-\frac{s}{2}} u_s^x$$

$s \geq 1$

$s = 1:$

$$u_1^y(N) = N^{1/2} u_1^x$$

$$u_s^y(N) = u_s^z(N) = u_s^w(N) = N^{1-\frac{s}{2}}\, u_s^x$$

$s \geq 1$

$S=1$:

$$u_1^y(N) = N^{1/2}\, u_1^x$$

$S=2$:

$$u_2^y(N) = u_2^x$$

Estamos olhando na escala do desvio padrão: permanece constante.

$$u_s^y(N) = u_s^z(N) = u_s^w(N) = N^{1-\frac{s}{2}} u_s^x$$

$s \geq 1$

$s = 1$:

$$u_1^y(N) = N^{1/2} u_1^x$$

$s = 2$:

$$u_2^y(N) = u_2^x$$

$$u_1^y(N) = \frac{\text{média}}{\text{desvio padrão}}$$

$$= \frac{N}{N^{1/2}}$$

$$u_s^y(N) = u_s^z(N) = u_s^w(N) = N^{1-\frac{s}{2}}\, u_s^x$$

$$s \geq 1$$

$s = 1$: $\quad u_1^y(N) = N^{1/2}\, u_1^x$

$s = 2$: $\quad u_2^y(N) = u_2^x$

$$u_1^y(N) = \frac{\text{média}}{\text{desvio padrão}} = \frac{N}{N^{1/2}}$$

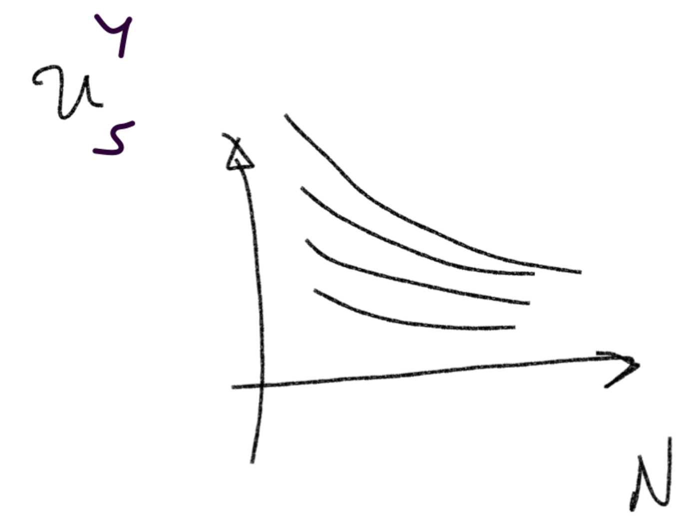
$$u_2^y(N) \simeq \frac{\text{variância}}{(\text{desvio padrão})^2}$$

$\longrightarrow$ não muda com N

$$u_s^y(N) = u_s^z(N) = u_s^w(N) = N^{1-\frac{s}{2}}\, u_s^x$$

$$s \geq \cancel{1}\ 3$$

$$u_s^y(N) \longrightarrow 0 \quad \text{com} \quad \frac{1}{N^{\frac{s}{2}-1}}$$

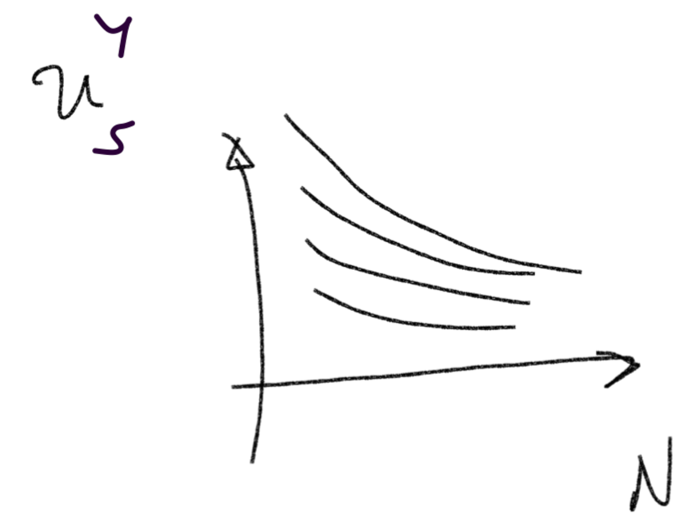


As funções $u_s^y(N)$ para $s > 2$
vão para zero com N

$$u_s^y(N) = u_s^z(N) = u_s^w(N) = N^{1-\frac{s}{2}}\, u_s^x$$

$$s \geq \cancel{1}\; 3$$

$$u_s^y(N) \longrightarrow 0 \quad \text{com} \quad \frac{1}{N^{\frac{s}{2}-1}}$$



As funções $u_s^y(N)$ para $s > 2$

vão para zero com N

(se todas as integrais fizerem sentido)

Cumulantes escalados $u_s^Y(N)$

"Teorema" limite

$N \to \infty$

$u_1^Y(N), u_2^Y(N)$ sobrevivem

$$u_s^Y(N) \xrightarrow[s \geq 3]{N \to \infty} 0$$

Cumulantes escalados $u_s^Y(N)$

'Teorema' limite

$N \to \infty$

$u_1^Y(N), u_2^Y(N)$ sobrevivem

$u_s^Y(N) \xrightarrow[s \geq 3]{N \to \infty} 0$

$Y = \sum X$, $p(x)$, $\phi(k)$, Taylor

$\Rightarrow$ cumulantes de X determinam cumulantes de Y

Cumulantes escalados $u_s^Y(N)$

'Teorema' limite

$N \to \infty$

$u_1^Y(N), u_2^Y(N)$ sobrevivem

$$u_s^Y(N) \xrightarrow[s \geq 3]{N \to \infty} 0$$

$Y = \sum X$, $p(x)$, $\phi(k)$, Taylor

$\Rightarrow$ $\underbrace{\text{cumulantes de } X}_{u_1^X,\ u_2^X}$ determinam cumulantes de Y

Qual é a distribuição que tem só $\mu_1, \mu_2 \neq 0$ e $\mu_s = 0$, $s \geq 3$?

Distribuição **NORMAL**

Qual é a distribuição

que tem só $\mu_1, \mu_2 \neq 0$

e $\mu_s = 0$, $s \geq 3$?

Distribuição **NORMAL**

$\Rightarrow$ "Teorema" do Limite Central

várias questões técnicas.

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\phi(k) = \int p(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-ikx} dx$$

completando quadrados

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 + i 2\sigma^2 k x + A^2 - A^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x + A \right)^2 + \frac{A^2}{2\sigma^2}$$

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

$$\phi(k) = \int p(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-ikx} dx$$

completando quadrados

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 + i\underline{2}\sigma^2 k \underline{x} + A^2 - A^2 \right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(x + A \right)^2 + \frac{A^2}{2\sigma^2}$$

termo cruzado $2xA = 2x(ik\sigma^2)$

$$\phi(k) = \int p(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} e^{-ikx} dx$$

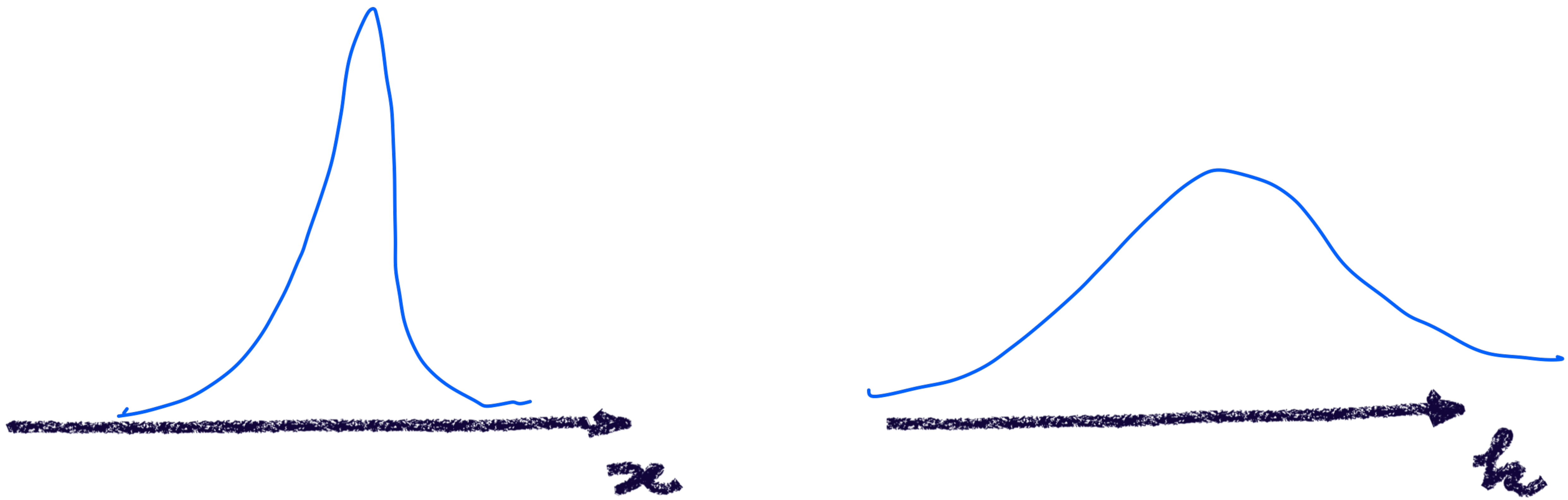
completando quadrados

$$-\frac{1}{2\sigma^2}\left(x^2 + i\,2\sigma^2 k x + A^2 - A^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma^2}\underbrace{(x+A)}_{u}{}^2 + \frac{A^2}{2\sigma^2}$$

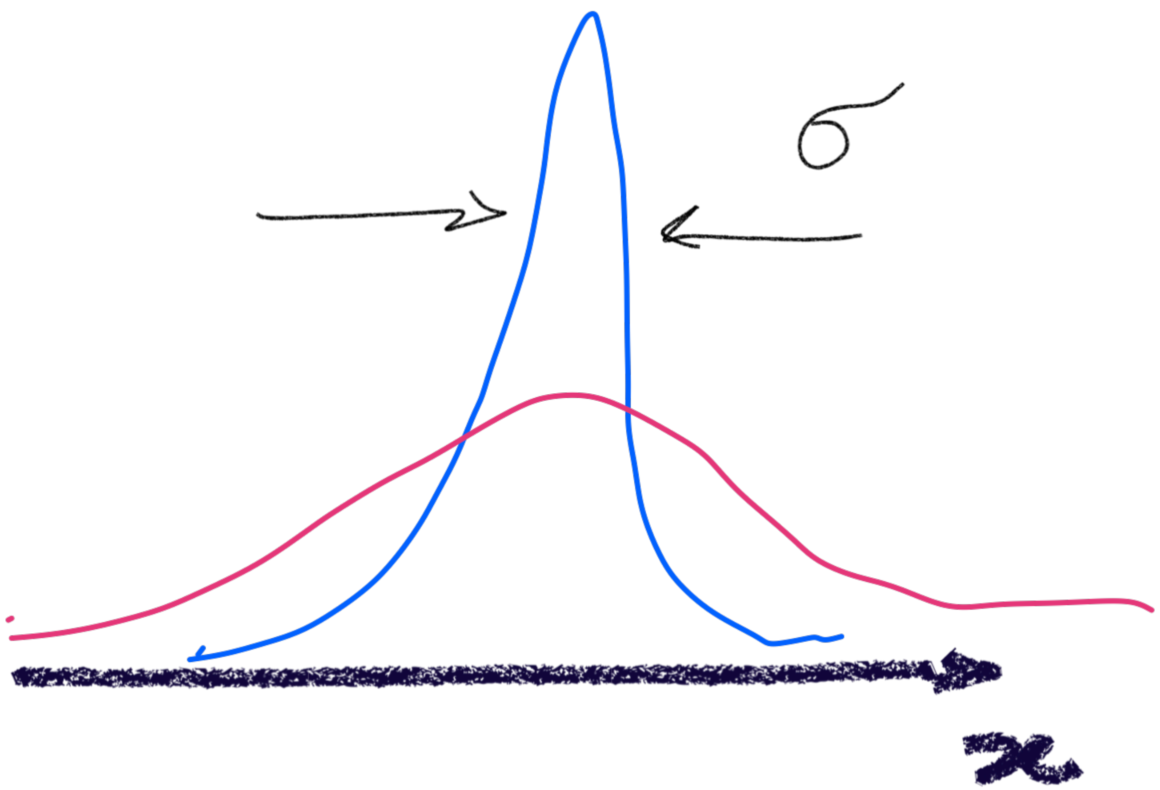
$$\frac{A^2}{2\sigma^2} = -\frac{k^2\sigma^2}{2}$$

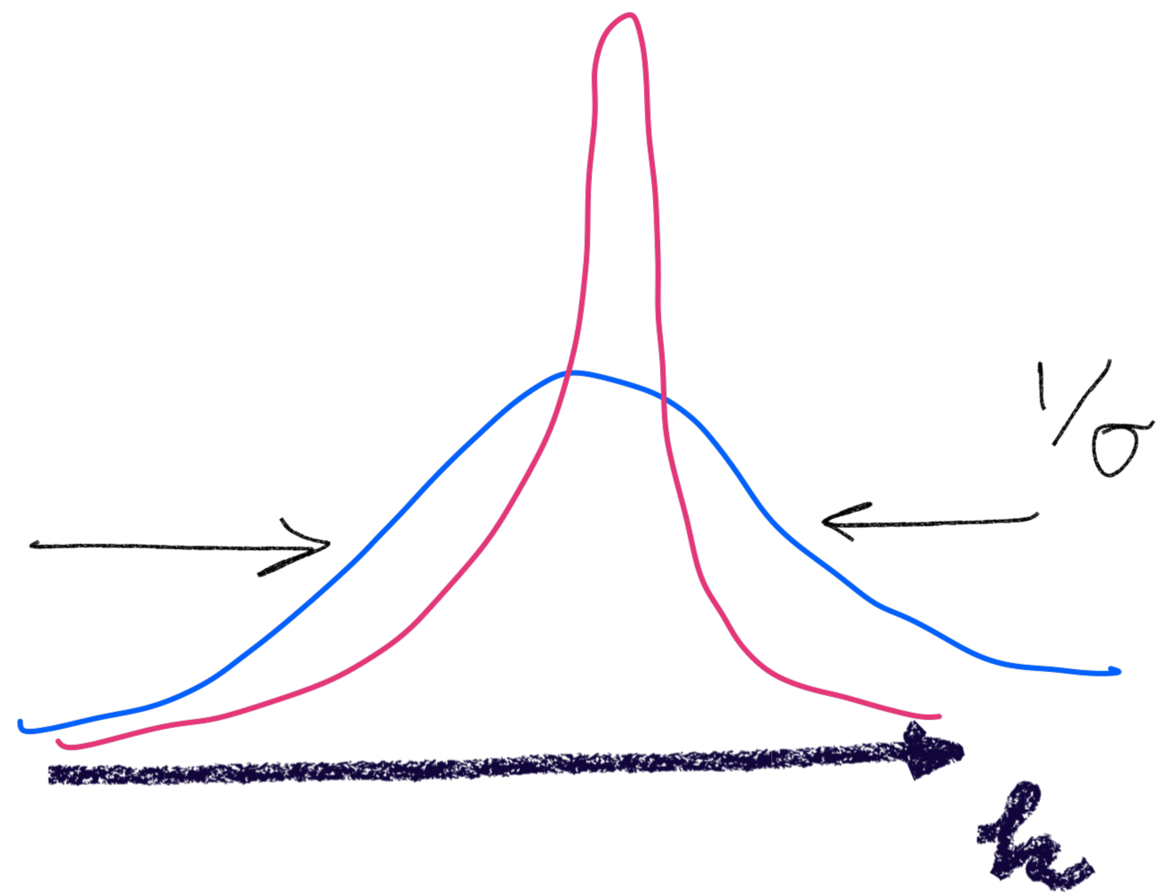
$$\phi(k) = e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int e^{-\frac{u^2}{2\sigma^2}} du$$


x
k

$$p(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}$$

$$\phi(k) = e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}$$





$$\phi(k) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}$$

1. $\phi(0) = 1$ (Normalização) qualquer distribuição

para gaussiana

$$\ln \phi = -\frac{1}{2}\sigma^2 k^2 + \underbrace{0 k^3 + 0 k^4}_{\text{cumulantes superiores} \to 0}$$

$$\phi(k) = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2}$$

1. $\phi(0) = 1$ (normalização)
qualquer distribuição

para gaussiana

$$\ln \phi = -\frac{1}{2}\sigma^2 k^2 + \underbrace{0k^3 + 0k^4}_{\text{cumulantes superiores} \to 0}$$

P(Y) → "Mais" normal
quando N → aum.