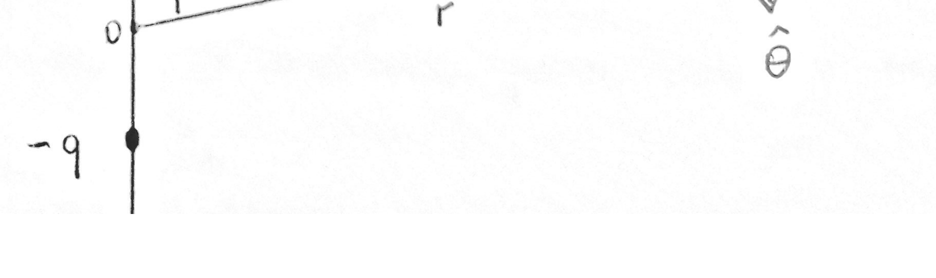
Na aula passada, vimos que um dipolo elétrico dependente do tempo na forma

$$\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t)\,\hat{z}$$

produz um campo eletromagnético na zona de radiação que pode ser aproximado por

$$\begin{cases} \vec{E} \simeq -\dfrac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi}\left(\dfrac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]\hat{\theta} \\ \\ \vec{B} \simeq -\dfrac{\mu_0 p_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\dfrac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]\hat{\phi} \end{cases} \qquad (d \ll \lambda \ll r)$$

onde d é a separação máxima entre as cargas do dipolo, λ o comprimento de onda da radiação emitida e r a distância entre o centro do dipolo e o ponto de campo.

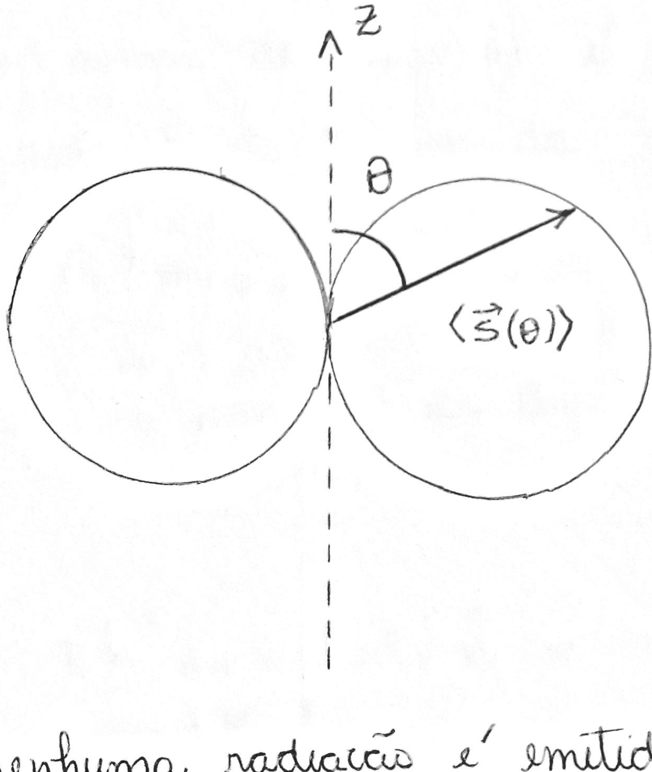


Na aproximação anterior, mantiremos apenas termos que vão com $1/r$ e, portanto, contribuem com uma quantidade finita de energia num detector arbitrariamente distante do dipolo.

Também vimos que a intensidade da onda eletromagnética associada é dada por

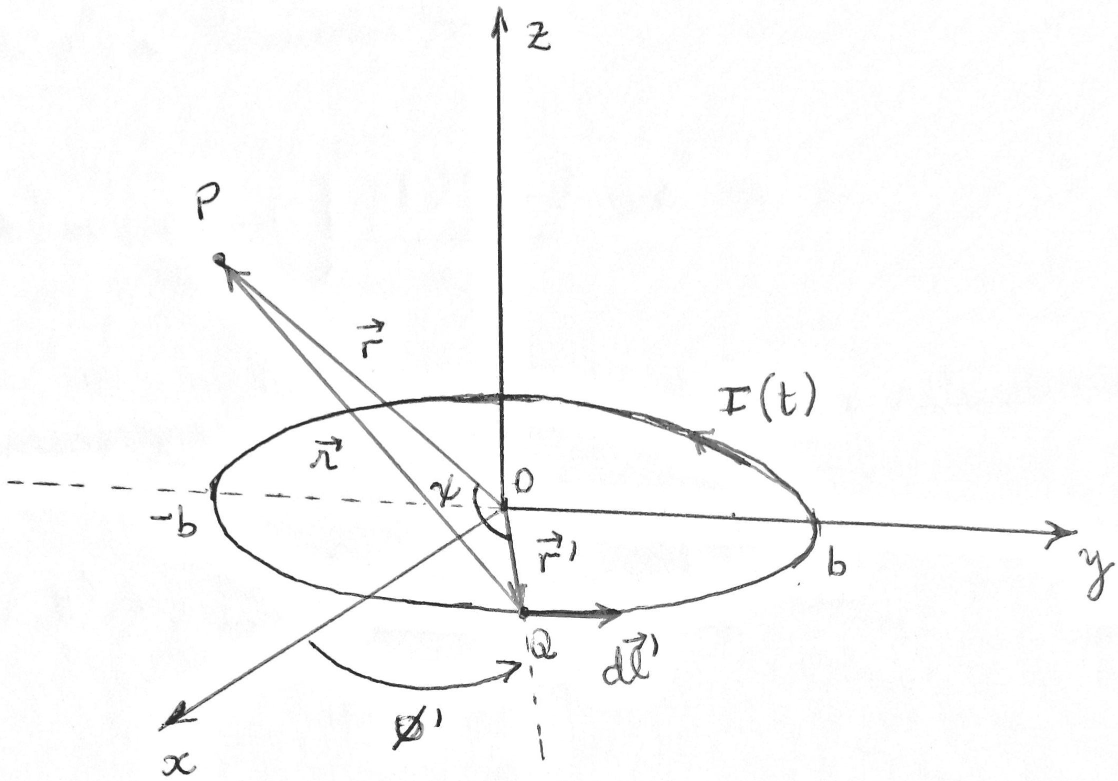
$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \hat{r}$$

correspondendo a um fluxo radial e anisotrópico de energia.



Ou seja, nenhuma radiação é emitida ao longo do eixo do dipolo. A intensidade é máxima para direções perpendiculares ao eixo do dipolo.

Radiação de dipolo magnético



O circuito acima de raio b é percorrido por uma corrente dependente do tempo da forma

$$I(t) = I_0 \cos(\omega t)$$

de forma que o momento de dipolo magnético do circuito é

$$\vec{m}(t) = \underbrace{\pi b^2 I_0}_{\equiv m_0} \cos(\omega t)\,\hat{z} = m_0 \cos(\omega t)\,\hat{z}$$

Tomaremos o circuito como globalmente neutro.

Como o circuito é neutro, o potencial escalar retardado é também nulo

$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,', t_r)}{\mathscr{r}}\, d\tau' = 0$$

Determinemos, então, o potencial vetor retardado

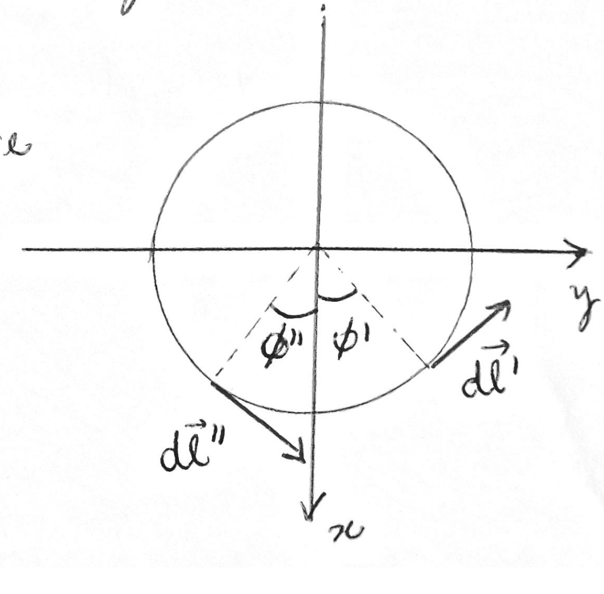
$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I(\vec{r}\,', t - \mathscr{r}/c)}{\mathscr{r}}\, d\vec{l}\,'$$

Sem perda de generalidade podemos tomar o ponto P sobre o plano xz. Para essa escolha, temos que $\hat{y} = \hat{\phi}$ em P.

Decompondo o vetor $d\vec{l}\,'$ em componentes cartesianas, temos

$$d\vec{l}\,' = -b\sin\phi'\,\hat{x} + b\cos\phi\,\hat{y}$$

Dessa forma, a contribuição resultante dos dois elementos infinitesimais $d\vec{l}\,'$ e $d\vec{l}\,''$ (com $|\phi'| = 2\pi - \phi''$) está na direção $\hat{y}$.



Portanto

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0 b I_0}{4\pi}\,\hat{y}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\left[\omega\left(t-\mathscr{r}/c\right)\right]}{\mathscr{r}}\cos\phi'\,d\phi'$$

onde, pela lei dos cossenos aplicada ao Triângulo OQP

$$\mathscr{r} = \left[r^2+b^2-2rb\cos\psi\right]^{1/2}$$

Como ψ é ângulo entre $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$, sua relação com ϕ' pode ser obtida lembrando que

$$\vec{r} = r\sin\theta\,\hat{x} + r\cos\theta\,\hat{z} \quad e \quad \vec{r}\,' = b\cos\phi'\,\hat{x} + b\sin\phi'\,\hat{y}$$

Então

$$\vec{r}\cdot\vec{r}\,' = rb\cos\psi = rb\sin\theta\cos\phi' \Rightarrow \cos\psi = \sin\theta\cos\phi'$$

$$\Downarrow$$

$$\mathscr{r} = \left[r^2+b^2-2rb\sin\theta\cos\phi'\right]^{1/2}$$

$$= r\left[1-2\frac{b}{r}\sin\theta\cos\phi' + \frac{b^2}{r^2}\right]^{1/2}$$

$r \gg b$

$$\simeq r\left[1-\frac{b}{r}\sin\theta\cos\phi'\right]$$

Ou seja

$$\frac{1}{\imath} \simeq \frac{1}{r}\left[1 + \frac{b}{r}\sin\theta\cos\phi'\right] \quad p/\ r \gg b$$

Portanto

$$\cos\left[\omega\left(t - \imath/c\right)\right] \simeq \cos\left[\omega\left(t - r/c\right) + \frac{\omega b}{c}\sin\theta\cos\phi'\right]$$

$$= \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\cos\left(\frac{\omega b}{c}\sin\theta\cos\phi'\right) - \sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]\sin\left(\frac{\omega b}{c}\sin\theta\cos\phi'\right)$$

$$\simeq \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] - \frac{\omega b}{c}\sin\theta\cos\phi'\sin\left[\omega\left(t - r/c\right)\right]$$

onde na última aproximação, assumimos

$$\frac{\omega b}{c} \ll 1$$

isto é, estamos supondo que o comprimento de onda da radiação emitida é muito maior que o raio do circuito, mais precisamente

$$\frac{\omega b}{c} = \frac{2\pi b}{\lambda} \ll 1$$

Sendo assim

$$\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-r/c\right)\right] \simeq \frac{1}{r}\left(1+\frac{b}{r}\sin\theta\cos\phi'\right)$$

$$\times\left\{\cos\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]-\frac{\omega b}{c}\sin\theta\cos\phi'\sin\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]\right\}$$

com

$$\frac{b}{r} \ll \quad e \quad \frac{\omega b}{c} \ll 1$$

Mantendo apenas termos até primeira ordem em $\frac{b}{r}$ e $\frac{\omega b}{c}$, podemos escrever

$$\vec{A}(\vec{r},t) \simeq \frac{\mu_0 I_0 b}{4\pi r}\hat{y}\int_0^{2\pi}\left\{\cos\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]\right.$$

$$\left.+\, b\sin\theta\cos\phi'\left(\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]-\frac{\omega}{c}\sin\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]\right)\right\}\cos\phi'\,d\phi'$$

$$=\frac{\mu_0 m_0}{4\pi}\frac{\sin\theta}{r}\left\{\frac{1}{r}\cos\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]-\frac{\omega}{c}\sin\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]\right\}\hat{\phi}$$

onde usamos na última passagem

$$\int_0^{2\pi}\cos\phi' = 0\,,\quad \int_0^{2\pi}\cos^2\phi' = \pi \quad e \quad \hat{y}=\hat{\phi} \text{ em } P$$

Por fim, na zona de radiação

$$r \gg \frac{c}{\omega}$$

podemos escrever

$$\boxed{\vec{A}(\vec{r},t) \simeq -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\sin\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]\hat{\phi}} \quad (b \ll \lambda \ll r)$$

— // —

Campo eletromagnético na zona de radiação

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \simeq \frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\hat{\phi}\,\frac{\partial}{\partial t}\sin\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]$$

$$\vec{E} \simeq \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]\hat{\phi}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta A_\phi\right)\hat{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right)\hat{\theta}$$

$$\simeq \frac{1}{r\sin\theta}\left(-\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c}\right)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\overbrace{\left(\sin^2\theta\right)}^{\sin[\omega(t-r/c)]}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c}\sin\theta\,\frac{\partial}{\partial r}\sin\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]\hat{\theta}$$

$$= -\frac{\mu_0 m_0 \omega}{4\pi c}\left(\frac{2\cos\theta}{r^2}\right)\sin\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]\hat{r}$$

$$- \frac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\cos\left[\omega\left(t-r/c\right)\right]\hat{\theta}$$

Resumindo, na zona de radiação

$$\begin{cases} \vec{E} \simeq \dfrac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c} \left(\dfrac{\sin\theta}{r}\right) \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \hat{\phi} \\ \\ \vec{B} \simeq -\dfrac{\mu_0 m_0 \omega^2}{4\pi c^2} \left(\dfrac{\sin\theta}{r}\right) \cos\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \hat{\theta} \end{cases} \qquad (b \ll \lambda \ll r)$$

Perceba que, assim como no caso do dipolo elétrico, na zona de radiação os campos $\vec{E}$ e $\vec{B}$ de um dipolo magnético são perpendiculares entre si, mas agora $\vec{E} \parallel \hat{\phi}$ e $\vec{B} \parallel \hat{\theta}$.

O fluxo de energia é então

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \simeq \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{16\pi^2 c^3} \left(\frac{\sin\theta}{r}\right)^2 \cos^2\left[\omega\left(t - r/c\right)\right] \hat{r}$$

Portanto a intensidade é

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{32\pi^2 c^3} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \hat{r}$$

A potência total média irradiada a partir do dipolo magnético é

$$P = \int_{\Sigma} \langle \vec{S} \rangle \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{16 \pi c^3} \underbrace{\int_0^{\pi} \sin^3\theta \, d\theta}_{= \frac{4}{3}} = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12 \pi c^3}$$

A integração anterior foi feita sobre uma superfície Σ esférica de raio r e o resultado, assim como no caso elétrico é independente desse raio.

Portanto, observadores a distâncias arbitrariamente grandes do dipolo, equipados com detectores de sensibilidade apropriadas devem ser capazes de receber parte dessa potência emitida.

A dependência angular da intensidade da radiação no caso magnético é idêntica à do caso elétrico, ou seja

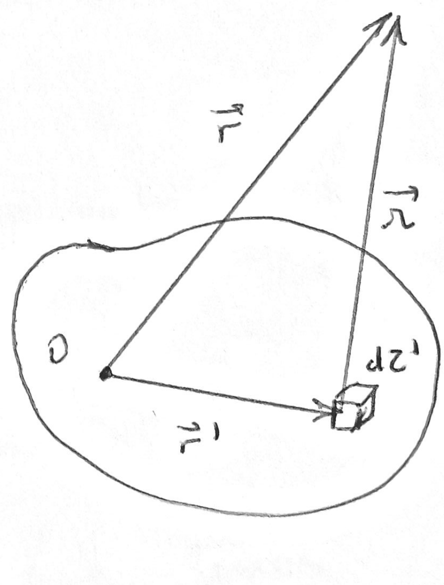
$$\langle \vec{S} \rangle_{mag} \propto \sin^2\theta$$

$$\langle \vec{S} \rangle_{el} \propto \sin^2\theta$$

Radiação de uma distribuição arbitrária de cargas e correntes

Os dipolos elétrico e magnético harmonicamente oscilantes são os sistemas irradiantes mais simples.

Trataremos agora o caso de uma distribuição de cargas e correntes bastante genérica. Uma das poucas simplificações introduzidas será que essas distribuições encontram-se localizadas em torno da origem. e seu centro de massa encontra-se em repouso.



$$V(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{\rho(\vec{r}\,', t-\mathscr{r}/c)}{\mathscr{r}}\, d\tau'$$

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{J}(\vec{r}\,', t-\mathscr{r}/c)}{\mathscr{r}}\, d\tau'$$

com $\mathscr{r}^2 = r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,'$

$$\Downarrow$$

$$\mathscr{r} = r\left[1 - \frac{2\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}{r} + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{1/2} \underset{r \gg r'}{\simeq} r\left[1 - \frac{\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}{r}\right]$$

$$\frac{1}{\mathscr{r}} \simeq \frac{1}{r}\left[1 + \frac{\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}{r}\right]$$

Perceba que ao variar as distribuições de carga e corrente nas integrais anteriores, o tempo retardado

$$t_r = t - ɹ/c$$

também varia.

Para realizar as integrações, faremos uma expansão de $\rho(\vec{r}', t - ɹ/c)$ em série de Taylor em torno de um instante retardado fixo t_0.

Por exemplo, podemos tomar t_0 como o instante retardado correspondente ao elemento de volume $d\tau'$ localizado na origem O $(\vec{r}' = \vec{0})$. Nesse caso

$$t - \frac{ɹ}{c} = \underbrace{t - \frac{r}{c}}_{\equiv\, t_0 \text{ (instante retardado na origem)}} + \frac{1}{c}\hat{r}\cdot\vec{r}' = t_0 + \frac{1}{c}\hat{r}\cdot\vec{r}'$$

Expandindo ρ em torno de $t = t_0$, temos

$$\rho(\vec{r}', t - ɹ/c) = \rho(\vec{r}', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}', t_0)\left(\frac{\hat{r}\cdot\vec{r}'}{c}\right) + \frac{1}{2}\ddot{\rho}(\vec{r}', t_0)\left(\frac{\hat{r}\cdot\vec{r}'}{c}\right)^2 + \ldots$$

Aqui, reteremos apenas termos até ordem 1 em $\frac{\hat{r} \cdot \vec{r}\,'}{c}$, ou seja

$$\rho(\vec{r}\,', t - r/c) \simeq \rho(\vec{r}\,', t_0) + \dot{\rho}(\vec{r}\,', t_0)\left(\frac{\hat{r} \cdot \vec{r}\,'}{c}\right)$$

O significado físico dessa aproximação não é tão ~~tão~~ direto de visualizar para uma distribuição tão arbitrária de carga.

Entretanto, quando particularizadas para os 2 sistemas harmonicamente oscilantes tratados anteriormente, os termos desprezados são todos proporcionais a

$$\frac{\omega r'}{c} \qquad \text{(provar!)}$$

Portanto, podemos intuir que a aproximação deve ser válida para os casos em que a dimensão típica da região contendo ρ e $\vec{J}$ é muito menor do que o comprimento de onda da radiação emitida

$$r'_{max} \ll \lambda$$

Nessas condições, podemos escrever p/ V

$$V(\vec{r},t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{1}{r}\left(1+\frac{\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}{r}\right)\left\{\rho(\vec{r}\,',t_0)+\dot{\rho}(\vec{r}\,',t_0)\frac{\hat{r}\cdot\vec{r}\,'}{c}\right\}d\tau'$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{1}{r}\underbrace{\int\rho(\vec{r}\,',t_0)\,d\tau'}_{=Q}+\frac{1}{rc}\hat{r}\cdot\int\dot{\rho}(\vec{r}\,',t_0)\,\vec{r}\,'\,d\tau'\right.$$

$$\left.+\frac{1}{r^2}\hat{r}\cdot\underbrace{\int\rho(\vec{r}\,',t_0)\,\vec{r}\,'\,d\tau'}_{=\vec{p}(t_0)\equiv\vec{p}_0}+\frac{1}{cr^2}\int\dot{\rho}(\vec{r}\,',t_0)(\hat{r}\cdot\vec{r}\,')^2\,d\tau'\right\}$$

Desprezando termos de segunda ordem, temos

$$V(\vec{r},t) \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{Q}{r}+\frac{\vec{p}_0\cdot\hat{r}}{r^2}+\frac{\hat{r}}{rc}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\Bigg[\underbrace{\int\rho(\vec{r}\,',t_0)\,\vec{r}\,'\,d\tau'}_{=\vec{p}_0}\Bigg]\right\}$$

Então

$$V(\vec{r},t) \simeq \underbrace{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}}_{\substack{\text{monopolo}\\ \text{elétrico}}}+\underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left\{\frac{\vec{p}_0\cdot\hat{r}}{r^2}+\frac{\dot{\vec{p}}_0\cdot\hat{r}}{rc}\right\}}_{\substack{\text{dipolo}\\ \text{elétrico}}}$$

A expansão anterior p/ $V(\vec{r},t)$ deve ser vista como uma generalização daquela para o caso da Eletrostática (expansão multipolar)

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{n+1}} \int (r')^n P_n(\cos\theta')\, \rho(\vec{r}')\, d\tau'$$

onde $P_n(\cos\theta)$ é polinômio de Legendre.

De maneira análoga para $\vec{A}(\vec{r},t)$

$$\vec{A}(\vec{r},t) \simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\hat{r}\cdot\vec{r}'}{r}\right)\left\{ \vec{J}(\vec{r}',t_0) + \dot{\vec{J}}(\vec{r}',t_0)\left(\frac{\hat{r}\cdot\vec{r}'}{c}\right)\right\} d\tau'$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{ \frac{1}{r} \underbrace{\int \vec{J}(\vec{r}',t_0)\, d\tau'}_{=(d\vec{p}/dt)_{t_0}} + \frac{1}{rc}\, \hat{r}\cdot \int \dot{\vec{J}}(\vec{r}',t_0)\, \vec{r}'\, d\tau' \right.$$

$$\left. + \frac{1}{r^2}\, \hat{r}\cdot \int \vec{J}(\vec{r}',t_0)\, \vec{r}'\, d\tau' + \frac{1}{cr^2} \int \dot{\vec{J}}(\vec{r}',t_0)\,(\hat{r}\cdot\vec{r}')^2\, d\tau' \right\}$$

$$\simeq \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{p}}_0}{r} + \dots$$

Termo de ordem mais baixa da expansão de $\vec{A}$ já envolve o momento de dipolo

(não existe monopolo magnético!)

Na última passagem, usamos o fato de que para uma configuração de cargas e correntes confinadas num volume $\mathcal{V}$, vale que

$$\int_{\mathcal{V}} \vec{J} \cdot d\tau' = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \text{(mostrar!)}$$

—— // ——

Campo eletromagnético na zona de radiação

Na zona de radiação, os termos dominantes de $\vec{E}$ e $\vec{B}$ devem cair com $1/r$.

Então, vemos imediatamente quais são os termos que contribuem para $\vec{E}$ vindos de V

$$V(\vec{r},t) \simeq \underbrace{\frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}_0 \cdot \hat{r}}{r^2}}_{\text{sub-dominantes na zona de radiação}} + \underbrace{\frac{\dot{\vec{p}}_0 \cdot \hat{r}}{rc}\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}_{\text{dominante na zona de radiação}}$$

Ou seja, o termo de monopolo não contribue para a radiação.

Você deve mostrar que até termos de ordem $1/r$, temos

$$\vec{\nabla} V \simeq -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2}\frac{[\hat{r}\cdot\ddot{\vec{p}}(t_0)]\hat{r}}{r}$$

e

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \simeq \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{\vec{p}}_0(t_0)}{r}$$

e

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} \simeq -\frac{\mu_0}{4\pi r c}\left[\hat{r}\times\ddot{\vec{p}}_0(t_0)\right]$$

Portanto

$$\begin{cases} \vec{E} \simeq \dfrac{\mu_0}{4\pi r}\left[(\hat{r}\cdot\ddot{\vec{p}})\hat{r}-\ddot{\vec{p}}\right] = \dfrac{\mu_0}{4\pi r}\left[\hat{r}\times(\hat{r}\times\ddot{\vec{p}})\right] \\ \\ \vec{B} \simeq -\dfrac{\mu_0}{4\pi r c}\left[\hat{r}\times\ddot{\vec{p}}\right] \end{cases}$$

Em coordenadas esféricas com $\ddot{\vec{p}} \parallel \hat{z}$

$$\begin{cases} \vec{E}(r,\theta,t) \simeq \dfrac{\mu_0 \ddot{p}(t_0)}{4\pi} \left(\dfrac{\sin\theta}{r} \right) \hat{\theta} \\[2ex] \vec{B}(r,\theta,t) \simeq \dfrac{\mu_0 \ddot{p}(t_0)}{4\pi c} \left(\dfrac{\sin\theta}{r} \right) \hat{\phi} \end{cases}$$

O vetor de Poynting

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \simeq \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \left[\ddot{p}(t_0) \right]^2 \frac{\sin^2\theta}{r^2} \hat{r}$$

Intensidade

$$\langle \vec{S} \rangle \simeq \frac{\mu_0}{16\pi^2 c} \frac{\sin^2\theta}{r^2} \left\langle \left[\ddot{p}(t_0) \right]^2 \right\rangle \hat{r}$$

Potência instantânea irradiada

$$P \simeq \int \vec{S} \cdot d\vec{a} = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{6\pi c}$$

Se aplicadas ao caso do dipolo elétrico

$$p(t) = p_0 \cos(\omega t)$$

as fórmulas anteriores se reduzem às obtidas especificamente para esse sistema.

Além disso, para o dipolo elétrico puro, temos

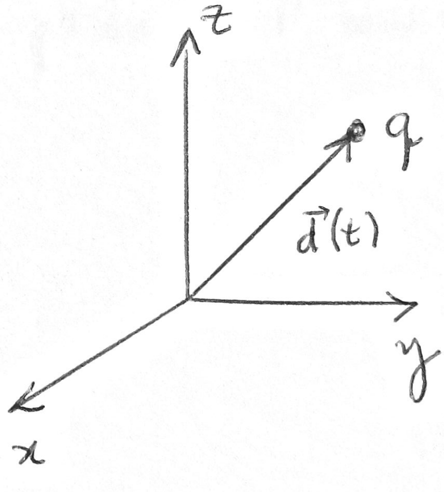
$$\ddot{p} = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t)$$

Já para uma única carga q distante da origem uma distância dependente do tempo $\vec{d}(t)$, temos

$$\vec{p}(t) = q\,\vec{d}(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\vec{p}}(t) = q\,\ddot{\vec{d}} = q\,\vec{a}$$



Portanto, a potência instantânea irradiada por essa carga acelerada é

$$P = \frac{\mu_0 \ddot{p}^2}{6\pi c} = \frac{\mu_0 q^2 a^2}{6\pi c} \Leftarrow \text{(Fórmula de Larmor)}$$

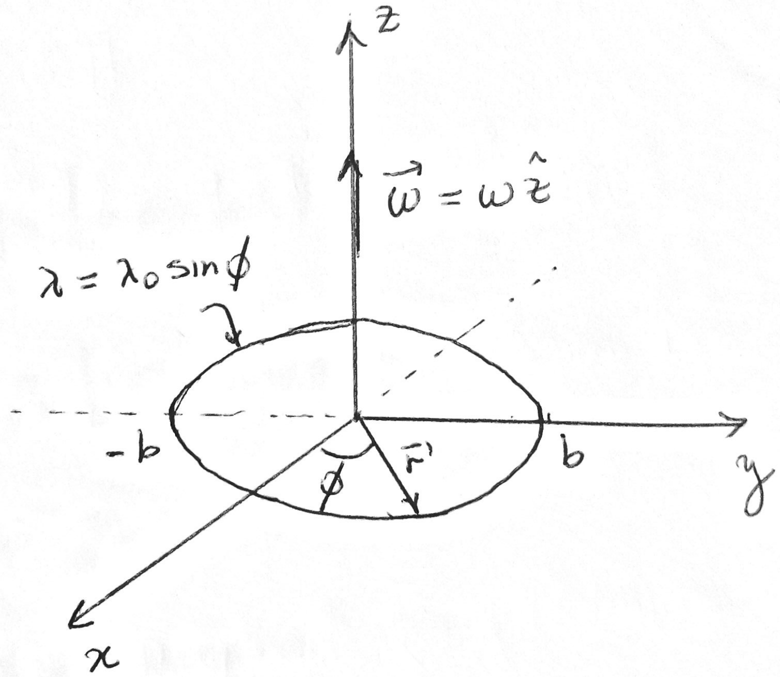
Exercício

Um anel circular de raio b e feito de material isolante está contido no plano xy e centrado na origem. O anel possui uma densidade linear não-uniforme de carga

$$\lambda(\phi) = \lambda_0 \sin\phi$$

onde $\lambda_0 = cte$ e ϕ é ângulo azimutal. Essa pode ser considerada a configuração em $t=0$.

O anel passa a girar com velocidade angular constante ω em torno do eixo z. Determine a potência P irradiada

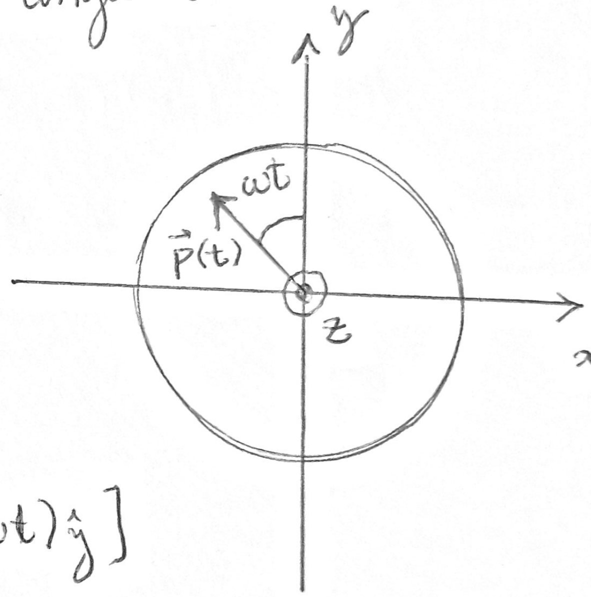


O momento de dipolo em $t=0$ pode ser obtido por

$$\vec{p}(0) = \int \lambda(\phi)\,\vec{r}\,'\,dl' = \int_0^{2\pi} (\lambda_0 \sin\phi)(b\cos\phi\,\hat{x} + b\sin\phi\,\hat{y})\,b\,d\phi$$

$$= \lambda_0 b^2 \int_0^{2\pi} \sin^2\phi\,d\phi\;\hat{y} = \pi b^2 \lambda_0\,\hat{y} = \vec{p}_0 = p_0\,\hat{y}$$

Num instante de tempo $t>0$, esse momento de dipolo gira em torno do eixo z com velocidade angular ω



$$\vec{p}(t) = p_0\left[-\sin(\omega t)\,\hat{x} + \cos(\omega t)\,\hat{y}\right]$$

Portanto

$$\dot{\vec{p}}(t) = \omega p_0\left[-\cos(\omega t)\,\hat{x} - \sin(\omega t)\,\hat{y}\right]$$

$$\ddot{\vec{p}}(t) = \omega^2 p_0\left[\sin(\omega t)\,\hat{x} - \cos(\omega t)\,\hat{y}\right]$$

$$= -\omega^2\,\vec{p}(t)$$

Potência ~~d~~ irradiada

$$P = \frac{\mu_0\,\ddot{p}^2}{6\pi c} = \frac{\mu_0}{6\pi c}\,\omega^4 p_0^2 = \frac{\pi\,\mu_0\,b^4 \lambda_0^2\,\omega^4}{6c}$$