# MAT0105 – Geometria Analítica
# 1/2020

IME-USP

## Lista Complementar 1
## Pontos Simétricos

*Profa. Ana Paula Jahn*
*anapjahn@gmail.com*

# Exercícios 1, 2, 7, 8, 10, 11

- Trata de “**pontos simétricos**”
  - Em relação a uma reta
  - Em relação a um ponto

Ideia de “Espelhamento de uma figura”

- Envolve os conceitos de
  - **Reflexão em relação a uma reta**
    - Simetria axial ou Simetria Ortogonal
  - **Reflexão em relação a um ponto**
    - Simetria central ou

  Rotação de meia volta

Ideia de “Girar/Rodar meia volta”

- **Reflexão** em relação a uma reta

- **Rotação**

  Ideia de "Girar/Rodar" em torno de um ponto

  - Caso particular: Reflexão em relação a um ponto

- **Translação**

  Ideia de "Arrastar/deslizar" em linha reta

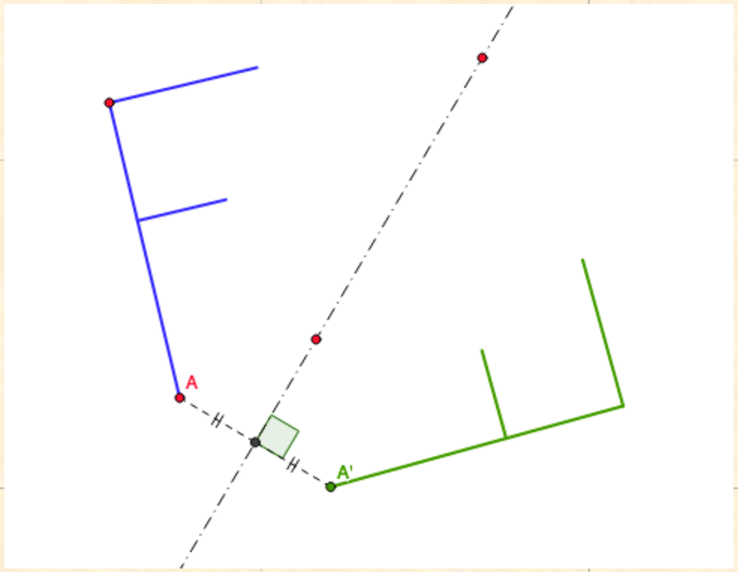
- **Homotetia**

  Ideia de Ampliar/Reduzir uma figura

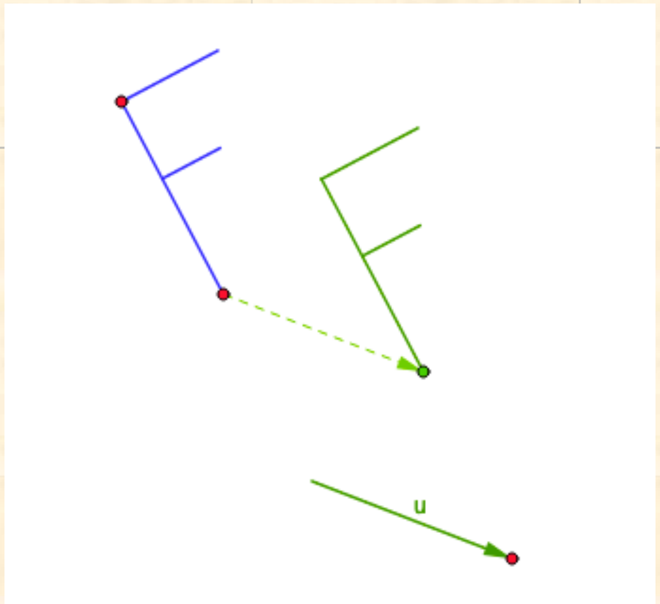
**Exemplos de *Transformações Geométricas*:**

**Funções** cujo domínio e a imagem são conjuntos de pontos

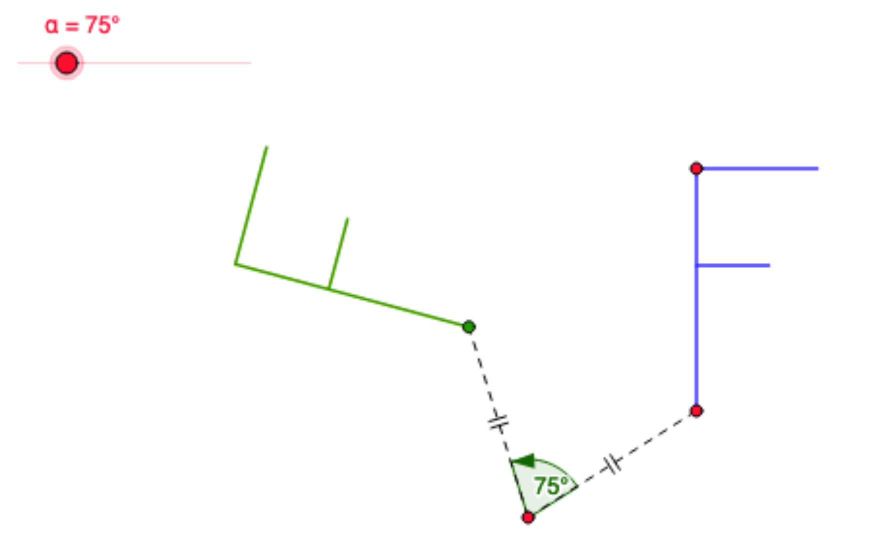
# Reflexão em reta

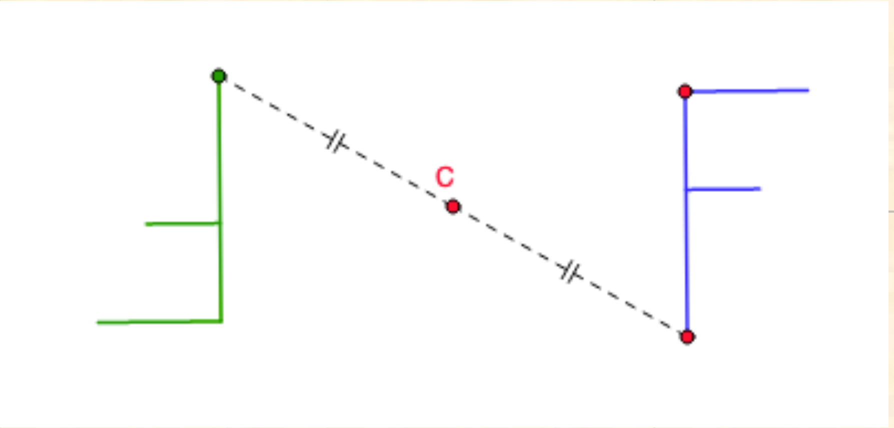



# Translação




# Rotação




# Reflexão em relação a ponto

# Transformações Geométricas

Uma **transformação geométrica** é uma função que faz corresponder a cada ponto do plano (ou do espaço), um novo ponto do plano (ou do espaço).

**Definição**
Seja Π um plano. Uma **transformação** $T$ em Π é uma função $T\colon \Pi \longrightarrow \Pi$ que faz corresponder a cada ponto $P \in \Pi$, um ponto $P' = T(P) \in \Pi$. O ponto $T(P)$ chama-se imagem de $P$ por $T$.

Se $\mathcal{F}$ é uma figura contida no plano, a imagem de $\mathcal{F}$ pela transformação $T$ é definida como $T(\mathcal{F}) = \{T(P), P \in \mathcal{F}\}$.

# Isometrias

**Definição**

Uma **isometria** é uma transformação geométrica que preserva distâncias. Isso significa que, para quaisquer pontos $P, Q \in \Pi$, sendo $P' = T(P)$ e $Q' = T(Q)$, tem-se $d(P', Q') = d(P, Q)$.

**Propriedades** – Seja $T$ uma isometria:

*i)* $T$ é **bijetora** e a inversa $T^{-1}$ é uma isometria

*ii)* $T$ leva reta em reta (conserva **alinhamento** de pontos e a relação de "estar entre")

*iii)* $T$ preserva a relação de **paralelismo** entre retas, isto é, $T$ transforma retas paralelas em retas paralelas. E também $T$ preserva a relação de **perpendicularismo**

*iv)* $T$ preserva **ângulos**

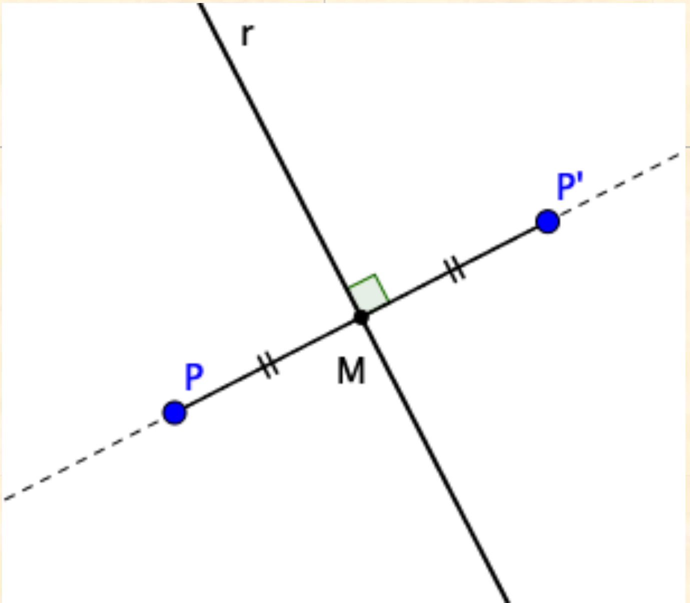
*v)* Uma figura $\mathcal{F} \subset \Pi$ e sua imagem $T(\mathcal{F}) = \mathcal{F}'$ são **congruentes**

# Reflexão em relação a uma reta

Seja $r$ uma reta no plano $\Pi$. A **reflexão** em torno da reta $r$ é a transformação geométrica $\mathcal{S}_r: \Pi \to \Pi$, definida por:

- para todo $P \in r$, $\mathcal{S}_r(P) = P$,
- Para todo $P \notin r$, $\mathcal{S}_r(P) = P'$ tal que $r$ é a mediatriz do segmento $PP'$.

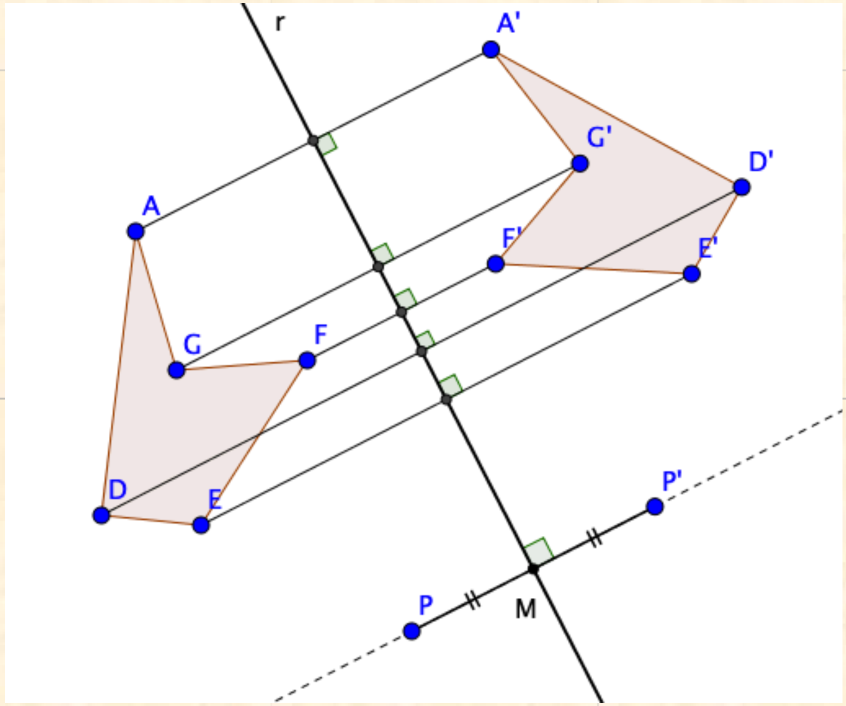
Em outras palavras, seja $s$ a reta perpendicular a $r$ por $P$, e seja $M$ a intersecção dessa reta $s$ com $r$. Então $M$ é o ponto médio do segmento $PP'$.



# Reflexão em relação a uma reta

E em termos das **coordenadas** de pontos simétricos por reflexão em reta?

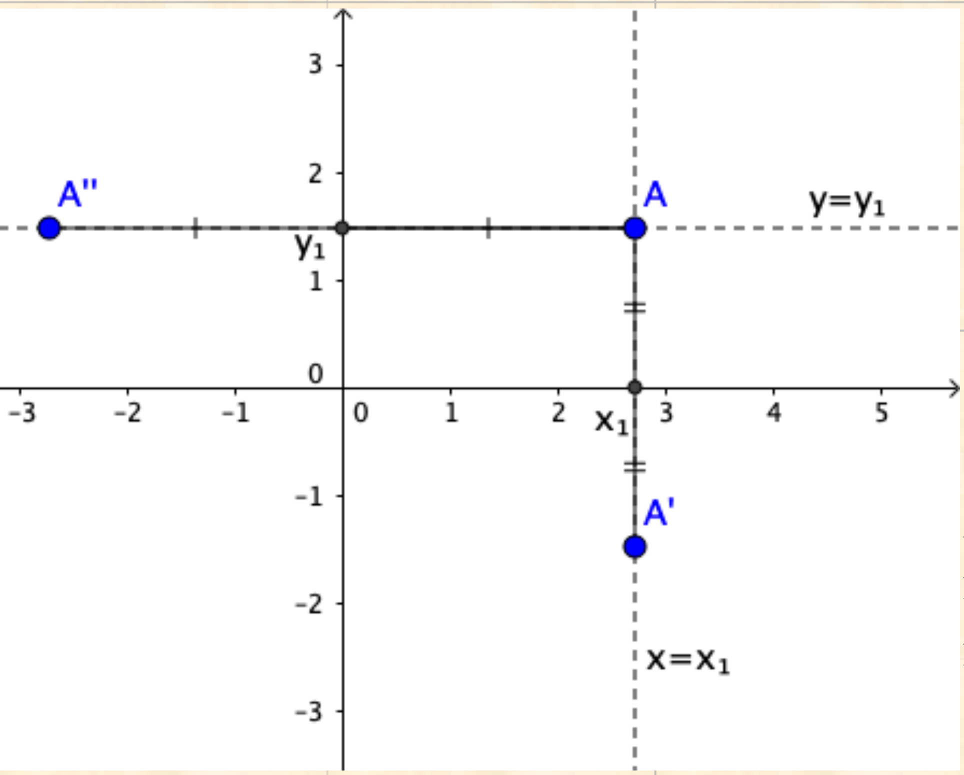
- Em relação a *OX*
- Em relação a *OY*
- Em relação à *Δ* (ou *Δ*')



# Reflexão em relação a uma reta

Supõe-se fixado um sistema de coordenadas *OXY*.

Reflexão em relação aos eixos *OX e OY.*




Dado $A = (x_1, y_1)$,

$\mathcal{S}_{OX}(A) = A' = (a, b)$ / $OX$ é mediatriz de $\overline{AA'}$

Tem-se que a reta $r$: $x = x_1$ é perpendicular a OX passando por *A*, e intercepta OX no ponto $M(x_1,0)$.

Esse ponto *M* é médio de $\overline{AA'}$, logo:

$$(x_1, 0) = \left(\frac{x_1 + a}{2}, \frac{y_1 + b}{2}\right)$$

$$x_1 = \frac{x_1 + a}{2} \Leftrightarrow a = x_1$$

$$0 = \frac{y_1 + b}{2} \Leftrightarrow b = -y_1$$

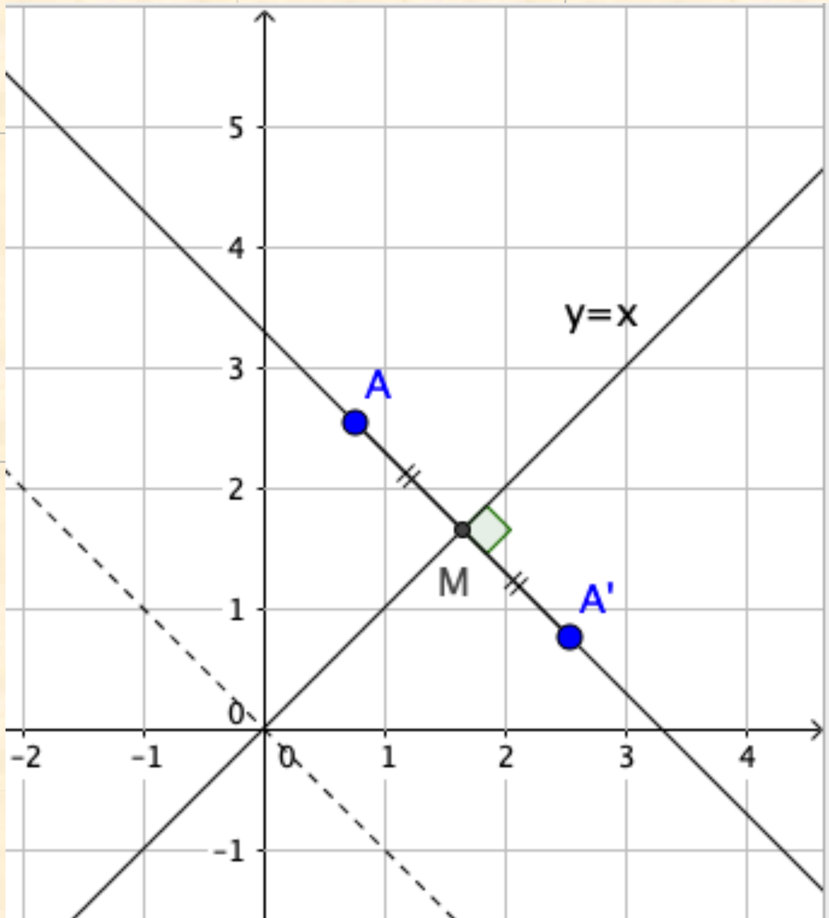
Com isso, $\mathcal{S}_{OX}(A) = \boldsymbol{A'} = (\boldsymbol{x_1}, -\boldsymbol{y_1})$

Analogamente para *OY*, considerando a reta s: $y = y_1$ e o ponto M'=(0, $y_1$), resulta que: $\mathcal{S}_{OX}(A)$ =***A''***=$(-\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{y_1})$

# Reflexão em relação a uma reta

Supõe-se fixado um sistema de coordenadas *OXY*.

Reflexão em relação à Diagonal $\Delta$ (reta y = x)




Dado $A = (x_1, y_1)$,

$\mathcal{S}_{OX}(A) = A' = (a, b)$ / $\Delta$ é mediatriz de $\overline{AA'}$

Note que a reta $r$ perpendicular a $\Delta$ passando por $A$ tem por equação $r$: $y = -x \ +(x_1 + y_1)$ e intercepta $\Delta$ no ponto

M=$\left(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_1+y_1}{2}\right)$

Esse ponto $M$ é médio de $\overline{AA'}$, logo:

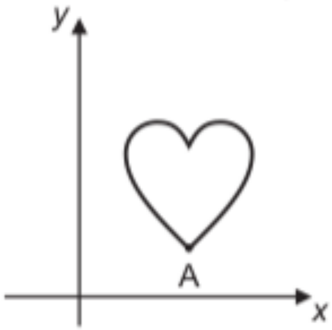
$$\left(\frac{x_1 + y_1}{2}, \frac{x_1 + y_1}{2}\right) = \left(\frac{x_1 + a}{2}, \frac{y_1 + b}{2}\right)$$

Logo, $a = y_1$ e $b = x_1$

Com isso, $\mathcal{S}_{OX}(A) = \boldsymbol{A'} = (\boldsymbol{y_1}, \boldsymbol{x_1})$

## QUESTÃO 175

Isometria é uma transformação geométrica que, aplicada a uma figura, mantém as distâncias entre pontos. Duas das transformações isométricas são a reflexão e a rotação. A reflexão ocorre por meio de uma reta chamada eixo. Esse eixo funciona como um espelho, a imagem refletida é o resultado da transformação. A rotação é o “giro” de uma figura ao redor de um ponto chamado centro de rotação. A figura sofreu cinco transformações isométricas, nessa ordem:




1ª) Reflexão no eixo $x$;

2ª) Rotação de 90 graus no sentido anti-horário, com centro de rotação no ponto A;

3ª) Reflexão no eixo $y$;

4ª) Rotação de 45 graus no sentido horário, com centro de rotação no ponto A;

5ª) Reflexão no eixo $x$.

Qual a posição final da figura?

A 


B 


C 


D 


E 


**Questão do ENEM, 2018**