IME-USP
MAT105 – *Profa. Ana Paula Jahn* – 1/2020

GABARITO DE QUESTÕES DA LISTA COMPLEMENTAR 1

11a) Seja $P' = (a, b)$ o ponto simétrico de $P = (2, -3)$ em relação ao eixo *OX*.
Por definição de simetria axial (ou reflexão em relação a uma reta), tem-se que *OX* é mediatriz de $\overline{PP'}$. Logo, OX é perpendicular a $\overline{PP'}$ e passa pelo seu ponto médio M' (isto é, $PM' = P'M'$).

No sistema de coordenadas cartesianas *OXY*, a reta perpendicular à *OX* passando por *P* é a reta (vertical) r de equação $x = 2$ (em outras palavras, a reta suporte de $\overline{PP'}$ é paralela a *OY*).

Logo, tem-se que a abscissa de P' é a mesma de P $(a = 2)$, e ainda, que $M' = (2,0)$ é o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$ (pois M' está na intersecção de *OX* com r: $x = 2$).

Assim, de $(2, 0) = \left(\frac{2+a}{2}, \frac{-3+b}{2}\right)$ vem:
$2 = \frac{2+a}{2} \Leftrightarrow 2 + a = 4 \Leftrightarrow a = 2$ (como já indicado)
e $0 = \frac{-3+b}{2} \Leftrightarrow -3 + b = 0 \Leftrightarrow b = 3$.

Daí, tem-se $P' = (2, 3)$.

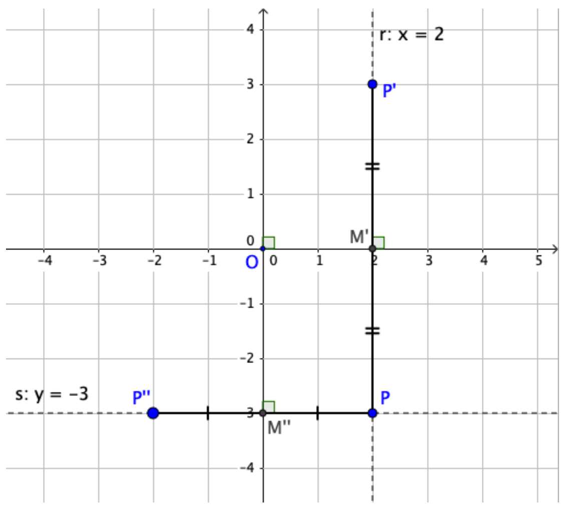
11b) Analogamente ao item (a), seja $P'' = (c, d)$ o ponto simétrico de *P* em relação ao eixo *OY*.
Por definição de simetria axial (ou reflexão em relação a uma reta), tem-se que *OY* é mediatriz de $\overline{PP''}$.

No sistema de coordenadas cartesianas *OXY*, a reta perpendicular à *OY* passando por *P* é a reta (horizontal) s de equação $y = -3$. Logo, tem-se que a ordenada de P'' é a mesma de P $(d = -3)$.
E ainda que $M'' = (0, -3)$ é o ponto médio do segmento $\overline{PP''}$ (pois M'' está na intersecção de *OY* e s: $y = -3$).

Assim, de $(0, -3) = \left(\frac{2+c}{2}, \frac{-3+d}{2}\right)$ vem:
$0 = \frac{2+c}{2} \Leftrightarrow 2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$
e $-3 = \frac{-3+d}{2} \Leftrightarrow -6 = -3 + d \Leftrightarrow d = -3$ (como já indicado)

Daí, tem-se que $P'' = (-2, -3)$.

Graficamente:



1) Seja $A' = (x', y')$ o simétrico do ponto $A = (x, y)$ em relação ao eixo *OX*.

Por definição de simetria axial (ou reflexão em relação a uma reta), *OX* é mediatriz de $\overline{AA'}$, ou seja, é perpendicular a esse segmento e passa pelo seu ponto médio M_1 (isto é, $AM_1 = A'M_1$).

No sistema *OXY*, a reta *t* perpendicular a *OX* passando por *A* é paralela a *OY*. Logo, tem-se que a abscissa do ponto A' é a mesma de A, e ainda que $M_1 = (x, 0)$, pois está na intersecção de *OX* com a reta vertical *t*.

Assim, de $(x, 0) = \left(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2}\right)$, vem:

$x = \frac{x+x'}{2} \Leftrightarrow x + x' = 2x \Leftrightarrow x' = x$ (como já indicado)

e $0 = \frac{y+y'}{2} \Leftrightarrow\ y + y' = 0 \Leftrightarrow y' = -y$

Com isso, tem-se: $A' = (x, -y)$.

Seja $A'' = (x'', y'')$ o simétrico do ponto $A = (x, y)$ em relação ao eixo *OY*.

De forma análoga ao item anterior, a reta s perpendicular a *OY* passando por *A* é paralela a *OX*. Logo, tem-se que a ordenada do ponto A'' é a mesma do ponto *A*, e ainda que $M_2 = (0, y)$, pois M_2 está na intersecção de *OY* e a reta horizontal *s*.

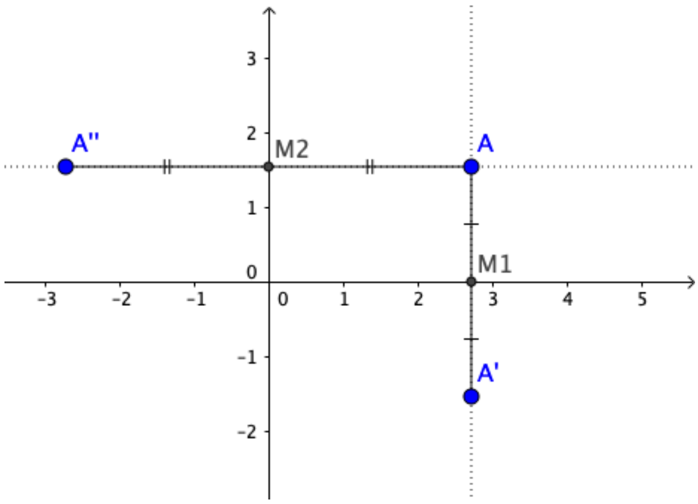
Assim, de $(0, y) = \left(\frac{x+x''}{2}, \frac{y+y''}{2}\right)$ vem:

$0 = \frac{x+x''}{2} \Leftrightarrow x + x'' = 0 \Leftrightarrow x'' = -x$

e $y = \frac{y+y''}{2} \Leftrightarrow\ 2y = y + y'' \Leftrightarrow y'' = y$ (como já indicado)

Donde $A'' = (-x, y)$.

Graficamente:



2) Seja $B' = (a, b)$ o simétrico de $B = (3, -2)$ em relação à reta $r\colon y = 5$.

Por definição de simetria axial (ou reflexão em relação a uma reta), r é mediatriz de $\overline{BB'}$, ou seja, é perpendicular a esse segmento e passa pelo seu ponto médio M.

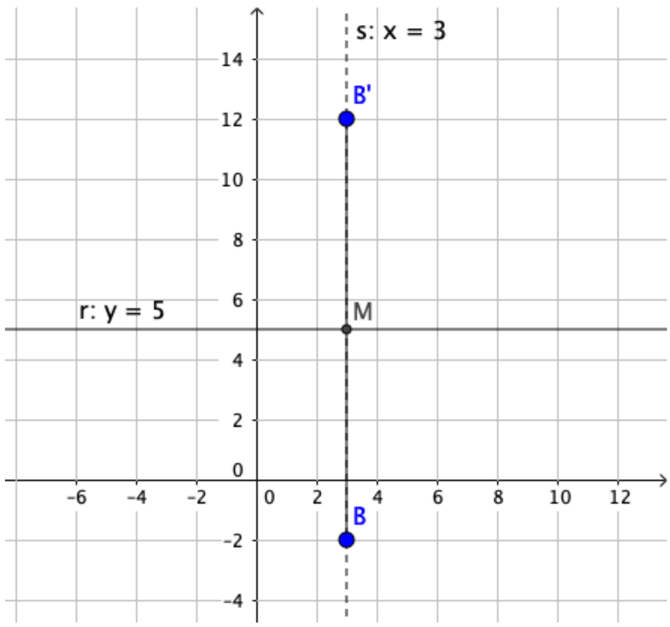
Como a reta $y = 5$ é paralela ao eixo *OX,* a perpendicular a r passando por B é a reta (vertical) s de equação $x = 3$. Com isso, em termos de coordenadas, sabe-se que a abscissa do ponto B' é a mesma de B $(a = 3)$; e ainda que o ponto médio de $\overline{BB'}$ é $M = (3, 5)$, pois é a intersecção de $s\colon x = 3$ com $r\colon y = 5$.

Assim, da igualdade $(3, 5) = \left(\frac{3+a}{2}, \frac{-2+b}{2}\right)$ vem:
$3 = \frac{3+a}{2} \Leftrightarrow 6 = 3 + a \Leftrightarrow a = 3$ (como já indicado)
e $5 = \frac{-2+b}{2} \Leftrightarrow 10 = -2 + b \Leftrightarrow b = 12$

Donde $\mathrm{B}' = (3, 12)$

Esse exercício é análogo ao 11a) e à generalização do exercício 1, considerando que *OX* sofreu uma translação vertical de 5 unidades no sentido positivo do eixo OY. Note que $d(B, M) = d(B, r) = 7\ u.c.$). Daí a ordenada de *B'* ser obtida acrescentando-se 14 unidades à ordenada de B (que corresponde a $2\ d(B, M)$ ou $2\ d(B, r)$).

Graficamente:



7) Seja A' o simétrico de $A = (a, b)$ com relação à Δ (reta $y = x$, bissetriz dos quadrantes ímpares).

Mostremos que A' tem coordenadas (b, a).

Para isso, seja a seguinte construção auxiliar:

- Traçar a reta *r* paralela ao eixo *OX* passando por *A* e seja *B* o ponto de intersecção dessa reta *r* com a diagonal Δ. Nota-se que a reta *r* tem por equação *y=b*.

- Analogamente, traçar a reta *s* paralela ao eixo *OY* passando por *A* e seja *D* o ponto de intersecção dessa reta com a diagonal Δ. Nota-se que a reta *s* tem por equação *x=a*.

- Pelo fato dos pontos *B* e *D* estarem nas retas paralelas aos eixos coordenados e também na diagonal Δ, sabe-se que $B = (b, b)$ e $D = (a, a)$.

- Agora, traçar uma reta *t* paralela a *OY* passando por *B* (t: $x = b$) e uma reta *m* paralela a *OX* passando por *D* (m: $y = a$). Seja o ponto *C* a interseção de *t* e *m*. O ponto C tem coordenadas (b, a), pois tem a mesma abscissa de *D* e a mesma ordenada de *B*.

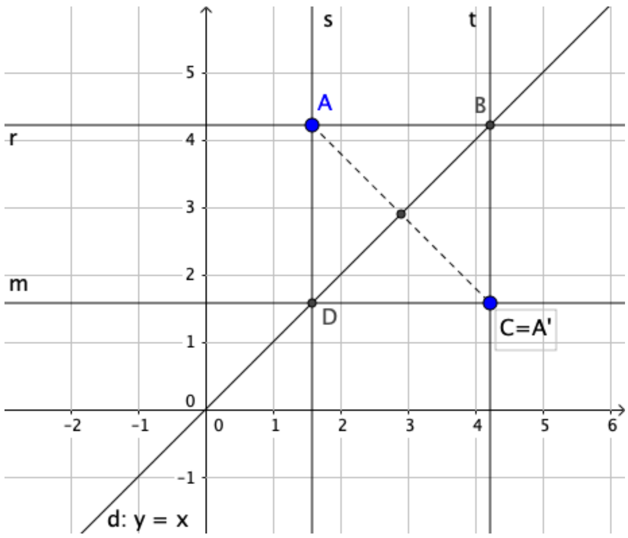
O quadrilátero *ABCD* é um quadrado. De fato:
- todos os ângulos são retos, pois cada ponto foi obtido pela intersecção de retas paralelas aos eixos coordenados que são perpendiculares;
- como os lados de *ABCD* são segmentos paralelos aos eixos coordenados, temos:
$d(A, B) = d(D, C) = |a - b|$ e $d(A, D)\ e\ d(B, C) = |b - a|$. Logo, os lados são todos congruentes.

Sendo *ABCD* um quadrado, suas diagonais são perpendiculares e se cortam em seus pontos médios. A reta suporte de $\overline{BD}$ é, portanto, mediatriz de $\overline{AC}$. Logo, *A* e *C* são simétricos em relação a $\overleftrightarrow{BC}$. Com isso, tem-se que $C = A'$.

Logo, $\mathrm{A}' = (b, a)$ é o simétrico de A em relação à diagonal Δ.

Obs: Idem para a outra diagonal: *B* e *D* são simétricos em relação à reta suporte de $\overline{AC}$.

Graficamente:



11c) Conforme o que foi demonstrado no ex. 7, o simétrico de $P = (2, -3)$ em relação à diagonal Δ $(y = x)$ é o ponto P' de coordenadas $(-3,2)$. Podemos representar uma reflexão em relação a uma reta *r* por S_r. Assim, dado $P = (2, -3)$, $S_\Delta(P) = P' = (-3,2)$.