# 7600054 — Sistemas Complexos

**Gonzalo Travieso**

2020-04-22

# Outline

# Fluxos

- Considere o sistema de tempo contínuo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathcal{S},$$

onde $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n$ é o espaço de estado do sistema e $n$ o número de variáveis de estado do sistema.

- A função $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é denominada um campo vetorial.
- Se $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é $C^k$ (contínua, $k$ vezes diferenciável), dados $\mathbf{x}_0, t_0$, para $|t - t_0|$ suficientemente pequeno existe uma única solução

$$\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0),$$

com

$$\mathbf{x}(t_0, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0.$$

# Fluxos (cont)

- Portanto
$$\mathbf{x}(t+s, t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(s, t+t_0, \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0)).$$
- Essas soluções são o fluxo de fase, ou simplesmente fluxo associado ao campo vetorial.
- Normalmente representado por
$$\varphi_t(\mathbf{x}),$$
de modo que
$$\varphi_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0).$$
Isto é, $\varphi_t(\mathbf{x})$ é a função que descreve o desenvolvimento do sistema com $t$, quando ele parte de $\mathbf{x}$. Em geral, $t_0 = 0$.

# Fluxos (cont)

- A expressão anterior pode então ser reescrita como:

$$\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}, \quad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

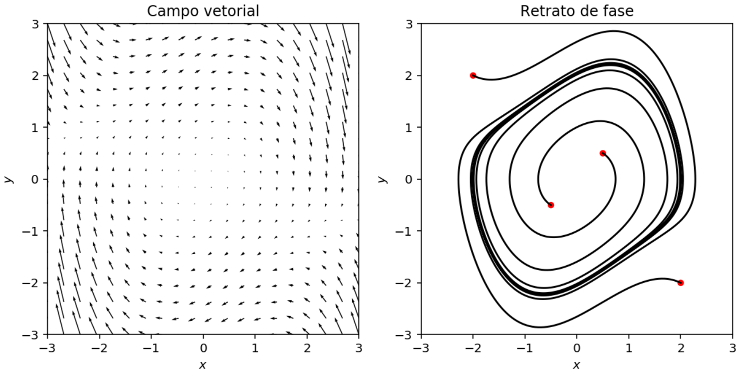
- Além disso, $\varphi_0$ é a identidade: $\varphi_0(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$.
- Também, $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$.
- Quando $t_0 = 0$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \left.\frac{d}{dt}\varphi_t(\mathbf{x})\right|_{t=0}.$$

# Órbita ou trajetória

- A órbita ou trajetória de um fluxo $\varphi$ passando pelo ponto $\mathbf{x}$ é o conjunto $\{\varphi_t(\mathbf{x}) \mid t \in \mathbb{R}\}$, orientado na direção de $t$ crescente.
- Existe apenas uma trajetória passando por um dado ponto $\mathbf{x}$.
- Portanto, se duas trajetórias se intersectam, elas precisam ser idênticas.
- O conjunto de todas as trajetórias de um fluxo é o seu retrato de fase.

# Oscilador de van der Pol: $\ddot{x} + \lambda(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$



# Definições

- Um ponto de equilíbrio é um ponto $\mathbf{x}^*$ para o qual
$$\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0.$$
- Neste caso, $\varphi_t(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*$ para $t > 0$, e portanto ele é chamado também de ponto fixo.
- Uma órbita fechada é tal que se $\mathbf{x}$ é um ponto da órbita, $\varphi_\tau(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ para algum $\tau > 0$.
- O valor de $T$ para o qual:
$$\varphi_t(\mathbf{x}) \neq \mathbf{x}, \quad 0 < t < T,$$
e
$$\varphi_T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$$
é chamado o período da órbita fechada.

# Estabilidade

- Um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}^*$ é Lyapunov-estável se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon)$ tal que

$$\forall \mathbf{x}_0, \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}^*\| < \delta \Rightarrow \|\mathbf{x}(t, 0, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*\| < \epsilon, \forall t > 0.$$

- O ponto $\mathbf{x}^*$ é dito assintoticamente estável se ele é Lyapunov-estável e também

$$\lim_{t \to \infty} \mathbf{x}(t, 0, \mathbf{x}_0) \to \mathbf{x}^*.$$

# Fluxos conjugados

- Dados dois fluxos $\varphi_t$ e $\psi_t$, se existe um homeomorfismo $\mathbf{h}$ tal que

$$\mathbf{h} \circ \varphi_t = \psi_t \circ \mathbf{h},$$

  ou equivalentemente:

$$\psi_t = \mathbf{h} \circ \varphi_t \circ \mathbf{h}^{-1},$$

  dizemos que $\varphi_t$ e $\psi_t$ são conjugados.
- Se $\mathbf{h}$ é diferenciável, diferenciando os dois lados da primeira expressão acima

$$\mathbf{Dh}(\varphi_t(\mathbf{x}))\ \frac{d}{dt}\varphi_t\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\psi_t(\mathbf{h}(x))\bigg|_{t=0},$$

  e considerando a relação entre o fluxo e o campo vetorial:

$$\mathbf{Dh}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{h}(\mathbf{x})),$$

  onde $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ é o campo vetorial associado ao fluxo $\psi_t$.

# Sistemas lineares

- O sistema linear 1D
$$\frac{dx}{dt} = ax$$
tem solução
$$x(t) = x_0 e^{at}.$$
- De forma similar, o sistema linear
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$
onde **A** é uma matriz, tem solução
$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0,$$
onde para uma matriz **M** definimos
$$e^{\mathbf{M}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{M}^k}{k!}.$$

# Autovalores

- Sabemos que, dada uma matriz M, podemos escrevê-la como

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T,$$

  onde $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ é uma matriz diagonal com os autovalores $\lambda_i$ nos elementos da diagonal e $\mathbf{U}$ é uma matriz cuja coluna $i$ é o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_i$.
- Sabemos também que a operação $\mathbf{U}\Lambda\mathbf{U}^T$ corresponde apenas a uma mudança no sistema de coordenadas.
- Portanto, o comportamento do operador $M$, independente de coordenadas, é determinado pelo conjunto de seus autovalores.

# Soluções do sistema linear

Podemos então encontrar os termos de $e^{\mathbf{A}t}$ com base nos autovalores $\lambda_j$ $(j = 1, \ldots, n)$ de $\mathbf{A}$,

- Para cada autovalor $\lambda_j$ real simples, existirá um termo da forma

$$e^{\lambda_j t}.$$

- Para cada autovalor real múltiplo de multiplicidade $m$ aparecerão $m$ termos da forma

$$t^k e^{\lambda_j t},$$

  para $k = 0, \ldots, m - 1$.

# Soluções do sistema linear (cont)

- Para cada par de autovalores simples complexos conjugados $\lambda_j = \alpha_j \pm i\omega_j$ aparecerão termos da forma

$$e^{\alpha_j t}\cos(\omega_j t), \quad e^{\alpha_j t}\sin(\omega_j t).$$

- Para cada par de autovalores complexos conjugados de múltiplicidade $m$, $\lambda_j = \alpha_j \pm i\omega_j$ aparecerão termos das formas

$$t^k e^{\alpha_j t}\cos(\omega_j t), \quad t^k e^{\alpha_j t}\sin(\omega_j t),$$

para $k = 0, \ldots, m - 1$.

## Constantes

Nos termos anteriores omitimos as constantes. Cada um dos termos irá aparecer multiplicado por uma constante adequada. Como estamos apenas avaliado o comportamento geral do sistema, e não calculando a solução exata, não nos importamos com essas constantes.

# Classificação de sistemas 2D lineares

- Os autovalores são encontrados por:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \lambda^2 - \operatorname{tr}\mathbf{A}\lambda + \det\mathbf{A} = 0,$$

portanto o que determina o caráter dos autovalores é

$$(\operatorname{tr}\mathbf{A})^2 - 4\det\mathbf{A}.$$

- Se $\det\mathbf{A} < 0$, temos dois autovalores reais distintos com sinais opostos: a origem é um ponto de sela.
- Se $\det\mathbf{A} > 0$ e $(\operatorname{tr}\mathbf{A})^2 \geq 4\det\mathbf{A}$ os autovalores são reais com o mesmo sinal:
  - Se $\operatorname{tr}\mathbf{A} < 0$ a origem é um atrator.
  - Se $\operatorname{tr}\mathbf{A} > 0$ a origem é um repulsor.

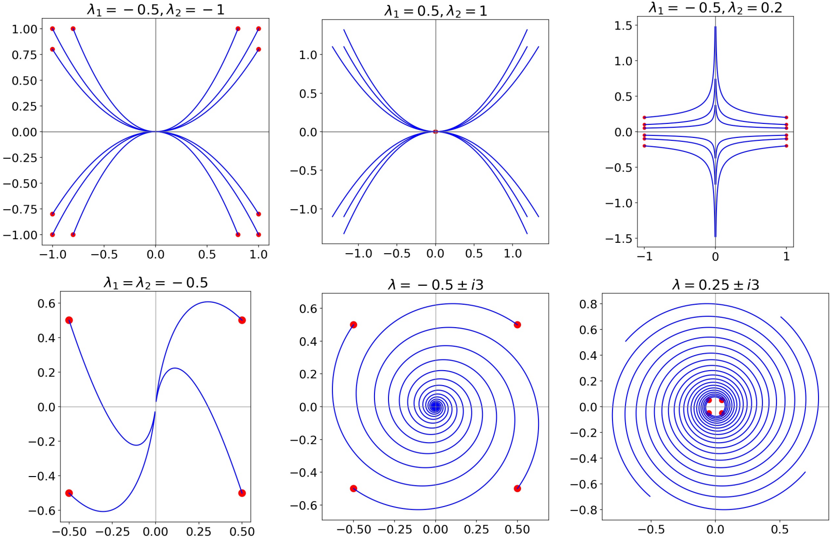
# Classificação de sistemas 2D lineares (cont)

- Se $\operatorname{tr}\mathbf{A} \neq 0$ e $(\operatorname{tr}\mathbf{A})^2 < 4\det\mathbf{A}$ os autovalores são complexos conjugados:
    - Se $\operatorname{tr}\mathbf{A} < 0$ a origem é um foco atrativo.
    - Se $\operatorname{tr}\mathbf{A} > 0$ a origem é um foco repulsivo.
- Se $\operatorname{tr}\mathbf{A} = 0$ e $\det\mathbf{A} > 0$ os autovalores são complexos conjugados com parte real zero, e a origem é um centro.

# Casos degenerados

- Se $\det \mathbf{A} = 0$ e $\operatorname{tr} \mathbf{A} \neq 0$ então um dos autovalores é 0 e o outro é $\operatorname{tr} \mathbf{A}$ e a origem é um ponto de sela com uma direção constante e a outra atrativa ou repulsiva.
- Se $\det \mathbf{A} = 0$ e $\operatorname{tr} \mathbf{A} = 0$ o único autovalor é 0 e a matriz pode ser expressa como
$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
e portanto
$$x = ay,$$
(desde que escolhamos as direções $x$ e $y$ adequadamente) isto é, o sistema se move numa única direção no espaço de estado.

# Classificação



# Subespaços

- O subespaço gerado por todos os autovetores associados com autovalores com parte real negativa é denominado o manifold estável. Uma trajetória começando em qualquer ponto do manifold estável será atraída para a origem.
- O subespaço gerado por todos os autovetores associados com autovalores com parte real positiva é denominado o manifold instável. Uma trajetória começando em qualquer ponto do manifold instável será afastada da origem.

# Linearização

- Se o sistema
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$
é não-linear, a estabilidade de um de seus pontos fixos $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0$ depende do comportamento de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ próximo de $\mathbf{x}^*$.
- Para $\mathbf{x} = \mathbf{x}^* + \mathbf{y}$ com $\|\mathbf{y}\| \approx 0$ encontramos
$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)\mathbf{y} + \mathcal{O}(\|\mathbf{y}\|^2).$$
- Neste caso, a estabilidade de $\mathbf{x}^*$ é determinada pela estabilidade de $\mathbf{y} = 0$ em
$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)\mathbf{y}.$$

# Linearização (cont)

- Portanto a estabilidade de um ponto fixo $\mathbf{x}^*$ de um sistema não-linear é determinada pelo jacobiano
$$\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*).$$
- Esse jacobiano é denominado a parte linear de $\mathbf{f}$ em $\mathbf{x}^*$.
- Mais formalmente: se $\mathbf{x}^*$ é um ponto de equilíbrio hiperbólico de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, o fluxo gerado por $\mathbf{f}$ na vizinhança de $\mathbf{x}^*$ é conjugado ao fluxo gerado por $\mathbf{Df}(\mathbf{x}^*)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^*)$ na origem.