Instituto de Física
Universidade de São Paulo

Disciplina 4300255

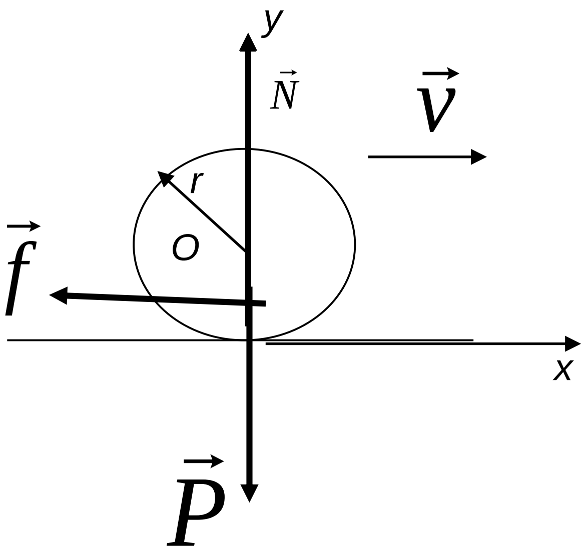
Mecânica dos Corpos Rígidos e dos Fluidos

Conservação do Momento Angular

Aplicações da 2ª Lei de Newton para Rotação

Problema 9. Lista 4. Um jogador de boliche lança uma bola de raio R = 10 cm na pista com velocidade inicial v_0 = 7 m/s. A bola é lançada de modo que ela escorrega num pequeno trecho antes de começar a rolar. No momento em que ela toca a pista, o movimento é de translação pura e o coeficiente de atrito dinâmico entre a bola e a pista é de 0,4. a) Faça um diagrama de corpo livre da bola e identifique os referenciais com os quais irá analisar as forças e/ou os torques. b) Calcule a aceleração do centro de massa da bola e a aceleração angular em torno do centro de massa quando entra em contato com o solo. c) Determine as equações horárias das velocidades linear e angular da bola enquanto escorrega e escreva a equação da condição de rolamento sem escorregamento. d) Durante quantos segundos a bola escorrega antes de principiar a rolar sem escorregar? e) Calcule as velocidades angular e de translação da bola no instante em que começa a rolar sem escorregar.

a)



b) $$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{f} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

A projeção x: $$-f = ma_{cm} \Rightarrow a_{cm} = -\frac{f}{m} = -\frac{\mu m g}{m} = -\mu g$$

$$\sum \vec{\tau}_{ext,cm} = I\vec{\alpha} \rightarrow -r\,f = I\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{r\,f}{I} = \frac{r\,\mu m g}{\frac{2}{5}mr^2} = -\frac{5\mu g}{2r}$$

Substituindo valores: $$a_{cm} = -0{,}4 \bullet 10 = -4 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha = -\frac{5 \cdot 0{,}4 \cdot 10}{2 \cdot 0{,}1} = -\frac{200}{2} = -100 \text{ rad/s}^2$$

c)

$$v_f = v_i + a_{cm}t \qquad \omega_f = \omega_0 + \alpha t$$

$$v = -\omega r$$

d) Substituindo:

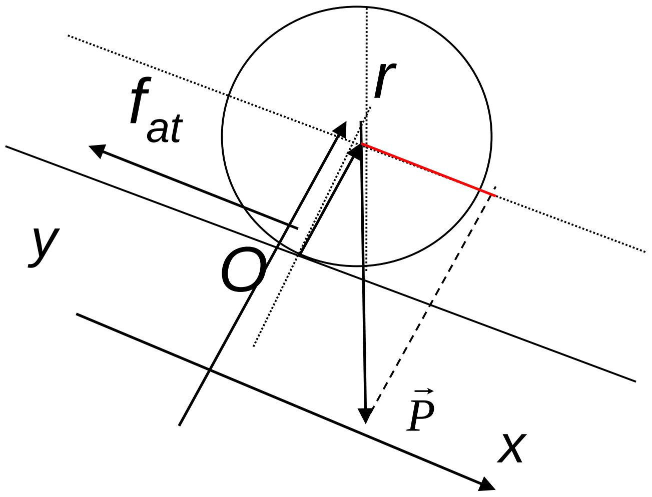
$$v_i + a_{cm}t = -(\alpha t)r \Rightarrow 7 - 4 \cdot t = -(-100 \cdot t)r \Rightarrow t(100 \cdot r + 4) = 7 \therefore t = \frac{7}{14} = 0{,}5\,\mathrm{s}$$

e)

$$v_{esc} = 7 - 4 \cdot 0{,}5 = 7 - 2 = 5\,\mathrm{m/s}$$

$$\omega_{esc} = 0 - 100 \cdot t = -100 \cdot 0{,}5 = -50\,\mathrm{rad/s}$$

Discussão: Plano inclinado



Desde o referencial centro de massa.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{CM}$$

$$\vec{f} + \vec{P} + \vec{N} = m\vec{a}_{CM}$$

A projeção x: $$f - m\,g\,sen\theta = ma_{cm}$$

A projeção y: $$-m\,g\cos\theta + N = 0$$

Na rotação, tomando como sistema de referência o CM,

$$\sum \vec{\tau}_{ext} = I\vec{\alpha} \rightarrow -r\ f = I\alpha \Rightarrow f = -\frac{I\alpha}{r}$$

Substituindo

$$-\frac{I\alpha}{r} - m\,g\,sen\theta = ma_{cm} \rightarrow -m\,g\,sen\theta = ma_{cm} + \frac{I\alpha}{r}$$

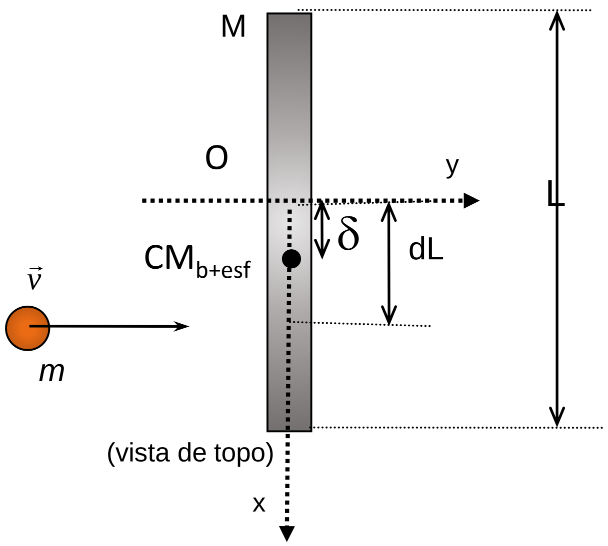
pelos referenciais adotados $a = \alpha R$

observar que não importa para onde orientar o x.

$$\therefore -m\,g\,sen\theta = ma_{cm} + \frac{2}{5}mr^2\frac{a_{cm}}{r^2}$$

$$-g\,sen\theta = a_{cm} + \frac{2}{5}a_{cm} \rightarrow -g\,sen\theta = a_{cm}\frac{7}{5} \Rightarrow a_{cm} = -\frac{5}{7}g\,sen\theta$$

7. (TIPLER CAP 10, E 50) A figura ao lado mostra uma barra delgada de comprimento L e massa M, e uma pequena esfera de massa plástica, com a massa *m*. O sistema está pousado sobre uma superfície horizontal sem atrito. A massa de plástico desloca-se para a direita, com a velocidade v, atinge a barra a uma distância d do respectivo centro de massa e fica colada na barra no ponto de contato. Determinar as expressões da velocidade do centro de massa do sistema e da velocidade angular do sistema na rotação em torno do centro de massa.



Inicialmente a barra está em repouso → o momento angular é o momento da esfera.

Após a colisão, o sistema todo se movimenta, más deve ser considerada a inércia rotacional de cada uma das partes.

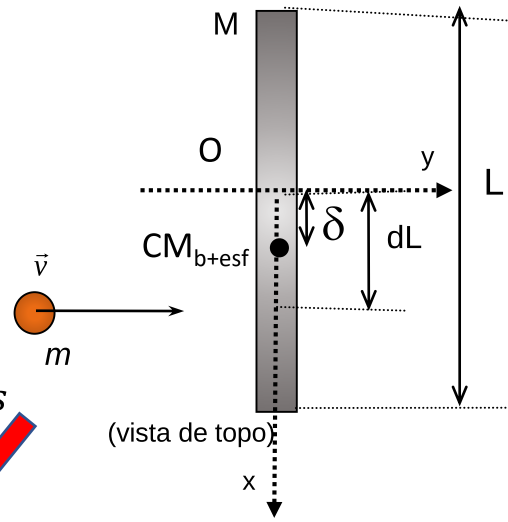
A velocidade final dependerá das inércias rotacionais da esfera e da barra.

Como não há outras forças externas agindo no sistema (ou pelo menos não ha forças na direção do movimento da barra), usamos o conceito de conservação da quantidade de movimento.

Inicialmente escolheremos a origem de coordenadas no CM da barra só. Uma vez que a esfera gruda na barra, o novo centro de massa, CM_{b+e} (Barra+ esfera), está a uma distância δ do CM original e a inércia rotacional do sistema, além da inércia rotacional da barra deve incluir o projétil uma vez grudado na mesma.

$x_{CM} = \frac{0.M+d.m}{(M+m)} = \delta = cte$ adotamos p = projétil; b = barra

A velocidade do centro de massa do sistema é: $v_{CM} = \frac{0.M + v_{p,s}.m}{(M+m)}$



Vamos analisar em primeiro lugar desde o referencial inercial do centro de massa:

$v_{p,s} = v_{p,CM} + v_{CM,s} \Rightarrow v_{p,CM} = v_{p,s} - v_{CM,s}$ por outro lado, $\cancel{v_{b,s}} = v_{b,CM} + v_{CM,s}$

por ser nula a velocidade inicial da barra em relação ao solo, $v_{b,CM} = -v_{CM,s}$

A quantidade de movimento angular inicial do sistema está composta pela quantidade de movimento do projétil mais a quantidade de movimento da barra em relação ao centro de massa do sistema, sendo

$L_{z,barra} = r \times p = r \times M v_{b,CM}$: no caso do projétil ou o correspondente no caso a barra

$$L_{z,projetil} = r \times p = r \times m_p v_{p,CM}$$

$$L_{b,CM} = \delta M(-v_{b,CM}) = \delta M(v_{CM,s}) = \delta M \frac{v_{p,s}.m}{(M+m)}$$ *porque o impulso gerado na colisao é positivo*

$$L_{p,CM} = (d-\delta) m v_{p,CM} = (d-\delta) m (v_{p,s} - v_{CM,s}) = (d-\delta) m \left(v_{p,s} - \frac{v_{p,s}.m}{(M+m)} \right) =$$

$$= (d-\delta) m v_{p,s} \left(\frac{(M+m) - m}{(M+m)} \right) = (d-\delta) m v_{p,s} \frac{M}{M+m}$$

$$L_{b,CM} = \delta M(-v_{b,CM}) = \delta M(v_{CM,s}) = \delta M \frac{v_{p,s}.m}{(M+m)}$$ porque o impulso gerado na colisao é positivo

$$L_{z\ tot} = (d-\delta)mv_{p,s}\frac{M}{M+m} + \delta M \frac{v_{p,s}.m}{(M+m)} = \frac{v_{p,s}.m.M}{(M+m)}(d-\delta+\delta) = \frac{v_{p,s}.m.M}{(M+m)}d$$

$L_{z\ f} = I\omega$ como $L_{z\ tot} = L_{z\ f}$

$$I_{barra,CM\ s} = \frac{1}{12}ML^2 + M\delta^2 \qquad I_{barra+bola} = \frac{1}{12}ML^2 + M\delta^2 + m(d-\delta)^2$$

Este problema também pode ser resolvido desde o referencial solo, em O. O momento angular inicial, é só devido ao movimento do projétil, assim: $L_0 = mv_0 d$

Esse momento angular pode ser interpretado como:

$$L_0 = L_{sistema,CM} + L_{CM,O}(*) = I\omega + (M+m)v_{CM,O} = I\omega + (M+m)\frac{v_o.m}{(M+m)}\delta = I\omega + v_o.m\delta$$

$$L_0 = L_f \qquad \therefore v_o.md = I\omega + v_o.m\frac{d.m}{(M+m)}$$

$$I\omega = v_o.md - v_o.md\frac{m}{(M+m)} = v_o.md\left(1-\frac{m}{(M+m)}\right) = v_o.md\left(\frac{M+m-m}{(M+m)}\right)$$

$$\boxed{\omega = \frac{v_o.mM}{M+m}\frac{d}{I}}$$

(*) $\vec{L}_o = \sum m_i \vec{r}_i \wedge \vec{v}_{i(o)}$

$$\vec{r}_{i,o} = \vec{r}_{i,CM} + \vec{r}_{CM,o} \therefore \vec{v}_{i,o} = \vec{v}_{i,CM} + \vec{v}_{CM,o}$$

$$\vec{L}_o = \sum m_i\left(\vec{r}_{i,CM} + \vec{r}_{CM,o}\right) \wedge \left(\vec{v}_{i,CM} + \vec{v}_{CM,o}\right) =$$

$$= \sum m_i \vec{r}_{i,CM} \wedge \vec{v}_{i,CM} + \sum m_i \vec{r}_{i,CM} \wedge \vec{v}_{CM,o} + \vec{r}_{CM,o} \wedge \sum m_i \vec{v}_{i,CM} + \vec{r}_{CM,o} \wedge \sum m_i \vec{v}_{CM,o} =$$

$$= L_{CM,o} + M\vec{R}_{CM} \wedge \vec{v}_{CM,o} + \vec{R}_{CM} \wedge M\vec{v}_{CM,o} + \ldots$$

Natureza Vetorial da Rotação

Já vimos e analisamos situações considerando a natureza vetorial da rotação, como a velocidade angular, torque e momento angular. Nas próximas aulas vamos generalizar o visto no movimento de rotação, veremos situações nas quais a direção do eixo de rotação não é fixa.

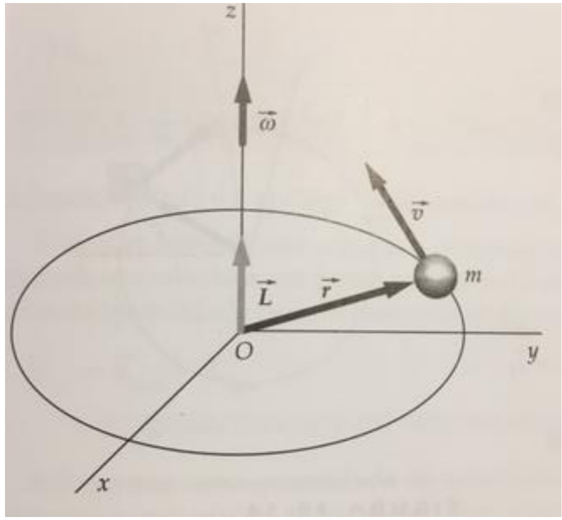
Momento Angular

Temos analisado o movimento de uma partícula com velocidade $\vec{v}$, numa posição $\vec{r}$ definida em relação à origem.

Vimos que o **Momento Angular,** $\vec{\boldsymbol{L}}$**,** da partícula, em relação a origem O, é dada por: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

De acordo com a definição de produto vetorial, $\vec{\boldsymbol{L}}$ é perpendicular ao plano formado pelos vetores $\vec{r}$ e $\vec{v}$

Se a partícula descrever um círculo no plano xy com centro na origem, as velocidades linear e angular estão relacionadas pela expressão: $v = \omega\ r$



o momento angular da partícula em relação ao centro do círculo é:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Como vemos este é um produto vetorial triplo.

Aplicando a resolução para um produto deste tipo, supondo os vetores: $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\ \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\ \vec{a}$

que se interpreta como: ***a*** escalar ***c*** na direção de *b* menos ***b*** escalar ***c*** na direção de ***a***. Se dois destes vetores forem perpendiculares, o produto escalar resulta zero. Assim da formula acima, teríamos:

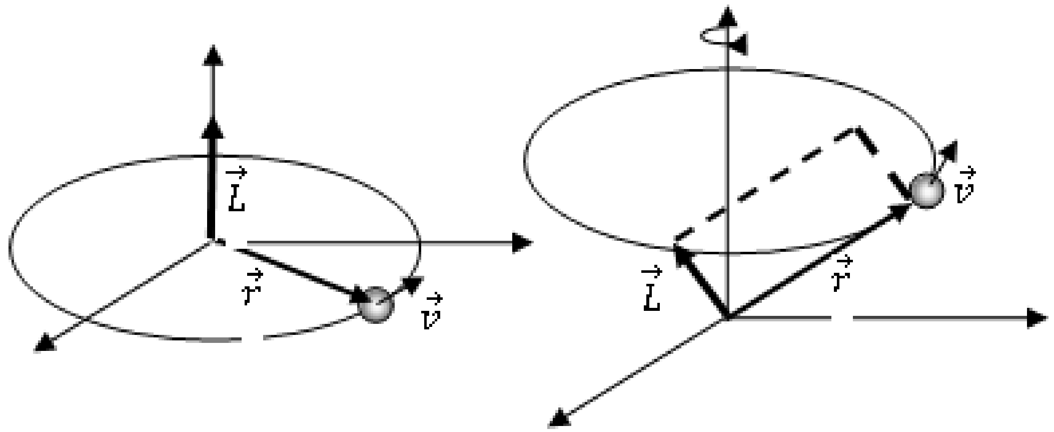
$$\vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}) = m[-(\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{r}] = m[-(\vec{\omega} \cdot \vec{r})\ \vec{r} + (\vec{r} \cdot \vec{r})\ \vec{\omega}] = mr^2\vec{\omega}$$

onde o primeiro somando resulta nulo. E $\vec{r} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r}) = mr^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}$

O momento angular tem direção coincidente com a da velocidade angular.

Este resultado não vale para um ponto qualquer. Por exemplo, quando analisamos o momento de inércia de uma partícula que se move num círculo ao redor da origem O, L possui um valor que depende do raio do círculo e da velocidade tangencial da partícula, orientado na direção do eixo z. No caso da partícula girar em torno do um eixo z a uma distância $\vec{r}$ da origem de coordenadas, $\vec{L}$

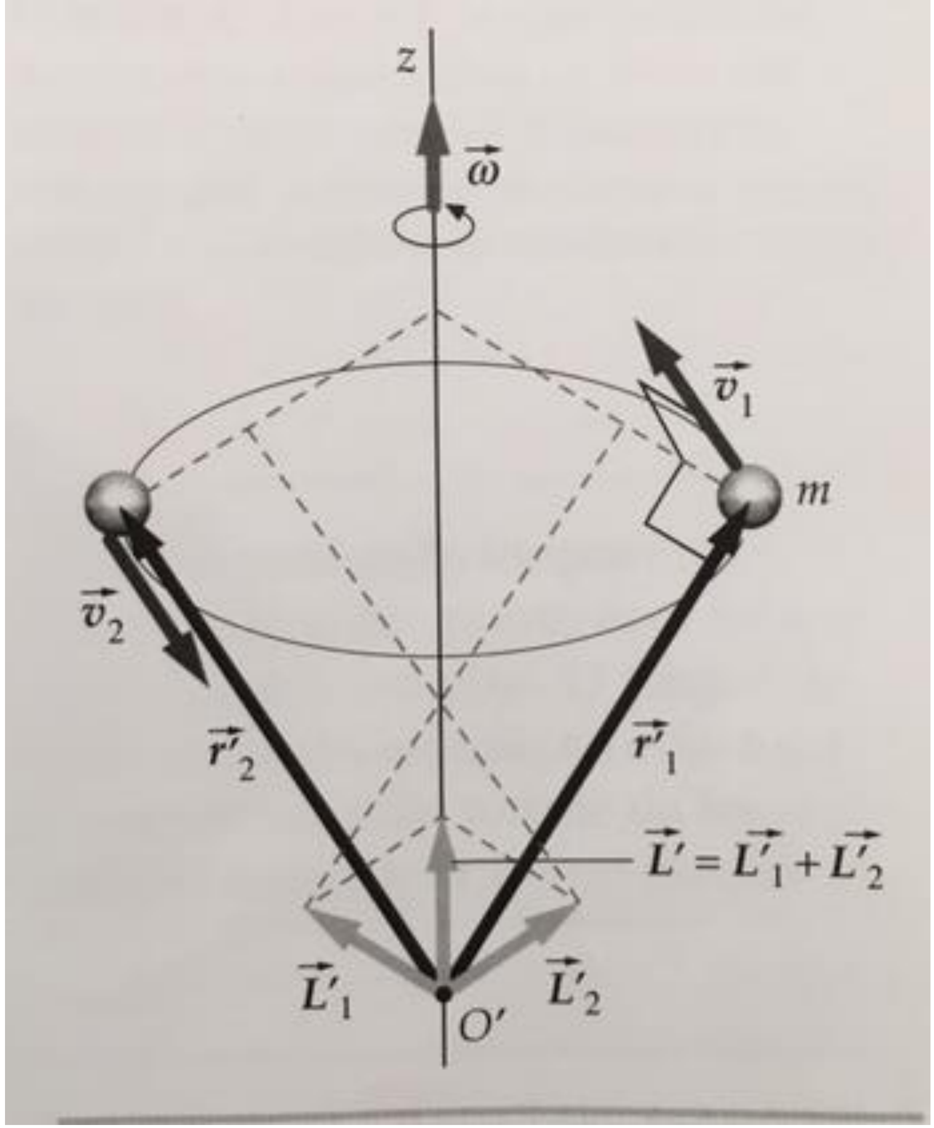
terá uma orientação que dependerá daquela do vetor $\vec{r}$



No caso de termos mais de uma partícula simetricamente localizada respeito do eixo de rotação, girando na mesma trajetória que a primeira, percebemos que o momento angular da segunda está representado de maneira similar ao primeiro momento angular e o momento angular total do sistema será a soma dos momentos angulares parciais.

Assim podemos escrever: $\vec{L} = I\vec{\omega}$

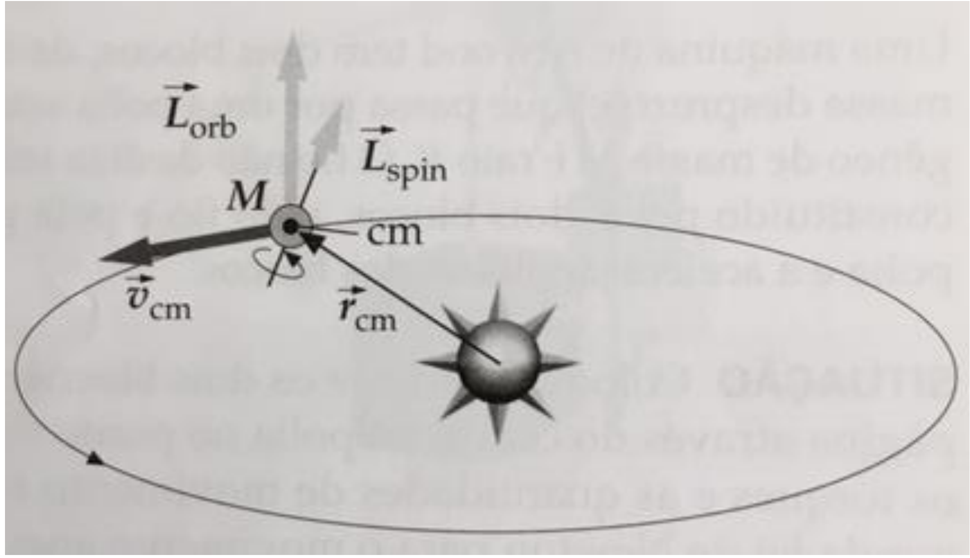
I = inércia rotacional do sistema em relação ao eixo de simetria.



O momento angular de um corpo em relação ao centro de massa é o **momento angular do spin.**

O momento angular associado ao movimento do centro de massa é o **momento angular orbital.**

A terra tem um momento angular de spin provocado pela rotação em torno do seu próprio eixo e um momento angular orbital em relação ao Sol proveniente do seu movimento de revolução anual. O momento angular total da terra em relação ao Sol é igual á soma vetorial desses dois momentos angulares.



A partir da definição de produto vetorial, $|\vec{L}| = |\vec{r}| \times |\vec{p}| = |\vec{r}| \times |m\vec{v}| = rmvsen\theta$

vemos que o módulo do momento angular está relacionado com a área (paralelogramo) formada pelos vetores r e v assim como com a altura do mesmo dada pelo seno do ângulo entre esses vetores. A direção será normal ao plano formado por ambos os vetores.

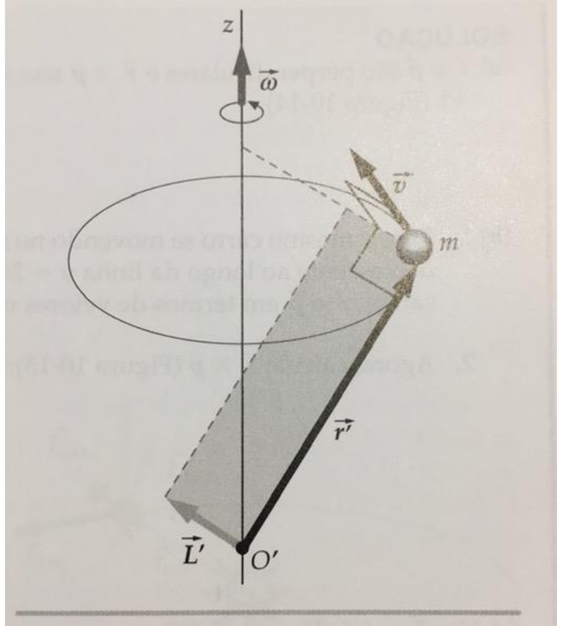


FIGURA 10-12