VARIÁVEIS ALEATÓRIAS CONTÍNUAS

Vanderlei da Costa Bueno

Instituto de Matemática e Estatística

Universidade de São Paulo, SP. Brasil

Abril de 2020

Introduzimos definição da variável aleatória contínua com argumentos semelhantes àqueles da definição das variáveis aleatórias discretas. Contudo, se o espaço amostral Ω é o resultado de um experimento quantitativo contínuo, a imagem de Ω através de uma função real X não é, certamente, enumerável.

Definição Seja $(\Omega, \Im, P)$ um espaço de probabilidade e X uma aplicação de Ω nos reais $(\Re)$. X é uma variável aleatória contínua se assume valores em um intervalo de números reais.

A variável aleatória contínua X é completamente caracterizada por sua função de distribuição (acumulada)

$$F_X(t) = P(X \leq t), \forall t \in \Re$$

que , neste caso, é uma função contínua.
Se a função de distribuição de X é diferenciável com $\frac{dF_X(t)}{dt} = f_X(t)$, definimos

Definição

Se X é uma variável aleatória contínua com função de distribuição

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(y)dy,$$

dizemos que $f_X(t)$ é a função densidade de probabilidade de X e que é (absolutamente) contínua.

É evidente que a função densidade de probabilidade é positiva, isto é, $f_X(t) \geq 0, \forall t$, que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1,$$

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

e pode-se provar que

$$\lim_{t \downarrow -\infty} f_X(t) = \lim_{t \uparrow \infty} f_X(t) = 0.$$

Exemplo

O custo mensal dos sinistros de uma Uma Cia. de Seguros é modelado por uma variável aleatória X com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ k.(1+x)^{-4} & 0 < x < \infty \end{cases},$$

onde k é uma constante.
Como devemos ter $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ e

$$1 = k\int_0^{\infty}(1+x)^{-4}dx = -\frac{k}{3}(1+x)^{-3}|_0^{\infty} = \frac{k}{3},$$

temos $k = 3$.

A função de distribuição de X é

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int_0^x 3(1+y)^{-4} dy = 1 - (1+x)^{-3} & x \geq 0 \end{cases}.$$

A probabilidade condicional de que o custo mensal ultrapasse 40 conhecendo-se que é maior do que 10 é

$$P(X > 40 | X > 10) = \frac{P(X > 40, X > 10)}{P(X > 10)} = \frac{P(X > 40)}{P(X > 10)} =$$

$$\frac{3\int_{40}^{\infty} (1+y)^{-4} dy}{3\int_{10}^{\infty} 3(1+y)^{-4} dy} = (\frac{11}{41})^3 = 0,02.$$

Lembrando que as integrais de Riemann são limites de somas infinitesimais é natural que os parâmetros de uma variável aleatória contínua sejam definidos de maneira semelhante aos da variável aleatória discreta:

Definição Se X é uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade $f(x)$, definimos a média de X, que denotamos por $E[X]$ ou μ, à "soma"

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

onde a integral deve ser absolutamente convergente, caso contrário dizemos que a média não existe.

Por vezes estamos interessados em variáveis aleatórias que resultam da transformação de outra variável. Por exemplo, seja X uma variável aleatória, $Y = g(X)$, onde g é uma função real, também é uma variável aleatória.
A medida $P(Y \leq y)$é caracterizada por

$$P(g(X) \leq y) = \int_{\{x: g(x) \leq y\}} f_X(x) dx.$$

Pode-se provar que

$$E[g(X)] = E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx.$$

No exemplo anterior, em que

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 3.(1+x)^{-4} & 0 < x < \infty \end{cases},$$

$$\mu = E[X] = 3\int_0^{\infty} x(1+x)^{-4}dx = 3\int_1^{\infty}(y-1)y^{-4}dy = 3.(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}.$$

$$E[X^2] = 3\int_0^{\infty} x^2(1+x)^{-4}dx = 2\int_0^{\infty} x(1+x)^{-3}dx = \frac{1}{3}\int_0^{\infty}(1+x)^{-2}dx = 1.$$

Em particular a esperança da n-ésima potência de variável aleatória, se existir, é denominada momento.
Definição Seja X uma variável aleatória contínua. O n-ésimo momento de X, denotado por μ_n é definida como:

$$\mu_n = E[X^n] = \int_{-\infty}^{\infty} x^n f(x)dx, \quad se \quad existir.$$

Observe que $\mu_1 = \mu = E[X]$. A esperança de potências da forma $E[(X-\mu)^n]$ são denominadas momentos centrais. **Definição** Seja X uma variável aleatória contínua com média μ. O n-ésimo momento central de X, denotado por σ_n é definido como:

$$\sigma_n = E[(X-\mu)^n] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^n f(x)dx,$$

se existir.

Em particular o segundo momento central em torno da média é a variância, interpretada como uma dispersão em torno da média.
Definição Se X é uma variável aleatória contínua com média μ e função de densidade de probabilidade $f(x)$, definimos a variância de X, que denotamos por $E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$, à integral

$$\sigma_2 = \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x) dx.$$

relembrando que a integral deve ser absolutamente convergente, caso contrário dizemos que a variância não existe. Como no caso discreto, é facil provar que $\sigma^2 = Var(X) = E[X^2] - \mu^2$. O desvio padrão de X é definido pela raiz quadrada de σ^2. No exemplo anterior temos que $Var(X) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ e $dP(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Definição Se X é uma variável aleatória contínua . A função geradora de momentos de X, $M_X(t)$, é o valor esperado $E[\exp[tX]]$, se existir, em um intervalo simétrico, $(-s, s)$, de números reais.

$$M_X(t) = E[\exp[tX]] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[tx] f(x) dx.$$

Exemplo Em uma Cia. de manufaturas, as perdas por danos à

propriedade segue uma distribuição contínua com função densidade de probabilidade $f(y) = 0,02 \exp[-0,02y], y > 0$.

A função geradora de momentos de Y é

$$M_Y(t) = E[\exp[tY]] = \int_0^{\infty} \exp[ty]0,02\exp[-0,02y]dy =$$

$$\int_0^{\infty} 0,02\exp[(t-0,02)y]dy = \frac{0,02}{0,02-t}$$

, se $t < 0,02$.
A primeira derivada de $M_Y(t)$ é $M_Y^{(1)}(t) = \frac{0,02}{(0,02-t)^2}$ e

$$E[Y] = M_Y^{(1)}(0) = \frac{1}{0,02}.$$

A segunda derivada de $M_Y(t)$ é $M_Y^{(2)}(t) = \frac{2.(0,02)}{(0,02-t)^3}$ que no número 0 vale

$$E[Y^2] = M_Y^{(2)}(0) = \frac{2}{(0,02)^2}.$$

Portanto a variãncia de Y é $\sigma^2 = E[Y^2] - E[Y]^2 = \frac{1}{(0,02)^2}$.

Distribuição uniforme.
Em um espaço amostral discreto e finito, a distribuição uniforme associa a cada elemento amostral a mesma probabilidade. Em um modelo contínuo cada ponto tem probabilidade igual a zero e a distribuição uniforme se caracteriza associando a cada intervalo de mesmo comprimento a mesma probabilidade. A variável aleatória X tem distribuição uniforme em um intervalo finito, $(a, b]$, de números reais se sua função densidade de probabilidade é :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x \leq b \\ 0 & c.c. \end{cases} .$$

A esperança de X é

$$\mu = E[X] = \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \frac{x^2}{2} |_a^b = \frac{(b-a).(b+a)}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}.$$

Distribuição uniforme.

Também temos

$$E[X^2] = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{1}{b-a}\frac{x^3}{3}|_a^b =$$

$$\frac{(b-a).(b^2+ab+a^2)}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

e portanto

$$Var(X) = \sigma^2 = E[X^2] - \mu^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

A função de distribuição de X é

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \leq x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases}.$$

e a função geradora de momentos

$$M_X(t) = E[\exp[tX]] = \int_a^b \frac{\exp[tX]}{b-a}dx = \frac{\exp[tb]-\exp[ta]}{t(b-a)}.$$

Distribuição uniforme. Exemplo Uma seguradora de automóveis cobra $R\$250,00$ pela franquia de determinada apólice e paga o máximo de $R\$1.500,00$ por uma perda total. Se o custo dos sinistros, em relação à apólice, é modelado por uma distribuição uniforme no intervalo $(0, 2.000]$, qual a probabilidade de um pagamento de perda total? Qual a probabilidade do segurado não usar a apólice?

Distribuição uniforme.

Se X é a variável custo, tem distribuição uniforme no intervalo $(0, 2000]$, com função densidade de probabilidade

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2.000} & 0 < x \leq 2.000 \\ 0 & c.c. \end{cases}.$$

A probabilidade de um pagamento de perda total é

$$P(X > 1.500) = \int_{1.500}^{2000} \frac{1}{2.000} dx = 0,25.$$

Entendemos que o segurado não usa a apólice quando a franquia é maior do que o custo do conserto e portanto, com probabilidade

$$P(X \leq 250) = \int_{0}^{250} \frac{1}{2.000} dx = 0,125.$$

Distribuição exponencial. Definição Uma variável aleatória T tem função de distribuição exponencial se, e somente se,

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \exp[-\lambda t] & t \geq 0 \end{cases} .$$

$F_T(t) = 1 - \exp[-\lambda . t]$.

$F_T(t)$ é diferenciável e tem função densidade de probabilidade

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \lambda \exp[-\lambda t] & t \geq 0 \end{cases} .$$

Distribuição exponencial.

A função geradora de momentos de T é dada por

$$M_T(t) = E[\exp[t.T]] = \int_0^\infty \exp[tx]\lambda \exp[-\lambda.x]dx =$$

$$\int_0^\infty \lambda \exp[-x.(\lambda - t)]dx = \frac{\lambda}{\lambda - t}, t < \lambda.$$

com primeira e segunda derivadas iguais a $M_T^{(1)}(t) = \frac{\lambda}{(\lambda-t)^2}$ e $M_T^{(2)}(t) = \frac{2.\lambda.(\lambda-t)}{(\lambda-t)^4}$, respectivamente. No ponto zero temos

$$\mu = E[T] = M_T^{(1)}(0) = \frac{1}{\lambda}$$

e $E[T^2] = M_T^{(2)}(0) = \frac{2}{\lambda^2}$ de forma que

$$\sigma^2 = Var(T) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Observe que a média de T é o inverso de seu parâmetro.

Distribuição exponencial.
Exemplo Uma Cia. de Seguros tem observado que o custo dos sinistros de aeronaves de porte médio é modelado por uma variável aleatória com função de distribuição

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - \exp[-0,001t] & t \geq 0 \end{cases},$$

isto é, X tem distribuição exponencial. A probabilidade de um sinistro com custo maior do que 4.000 é

$$P(X > 4.000) = 0,001 \int_{4.000}^{\infty} \exp[-0,001x]dx = \exp[-4] = 0,018.$$

Distribuição exponencial.

Teorema T é uma variável aleatória contínua com a propriedade de falta de memória se, e somente se, T tem distribuição exponencial.

Prova

A condição suficiente vale, isto é, se T tem distribuição exponencial, temos

$$P(T > t+s) = \exp[-\lambda(t+s)] = \exp[-\lambda t].\exp[-\lambda s] = P(T > t).P(T > s)$$

e T tem falta de memória .

A condição necessária está demonstrada nas notas do professor.

Distribuição exponencial.
Exemplo

Uma industria fabrica lâmpadas especiais que ficam continuamente em operação. Caso a lâmpada dure menos do que 50 horas oferece a seus clientes a garantia de reposição. O tempo de vida útil dessas lâmpadas é modelado através da distribuição exponencial com parâmetro $\frac{1}{8.000}$. Portanto, a proporção de lâmpadas trocadas por garantia é

$$P(T \leq 50) = \int_0^{\infty} \frac{1}{8.000} \exp[-\frac{t}{8.000}]dt =$$

$$1 - \frac{1}{8.000} exp[-\frac{50}{8.000}] = 0,006.$$

Distribuição exponencial. Você acha razoável substituir uma lâmpada que já durou 5.000 horas? Como a distribuição exponencial tem a propriedade da falta de memória, a resposta é não pois uma lâmpada usada é tão boa quanto uma nova. Analiticamente podemos escrever

$$P(T > t + 5.000 | T > 5.000) = \frac{P(T > t + 5.000, T > 5.000)}{P(T > 5.000)} =$$

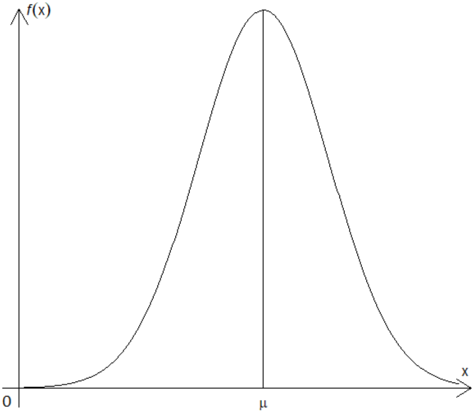
$$\frac{\exp[-\frac{1}{8.000}(t + 5.000)]}{\exp[-\frac{1}{8.000}5.000]} = \exp[-\frac{1}{8.000}t] = P(T > t).$$

Distribuição normal.
Definição Dizemos que uma variável aleatória X tem distribuição normal com parâmetros μ e σ^2, e denotamos $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, se X tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}], \ -\infty < x < \infty, \ \sigma > 0, \ -\infty < \mu < \infty.$$

Distribuição normal. A expressão de $f(x)$ parece complexa mas tem um gráfico suave em forma de um sino.

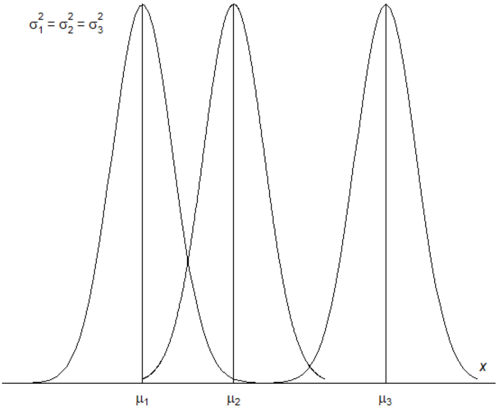
Figura 7.1 - Gráfico da curva normal



Distribuição normal.

O parâmetro μ é de escala e o gráfico de normais com mesmo σ e diferentes μ são como segue:

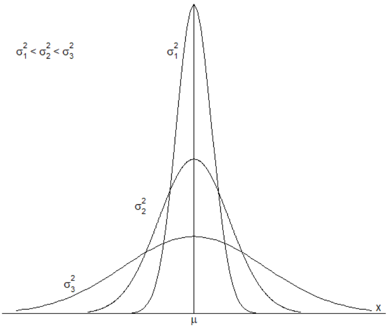
Figura 7.2 - Gráficos de curvas normais



Distribuição normal.

O parâmetro σ^2 é o da forma da densidade e quanto maior o σ a densidade é mais dispersa em torno de μ e existe chances maiores de encontrar valores, da variável, distantes de μ. Se σ é pequeno, a densidade tem forma mais concentrada em torno de μ e a chance de observarmos valores próximos de μ aumenta.

Figura 7.3 - Gráficos de curvas normais (variando σ)



Distribuição normal. O parâmetro σ^2 é o da forma da densidade e quanto maior o σ a densidade é mais dispersa em torno de μ e existe chances maiores de encontrar valores , da variável, distantes de μ. Se σ é pequeno, a densidade tem forma mais concentrada em torno de μ e a chance de observarmos valores próximos de μ aumenta.

Na realidade estamos definindo uma classe de distribuições normais pois a cada número real μ e número real positivo σ, temos uma distribuição normal.

Em particular a distribuição normal com $\mu = 0$ e $\sigma^2 = 1$, denominada de distribuição normal padrão e denotada por $Z \sim N(0, 1)$ tem função densidade de probabilidade

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{x^2}{2}], \quad -\infty < x < \infty.$$

Distribuição normal. A função de distribuição dessa variável, $Z \sim N(0,1)$, é dada por

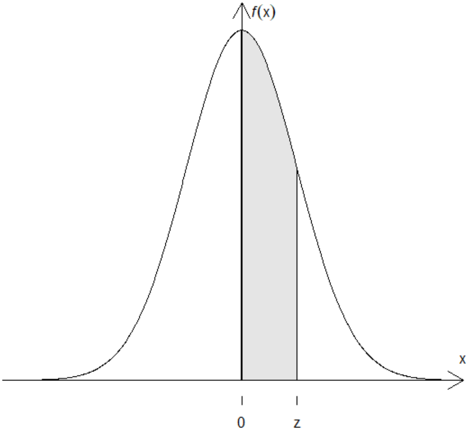
$$F(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{x^2}{2}]dx$$

mas o cálculo analítico para tal expressão é complexo e devemos utilizar técnicas numéricas. Na prática, simplificamos com o uso das tabelas estatísticas, apresentadas no final das notas.

Distribuição normal. A tabela fornece a área sob a função densidade de probabilidade entre o valor zero (0) e um valor real z à sua direita. O valor z, até sua primeira casa decimal é encontrado na primeira coluna e sua segunda casa decimal na primeira linha da tabela. O cruzamento dessa linha e coluna, no interior da tabela, nos da a probabilidade $P(0 < Z \leq z)$. Procedendo dessa maneira verificamos, por exemplo:

Distribuição normal.

Figura 7.4- Cálculo de probabilidades com a distribuição normal



$$P(0 \leq Z \leq 1,64) = 0,45;$$
$$P(0 \leq Z \leq 1,96) = 0,475;$$

Distribuição normal.
Desde que a função densidade de probabilidade da distribuição normal padrão é perfeitamente simétrica em relação a zero, concluimos que;

$$P(Z \leq -1,64) = P(Z \geq 1,64) = 0,5 - P(0 < Z \leq 1,64) = 0,05;$$

$$P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 2.P(0 < Z \leq 1,96) = 0,95;$$

$$P(-1,64 \leq Z \leq 1.96) = P(-1,64 \leq Z \leq 0) + P(0 < Z \leq 1,96) =$$

$$P(0 < Z \leq 1,64) + P(0 < Z \leq 1,96) = 0,975.$$

Distribuição normal. Reversamente, podemos encontrar o valor de z, tal que a área (probabilidade) à sua esquerda, ou direita seja fixada. Consideremos encontrar z, tal que $P(Z \leq z) = 0,8$. Observe que este valor de z deve ser positivo, caso contrário, a área à sua esquerda seria menor ou igual a $0,5$. Como z é positivo podemos escrever

$$P(Z \leq z) = P(Z \leq 0) + P(0 < Z \leq z) = 0,5 + P(0 < Z \leq z) = 0,8,$$

que implica $P(0 < Z \leq z) = 0,3$. Observando o valor mais próximo de $0,3$ no corpo da tabela, percorremos sua linha e sua coluna, no sentido contrário do que víinhamos fazendo.

Distribuição normal.
No caso obtemos $z = 0,85$.
Para encontrar o valor de z com $P(Z \leq z) < 0,5$ podemos proceder com os mesmos argumentos, por exemplo:
Se $P(Z \leq z) = 0,05$, temos que z é negativo e que $P(Z \geq -z) = 0,05$. Portanto $P(0 < Z \leq -z) = 0,45$ e concluimos que $-z = 1,64$ e $z = -1,64$.

Distribuição normal.

Conhecemos que a distribuição de uma variável aleatória é completamente determinada pela sua função geradora de momentos, $M_Z(t) = E[\exp[tZ]]$, quando esta função existir. A função geradora de momentos de Z é

$$M_Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[tz] \exp[-\frac{z^2}{2}]dz =$$

$$\exp[\frac{t^2}{2}] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(z-t)^2}{2}]dz = \exp[\frac{t^2}{2}].$$

Distribuição normal.

Podemos calcular a média e a variâcia de Z através da sua função geradora de momentos. A primeira derivada de $M_Z(t)$ é igual a $M_Z^{(1)}(t) = t.\exp[\frac{t^2}{2}]$ com $\mu = E[Z] = M_Z^{(1)}(0) = 0$.

A segunda derivada de $M_Z(t)$ é $M_Z^{(2)}(t) = \exp[\frac{t^2}{2}] + t.\exp[\frac{t^2}{2}]$ que no ponto zero vale $E[Z^2] = M_Z^{(2)}(0) = 1$. Portanto $\sigma^2 = var(Z) = E[Z^2] - \mu^2 = 1$.

Distribuição normal.

Se consideramos a transformação linear da variável aleatória Z, $X = \sigma.Z + \mu$ onde μ é um número real e σ , um número real positivo, temos que a função geradora de momentos de X é

$$M_X(t) = E[\exp[tX]] = E[\exp[t.(\sigma.Z+\mu)]] = E[\exp[t.\sigma.Z]\exp[t.\mu]] =$$

$$\exp[t.\mu]M_Z(t.\sigma) = \exp[t.\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}].$$

Acontece que tal função geradora de momentos caracteriza completamente a distribuição normal com média μ e variãncia σ^2.

Distribuição normal.
Calculando as derivadas da função geradora de momentos no ponto zero, obtemos $E[X] = M_X^{(1)}(0) = \mu$ e $E[X^2] = M_X^{(2)}(0) = \sigma^2 + \mu^2$ e concluimos que os parâmetros da distribuição Normal, denotada por $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ são sua média e variância.

Inversamente, podemos considerar a transformação reversa, $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}$ e temos

$$M_Z(t) = E[\exp[t.Z]] = E[\exp[t.(\frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma})]] = \exp[-t.\frac{\mu}{\sigma}].M_X(\frac{t}{\sigma}) = \exp[\frac{t^2}{2}].$$

Distribuição normal.
Ccncluimos que existe uma equivalência entre a normal de média μ e variância σ^2, $N(\mu, \sigma^2)$, e a normal padrão, $N(0, 1)$, através das citadas transformações e utilizaremos este resultado para cálculos envolvendo a função de distribuição de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ através da função de distribuição da normal padrão $Z \sim N(0, 1)$.
Assim, se $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, a sua função de distribuição pode ser calculada como

$$F_X(x) = P(X \leq x) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = P(Z \leq \frac{x-\mu}{\sigma}) = F_Z(\frac{x-\mu}{\sigma}).$$

Distribuição normal.

Exemplo O custo dos sinistros de certo tipo de apólice tem distribuição normal com média de $R\$1.800,00$ e desvio padrão $R\$400,00$. A probabilidade de que um sinistro escolhido aleatóriamente custe mais do que $R\$1.500,00$ é

$$P(X > 1500) = P(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{1500-1800}{400}) = P(Z > -0,75) =$$

$$P(Z \leq 0,75) = 0,5 + P(0 < Z \leq 0,75) = 0,5 + 0,27337 = 0,77.$$

Distribuição normal.

A probabilidade de que o custo esteja entre $R\$1.500,00$ e $R\$2.000,00$ é

$$P(1500 < X \leq 2000) = P(\frac{1500-1800}{400} < \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{2000-1800}{400}) =$$

$$P(-0,75 < Z \leq 0,5) = P(-0,75 < Z \leq 0) + P(0 < Z \leq 0,5) =$$

$$P(0 < Z \leq 0,75) + 0,19146 = 0,27337 + 0,19146 = 0,46.$$

A probabilidade de que o custo esteja a $1,96$ desvio padrão de sua média é

$$P(|X-1800| \leq 1,96.400) = P(-1,96.400 \leq X-1800 \leq 1,96.400) =$$

$$P(-1,96 \leq \frac{X-1800}{400} \leq 1,96) = P(-1,96 \leq Z \leq 1,96) = 0,95.$$

Distribuição normal.

Caso a Cia de Seguros deseje estabelecer uma franquia de forma que 10% das ocorrências não utilizem o seguro, devemos procurar o custo x tal que $P(X \leq x) = 0,1$. Padronizando X, a equação é equivalente a

$$P(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-1800}{400}) = 0,1 \leftrightarrow P(Z \leq \frac{x-1800}{400}) = 0,1 \leftrightarrow$$

$$P(Z \geq \frac{x-1800}{400}) = 0,1 \leftrightarrow P(0 < Z \leq \frac{1800-x}{400}) =$$

$$0,4 \leftrightarrow \frac{1800-x}{400} = 1,64 \leftrightarrow x = 1.144,$$

isto é, a franquia deve ser de $R\$1.144,00$.

Aproximação da binomial pela normal.
Consideremos o cálculo da probabilidade de que entre 10.000 segurados, 15 solicitem benefícios devido à ocorrências de sinistros. A probabilidade da ocorrência de tais sinistros foi estipulada como $p = 0,001$. Se Y é a variável aleatória definida pelo número de segurados que reclamam os benefícios, temos que Y tem distribuição binomial de parâmetros 10.000 e $0,001$, $(Y \sim B(10.000, 0,001))$. A probabilidade do evento $\{Y = 15\}$ é

$$P(Y = 15) = \binom{10.000}{15} 0,001^{15} 0,999^{9985},$$

de cálculo complicado. Para calcular tal quantidade, consideramos a aproximação da distribuição binomial pela distribuição normal com mesma média e variância da binomial.

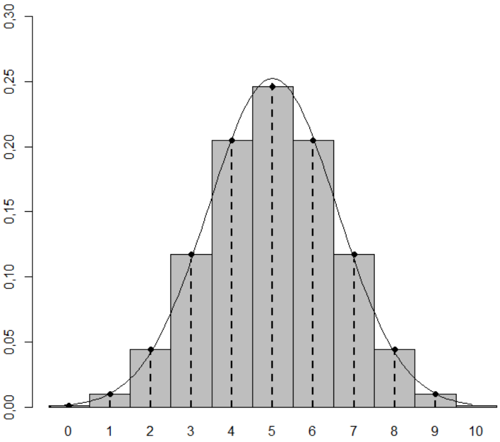
Aproximação da binomial pela normal.
Para um melhor entendimento consideremos a distribuição binomial de parâmetros $n = 10$ e $p = 0,5$. A função de probabilidade da variável aleatória $Y \sim B(10; 0,5)$ é

y	0	1	2	3	4	5
$P(Y = y)$	$0,001$	$0,01$	$0,044$	$0,117$	$0,205$	$0,246$

y	6	7	8	9	10
$P(Y = y)$	$0,205$	$0,117$	$0,044$	$0,01$	$0,001$

Aproximação da binomial pela normal. com representação gráfica:

Figura 7.5- Aproximação da binomial pela normal



Aproximação da binomial pela normal.
Uma primeira aproximação gráfica de uma variável discreta por uma variável contínua é através do histograma, o gráfico de retângulos contíguos cujas áreas somam 1. Se para cada valor da variável discreta construirmos um retângulo de base 1 e altura igual à sua probabilidade teremos a soma dessas áreas igual a 1. A base do retângulo correspondente ao valor x_i, da variável, é definida por $x_i - 0,5$ e $x_i + 0,5$, como na figura acima.
Seja X a variável aleatória que corresponde ao histograma. No caso em que n é grande a variável X converge para uma variável normal com média $\mu = np$ e $\sigma^2 = n.p.(1-p)$, a média e variância da distribuição $B(n, p)$.

Aproximação da binomial pela normal.
No exemplo em que $n = 10$ e $p = 0,5$ temos $P(Y = 5) = 0,246$, $P(Y \leq 3) = 0,172$ e $P(2 \leq Y < 6) = 0,612$.
Se $X \sim N(5; 2,5)$,

$$P(4,5 \leq X \leq 5,5) = P(\frac{4,5 - 5}{1,58} \leq \frac{X - 5}{1,58} \leq \frac{5,5 - 5}{1,58}) =$$

$$P(-0,32 \leq Z \leq 0,32) = 2.P(0 \leq Z \leq 0,32) = 2.0,12552 = 0,251,$$

uma aproximação por menos de 5 milésimos.

Aproximação da binomial pela normal.

$$P(X \leq 3,5) = P(\frac{X-5}{1,58} \leq \frac{3,5-5}{1,58}) = P(Z \leq -0,95) =$$

$$P(Z > 0,95) = 0,5 - P(0 \leq Z \leq 0,95) = 0,5 - 0,32894 = 0,171.$$

$$P(1,5 \leq X \leq 5,5) = P(\frac{1,5-5}{1,58} \leq \frac{X-5}{1,58} \leq \frac{5,5-5}{1,58}) =$$

$$P(-2,21 \leq Z \leq 0,32) = P(0 \leq Z \leq 2,21)+$$

$$P(0 \leq Z \leq 0,32) = 0,48645 + 0,12552 = 0,61.$$

Aproximação da binomial pela normal. OBS :A aproximação colocada tem justificativa rigorosa quando demonstramos o Teorema do Limite Central que aproxima soma de variáveis aleatória independentes e identicamente distribuidas por uma distribuição normal. Observe que uma variável binomial pode ser interpretada como soma de Bernoulli que são independentes e identicamente distribuidas.
Portanto, considerando o exemplo 8 do Capítulo anterior, poderíamos aproximar $Y \sim B(10.000; 0,001)$ pela distribuição normal $X \sim N(10; 9,99)$ e

$$P(Y = 15) \approx P(14,5 \leq X \leq 15,5) = P(\frac{14,5 - 10}{3,16} \leq \frac{X - 10}{3,16} \leq \frac{15,5 - 10}{3,16}) =$$

$$P(1,4 \leq Z \leq 1,74) = P(Z \leq 1,74) - P(Z \leq 1,4) = 0,45907 - 0,41924 = 0,0398.$$

O resultado da aproximação pela distribuição de Poisson foi 0,0347.

Transformação de variáveis aleatórias.

Teorema Se Z é uma variável aleatória contínua com distribuição normal com média $\mu = 0$ e variância $\sigma^2 = 1$, a variável aleatória Y, resultado da transformação $Y = Z^2$, tem função densidade de probabilidade

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} \exp[-\frac{y}{2}], \quad y > 0,$$

denominada de distribuição qui-quadrado com um grau de liberdade.

Transformação de variáveis aleatórias.

Prova Evidentemente, os valores de Y são positivos e a função de distribuição de Y é dada por

$$P(Y \leq y) = P(Z^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq Z \leq \sqrt{y}) =$$

$$\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{[} - \frac{x^2}{2}] dx = 2. \int_{0}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{[} - \frac{x^2}{2}] dx.$$

Portanto a função densidade de probabilidade de Y, $f(y) = \frac{dF(y)}{dy}$ é

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{y}} \exp[-\frac{y}{2}], \quad y > 0,$$

Transformação de variáveis aleatórias. Teorema Suponha que X é uma variável aleatória do tipo contínuo com função de densidade de probabilidade $f_X(x)$, com domínio $\Re_X = \{x : f_X(x) > 0\}$. Assuma que:
(a) $y = g(x)$ define uma transformação um a um e sobrejetora de $\Re_X$ em $\Re_Y = \{y : g(y) > 0\}$.
(b) A derivada de $x = g^{-1}(y)$, com respeito a y é contínua em $\Re_Y$.
Então $Y = g(X)$ é uma variável aleatória do tipo contínuo com função de densidade de probabilidade

$$f_Y(y) = |\frac{dg^{-1}(y)}{dy}|.f_X(g^{-1}(y)), \quad y \in \Re_Y.$$

Transformação de variáveis aleatórias.

Prova

A prova é fácil e está nas notas do professor.

A restrição de que $y = g(x)$ seja bijetiva no domínio $\Re_X$ é restritiva. Se podemos particionar $\Re_X$ em $\Re_X^1, \Re_X^2, ..., \Re_X^m$ de maneira que em cada $\Re_X i$, $g(x)$ é bijetora, podemos aplicar o Teorema em cada $\Re_X i$ e concluir que

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{m} |\frac{dg^{i^{-1}}(y)}{dy}|.f_X(g^{i^{-1}}(y)), \quad y \in \Re_Y.$$

Distribuição log-normal

Teorema Se X é uma variável aleatória contínua com distribuição normal com média μ e variância σ^2, a variável aleatória Y, resultado da transformação $Y = \exp[X]$, tem função densidade de probabilidade

$$f(y) = \frac{1}{y.\sigma.\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}], \quad y > 0.$$

denominada de distribuição log-normal.

Distribuição log-normal

Prova É evidente que os valores y que Y assume são positivos. A função de distribuição de Y é

$$F(y) = P(Y \leq y) = P(\exp[X] \leq y) = P(X \leq \ln y) =$$

$$\int_{-\infty}^{\ln y} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}]dx.$$

Portanto, a função densidade de probabilidade de Y é

$$f(y) = \frac{dF(y)}{dy} = \frac{1}{y.\sigma.\sqrt{2\pi}} \exp[-\frac{(\ln y - \mu)^2}{2\sigma^2}].$$

Distribuição log-normal

Recordemos que a função geradora de momentos da variável aleatória $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ é

$$M_X(t) = E[\exp[t.X]] = \exp[t.\mu + \frac{\sigma^2 t^2}{2}].$$

Portanto

$$E[Y] = E[\exp[X]] = M_X(1) = \exp[\mu + \frac{\sigma^2}{2}],$$

$$E[Y^2] = E[\exp[2.X]] = \exp[2.\mu + 2.\sigma^2]$$

e

$$\sigma_Y^2 = \exp[2.\mu + 2.\sigma^2] - \exp[2.\mu + \sigma^2].$$

Distribuição log-normal

Exemplo A taxa de crescimento de uma população é uma variável aleatória Y com distribuição normal com média $0,03$ e variância 0,0001. O crescimento da população, com tamanho inicial de 100.000 indivíduos no período de um ano é modelado por $Y = 100.000 \exp[X]$. Reconhecemos que a variável $\frac{Y}{100.000}$ tem distribuição lognormal com os mesmos parâmetros de X e portanto, no período de um ano esperamos uma população de

$$E[Y] = 100.000.E[\exp[X]] = 100.000 \exp[0,03 + \frac{0,0001}{2}] = 103.051.$$