Capítulo 4 – Grafos Hamiltonianos

PROBLEMA: "Volta ao redor do mundo"

Em 1856, William Hamilton inventou o seguinte brinquedo: dado um dodecaedro em cujos vértices estão indicados nomes de 20 cidades distintas, usando uma cordinha — que pode passar apenas ao longo das arestas do dodecaedro — visitar cada uma das 20 cidades exatamente uma vez e terminar na cidade de partida.

Figura 1: William R. Hamilton

Rowan

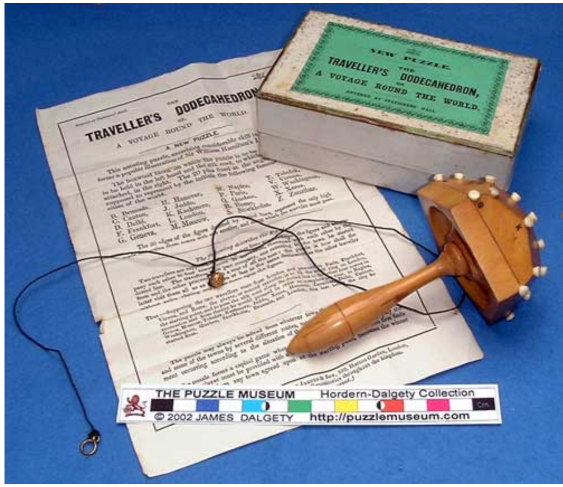
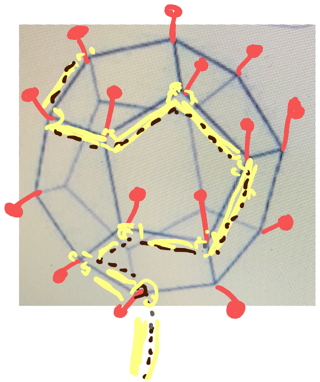


Figura 2: Dodecaedro com nomes de 20 cidades



dodecaedro
(12 faces pentag.
20 vértices)

(1805 - 1865)
matemático, físico, astrônomo

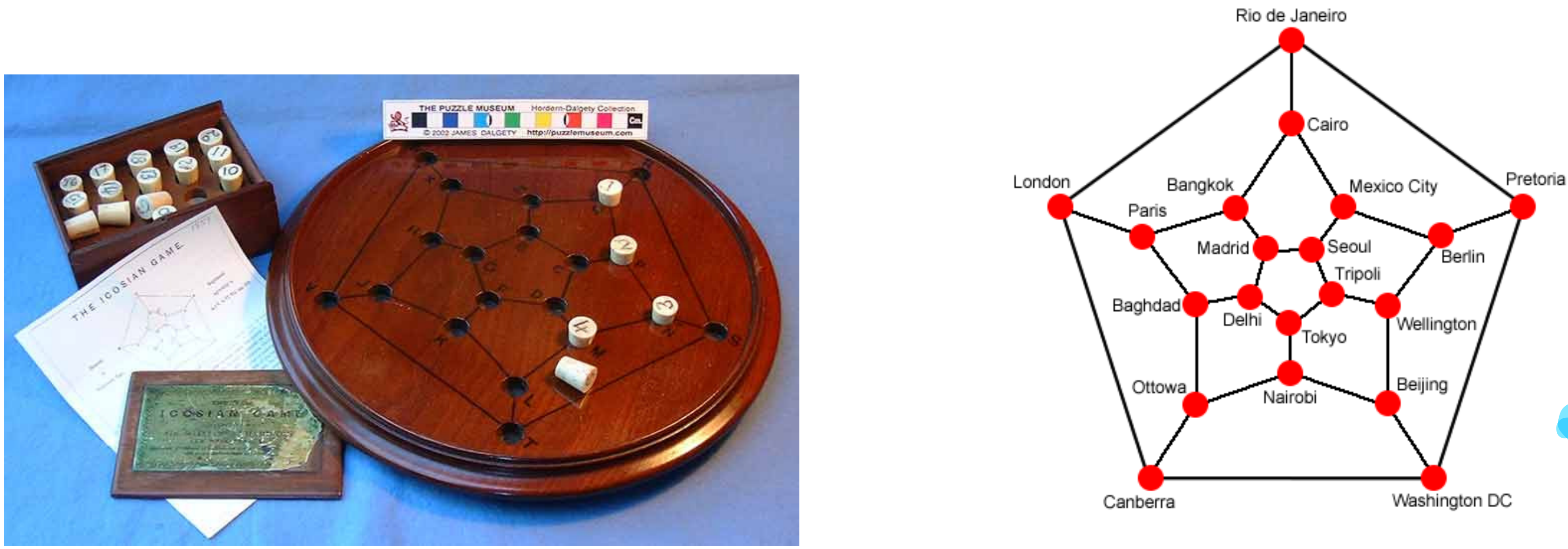
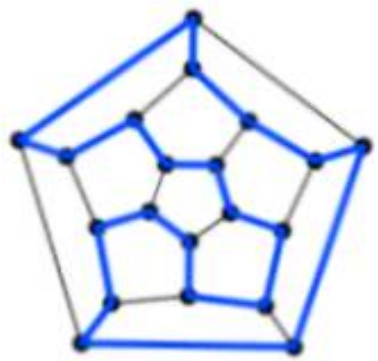


Figura 3: Versão planar do brinquedo

O problema na linguagem de grafos

Encontrar no grafo acima um circuito que passa exatamente uma vez em cada um dos seus vértices.

Em homenagem a Hamilton: **circuito hamiltoniano**



<u>Definição.</u> Um circuito (resp. caminho) que contém todos os vértices de um grafo é chamado **hamiltoniano**. Um **grafo hamiltoniano** é um grafo que contém um circuito hamiltoniano.

Problema 1: Dado um grafo G, decidir se G é hamiltoniano.

Problema 2: Dado um grafo hamiltoniano G, encontrar um circuito hamiltoniano.

- Os problemas acima são difíceis! (O Problema 1 é NP-completo.) Não se conhece algoritmos polinomiais para se resolvê-los.

$P \overset{?}{=} NP$

70

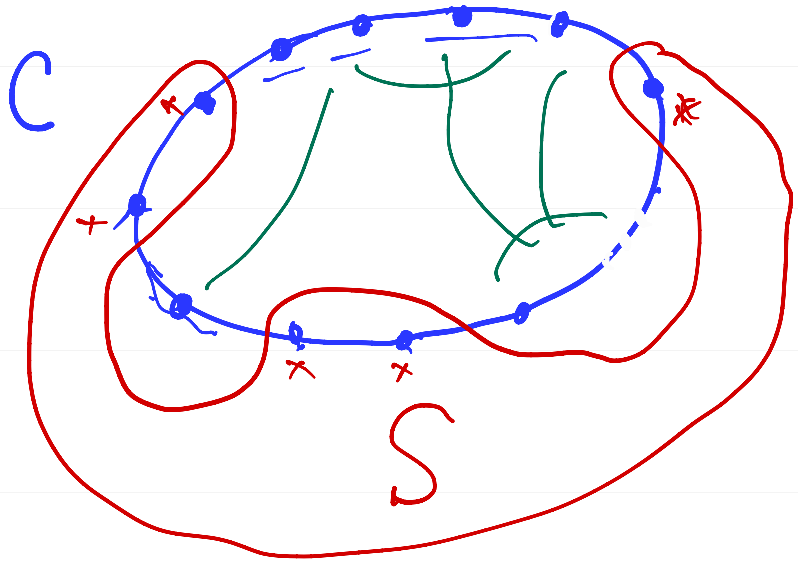
TSP

Teorema 4.1 (Condição necessária para um grafo ser hamiltoniano)
Se G é um grafo hamiltoniano, então para todo conjunto não-vazio $S \subset V(G)$,

$$c(G - S) \leq |S|.$$

\# compon.

Prova.



Seja C um circ. hamiltoniano em G.

$$C \underset{\text{subg}}{\subseteq} G$$

$$\forall S \subset V(G), \quad S \neq \emptyset$$

$$C - S \subseteq G - S$$

$$c(G-S) \leq \underbrace{c(C-S)}_{} \leq |S|$$

$\square$

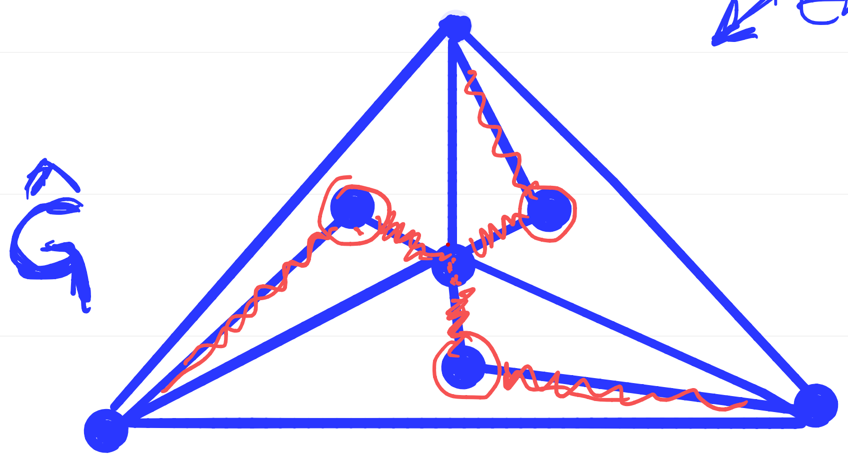
Vimos que

$$\boxed{c(G - S) \le |S| \text{ para todo conjunto não-vazio } S \subset V(G)} \quad (*)$$

é C.N. (Condição Necesssária) para um grafo ser hamiltoniano.
Note que ela não é C.S. (Condição Suficiente).

G hamiltoniano $\Rightarrow$ G satisfaz $(*)$

Exemplo que mostra que $(*)$ não é sufic.

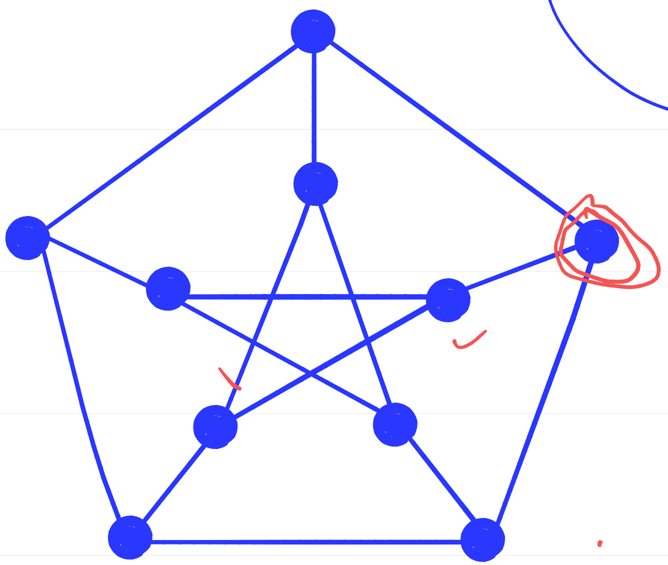


$\hat{G}$ satisfaz $(*)$

e

$\hat{G}$ não é hamiltoniano

Outro exemplo que mostra que (*) não é C.S.



G satisfaz (*)

e

G não é hamiltoniano

G Grafo de Petersen

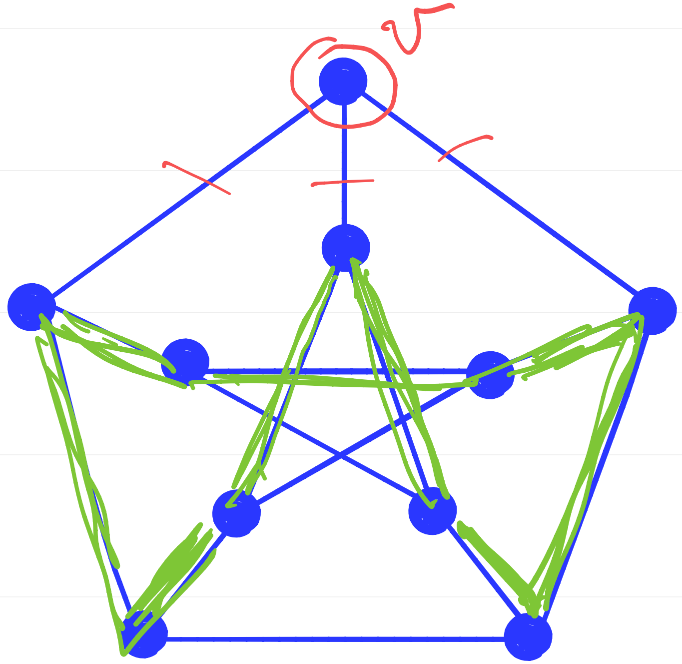
$n = 10$

Conceito novo

G é hipo-hamiltoniano

$\stackrel{\text{def.}}{\equiv}$

G não é hamiltoniano, mas $G - v$ é hamiltoniano $\forall v \in V(G)$



G Grafo de Petersen

$|V(G)| = 10$

menor hipo-hamiltoniano que existe

(Existe conceito análogo p/ grafo orientado)

Teo. 4.1

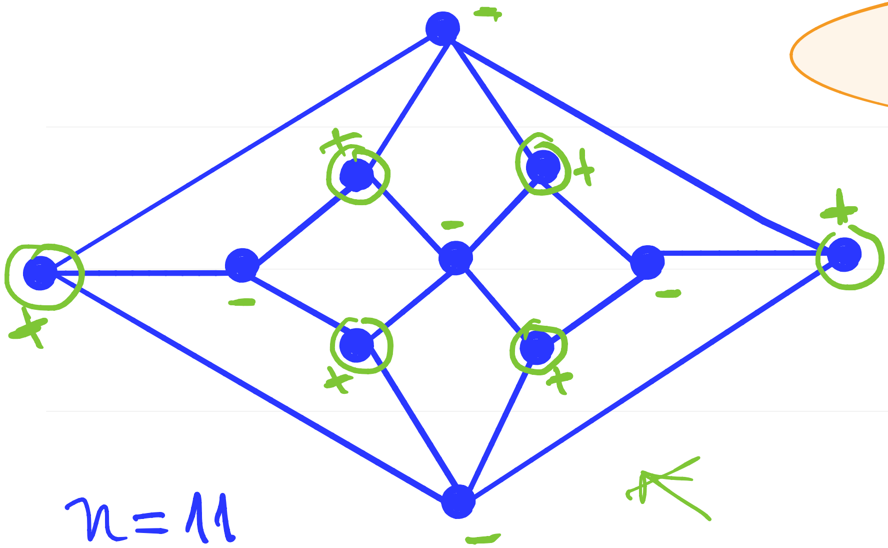
G hamiltoniano $\Rightarrow$ G satisfaz $(*)$

$(*)$ $\forall S \subset V(G),\ S \neq \emptyset$

$c(G-S) \leq |S|$

$A \Rightarrow B$

$\cong \quad \neg B \Rightarrow \neg A$

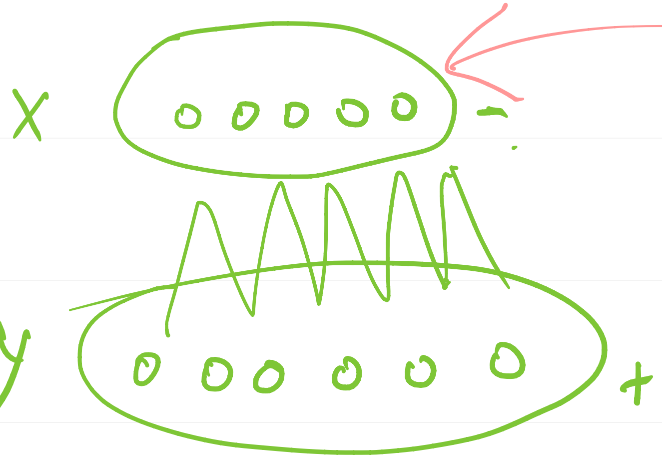


$n = 11$

Grafo de Herschel

ñ é hamilt.

(ñ satisfz $(*)$ tomando $S = X$)



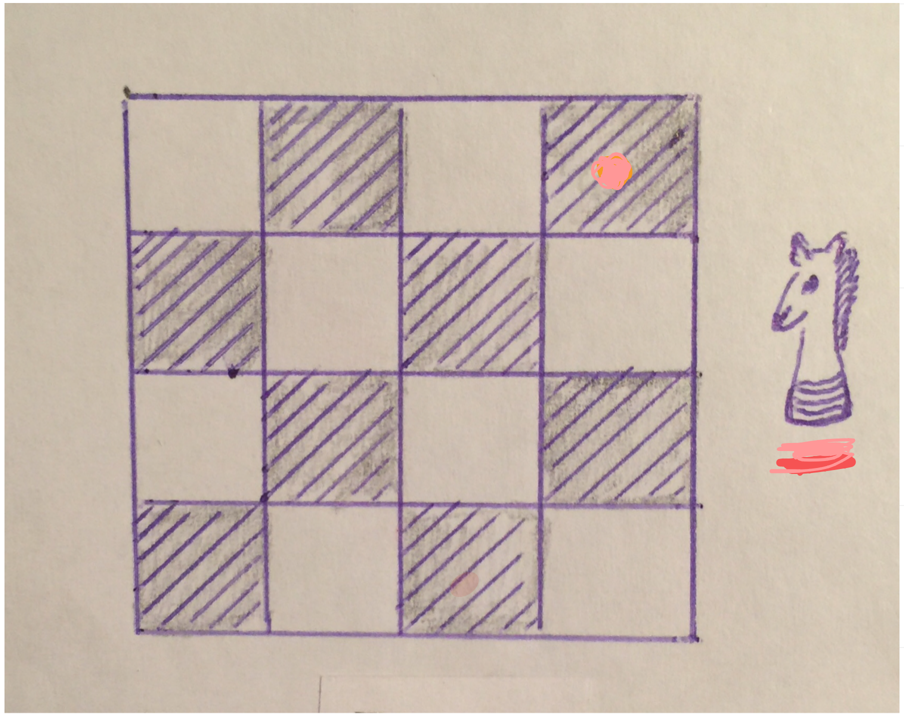
$S = X$

$\underbrace{c(G-S)}_{6} > \underbrace{|S|}_{5}$

Teo 4.1 $\overset{\text{equiv.}}{\equiv}$ G não satisfz $(*)$ $\Rightarrow$ G não é hamilt.

$T_{4\times4}$

Tabuleiro de xadrez 4×4

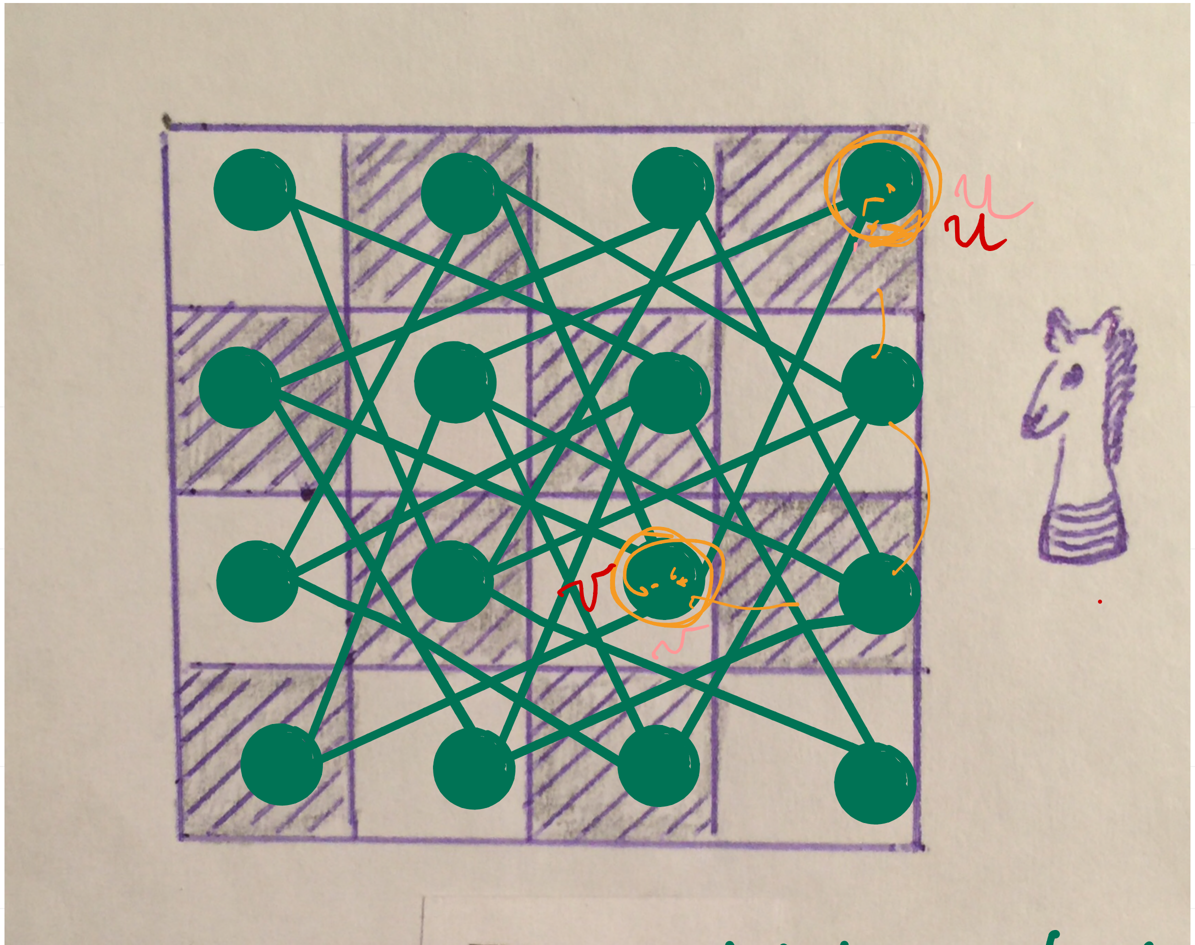


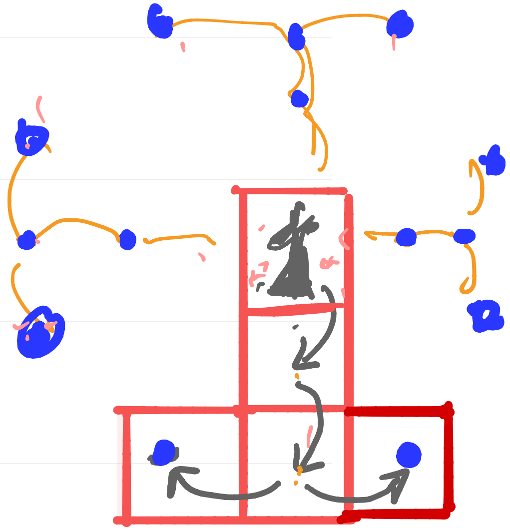
PROBLEMA

É possível, com os movimentos de um único cavalo, visitar todas as casas do tabuleiro $T_{4\times4}$ passando exatamente uma vez em cada uma delas, e voltar à casa de origem?

$T_{8\times8}$ (Grafo "cavalo") $\rightarrow$ SIM

Grafo G





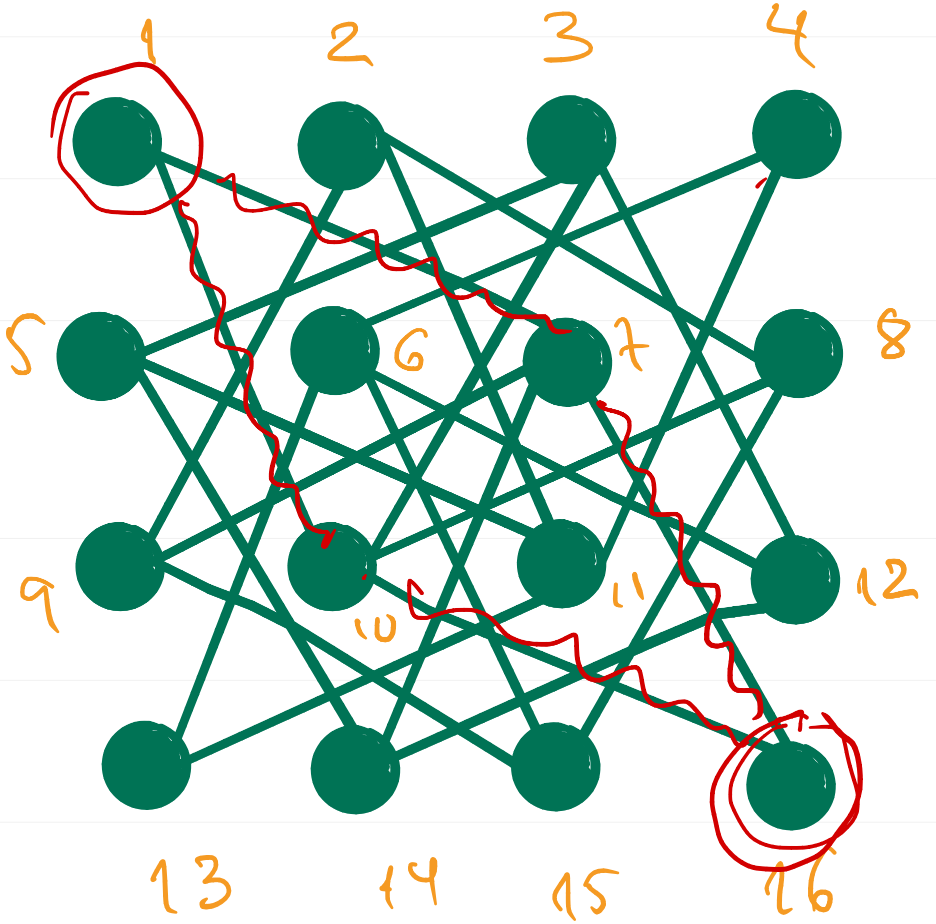
$V(G) =$ casas do tabuleiro 4×4

$A(G)$:

se o cavalo pode ir de u p/ v.

Pergunta: G tem um circuito Hamiltoniano?

Não



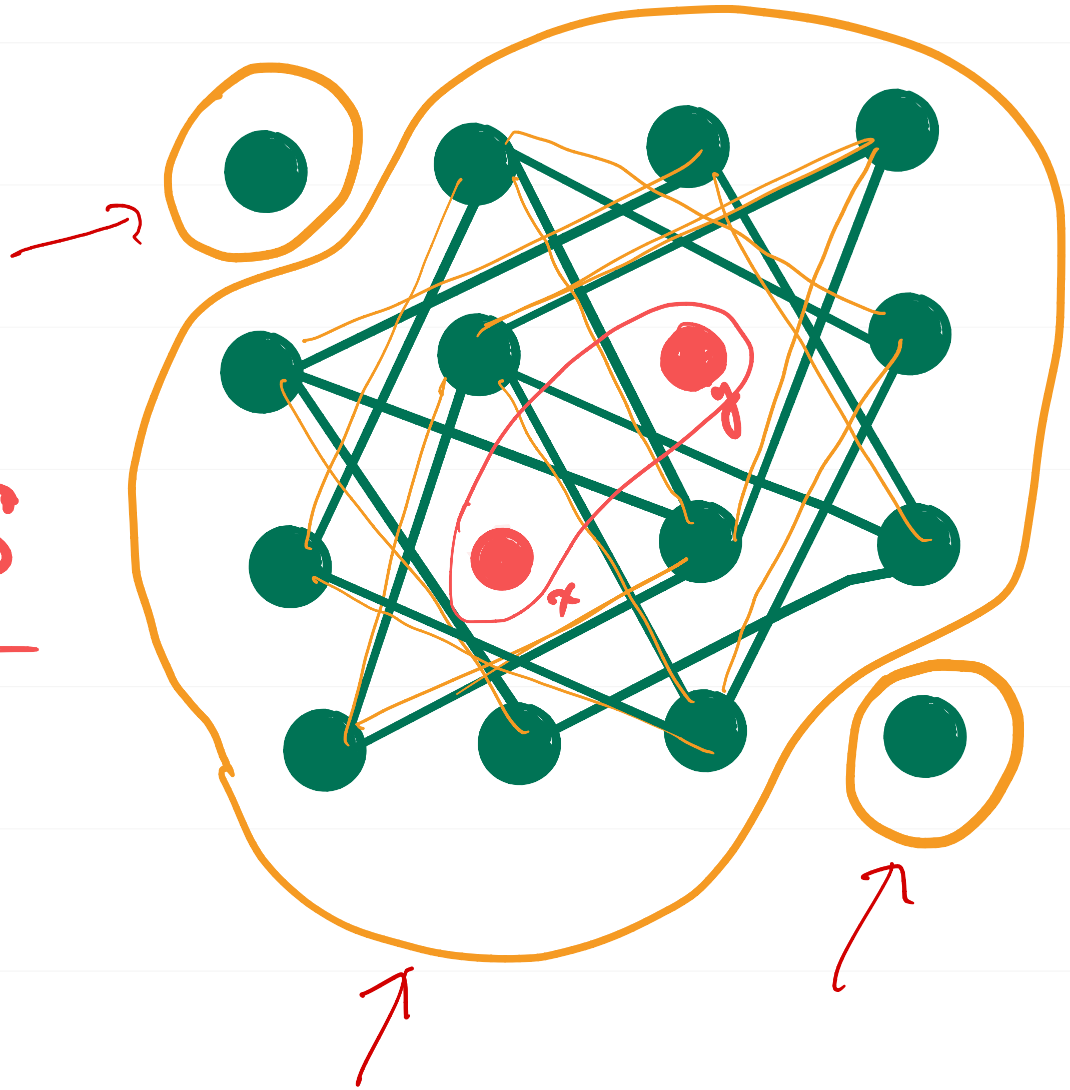
$T_{4\times 4}$

Resposta: Não!

$S = \{x, y\}$

$c(G-S) = 3$

G-S



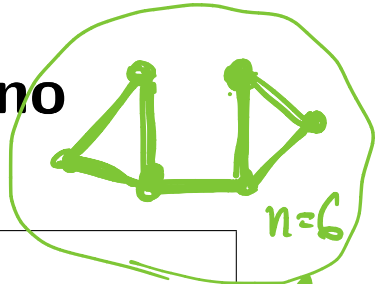
$c(G-S) > |S|$

(*) não está satisf

$\Downarrow$

G ñ é hamilt.

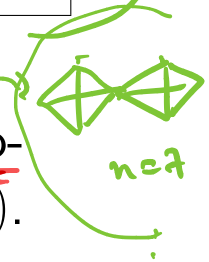
Condições suficientes para um grafo ser hamiltoniano



Melhor possível

Teorema 4.2. (Dirac, 1952)
Se G é um grafo simples de ordem $n \geq 3$ e $g(v) \geq n/2$ para todo $v \in V(G)$, então G é hamiltoniano.

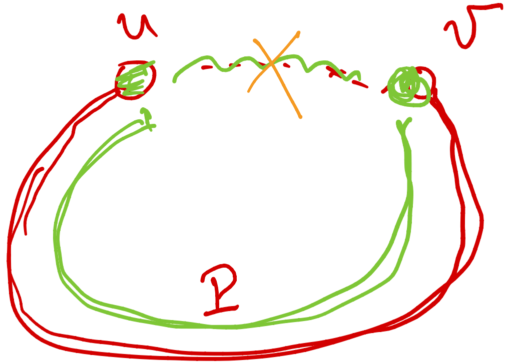
$\boxed{\frac{n}{2} - 1}$ FALSO



Prova 1. Suponha que a afirmação seja falsa. Então existe um grafo simples não-hamiltoniano *maximal* G de ordem $n \geq 3$ tal que $g(v) \geq n/2$ para todo $v \in V(G)$. Ou seja, (maximal no sentido de que) G é não-hamiltoniano, mas para qualquer par de vértices não-adjacentes u, v em G, temos que o grafo $G + uv$ é hamiltoniano.

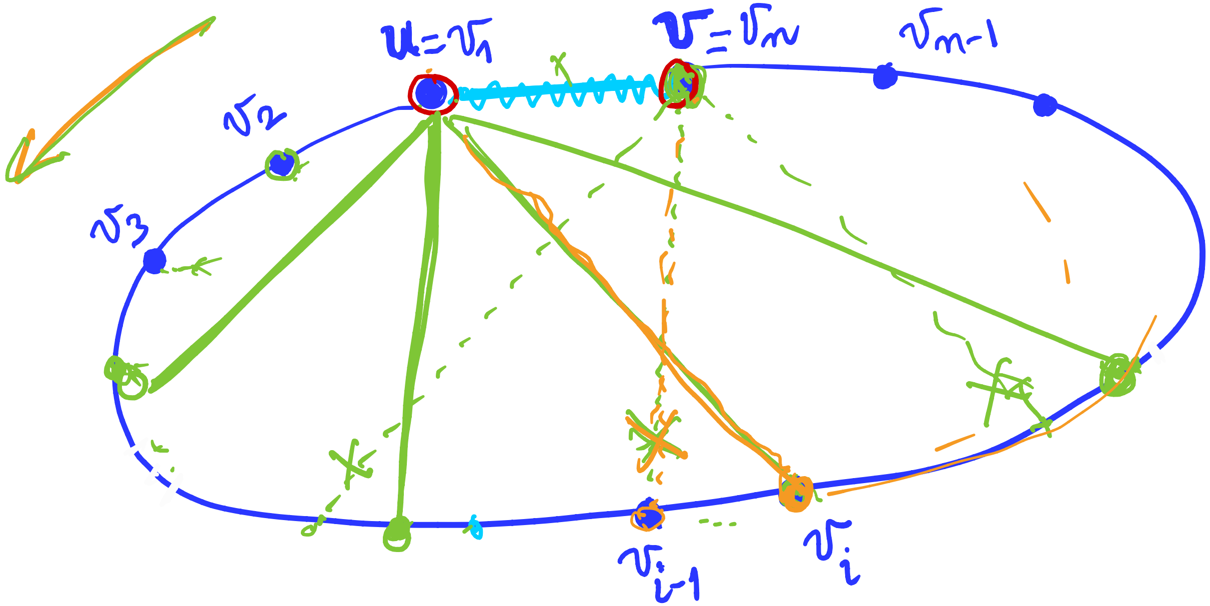
Claramente G não é completo (todo grafo completo com pelo menos 3 vértices é obviamente hamiltoniano). Portanto, existem vértices u e v não-adjacentes em G. Considere o grafo $H := G+uv$. Pela maximalidade de G, segue que H é hamiltoniano. Logo, todo circuito hamiltoniano em H deve conter a aresta uv. Então G tem um caminho hamiltoniano de u a v, digamos

$$P := (u = v_1, v_2, \ldots, v_n = v).$$



$H = G+uv$

$H = G + uv$



técnica do crossing

(cruzamento)

Note que, *se* v_i *é adjacente a* u, *então* v_{i-1} *não é adjacente a* v, pois senão

$$C = (v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_1)$$

seria um circuito hamiltoniano em G, contrariando a escolha de G.

Portanto, para todo vértice adjacente a u, existe um vértice de $V(G) \setminus \{v\}$ que não é adjacente a v. Mas neste caso,

$$\boxed{g(v) \leq n - 1 - g(u).}$$

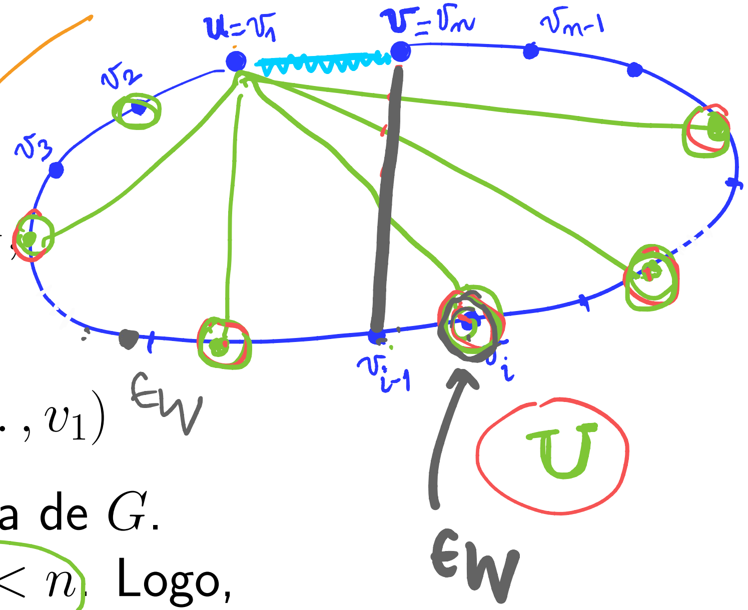
Como $g(u) \geq n/2$, temos que $g(v) \leq n - 1 - n/2 = n/2 - 1$, uma contradição. Logo, a afirmação é verdadeira, e o teorema está provado.

$$g(v) + g(u) \leq n - 1$$

!

Prova 2. Idêntica à prova acima até a existência do caminho P. [A partir desse ponto, substituir por:]

Sejam



$$U := \{v_i : v_i \text{ é adjacente a } u\},$$
$$W := \{v_i : v_{i-1} \text{ é adjacente a } v\}.$$

Então $U \cap W = \emptyset$, pois caso contrário

$$C = (v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n, v_{i-1}, v_{i-2}, \ldots, v_1)$$

seria um circuito hamiltoniano em G, contrariando a escolha de G.

Por outro lado, como $u \notin U \cup W$, resulta que $|U \cup W| < n$. Logo,

$$n > |U \cup W| = |U| + |W| - \underbrace{|U \cap W|}_{=\emptyset} = g(u) + g(v) \geq n/2 + n/2 = n.$$

uma contradição. □

A prova do Teorema 4.2 motivou o seguinte resultado, cuja prova segue analogamente. Note que o Teorema 4.2 é um corolário do Teorema 4.3.

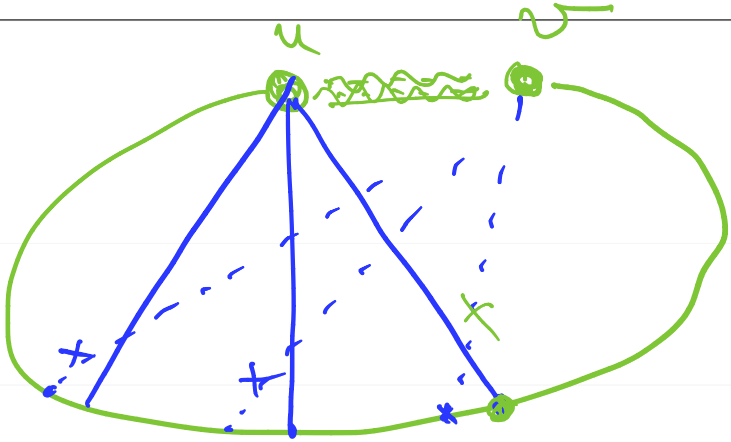
Teorema 4.3. (Ore, 1960)

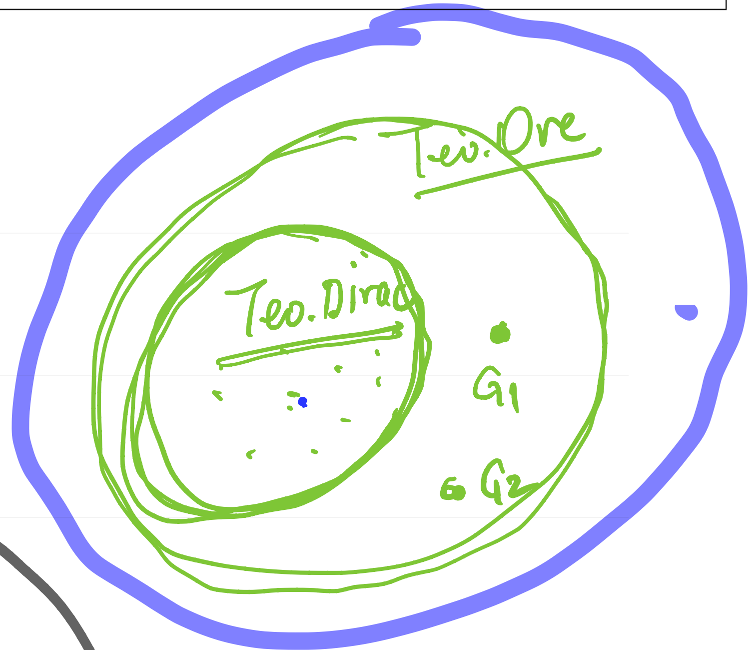
Se G é um grafo simples de ordem $n \geq 3$ tal que

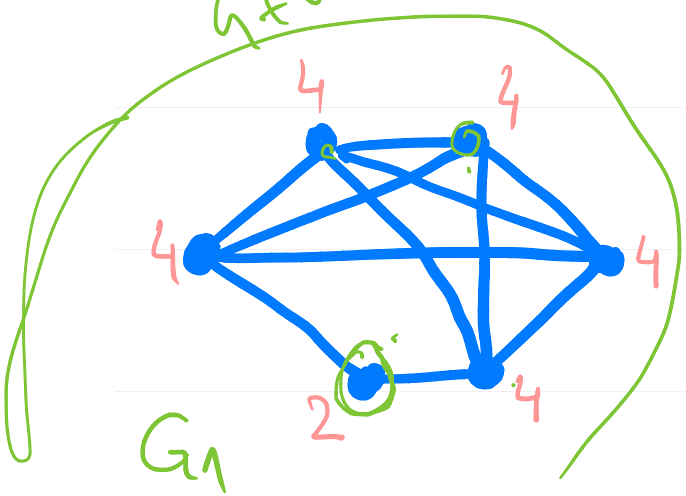
$$g(u) + g(v) \geq n \quad \text{para todo par } \ u, v \text{ de vértices não-adjacentes,}$$

então G é hamiltoniano.

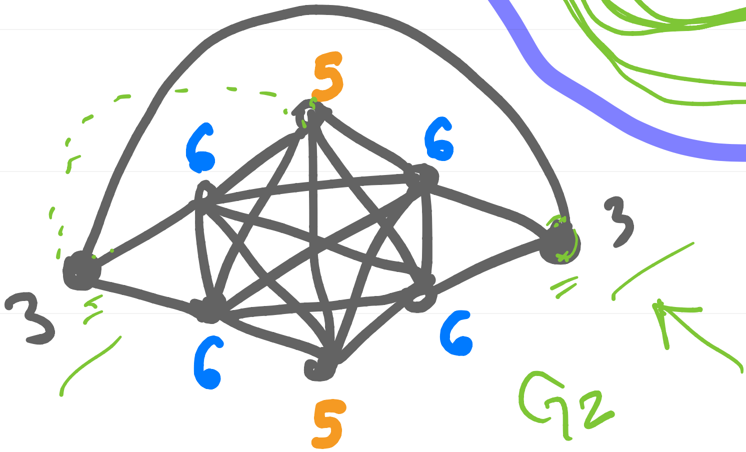
C circ. hamilt G+uv







n=6



n=8

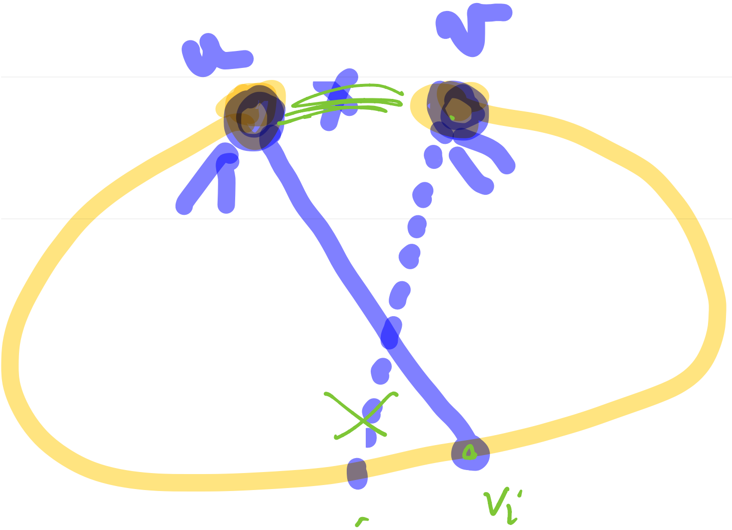
O seguinte resultado também foi motivado pela prova do Teorema 4.2. Note que a prova é análoga a que fizemos para o Teorema 4.2.

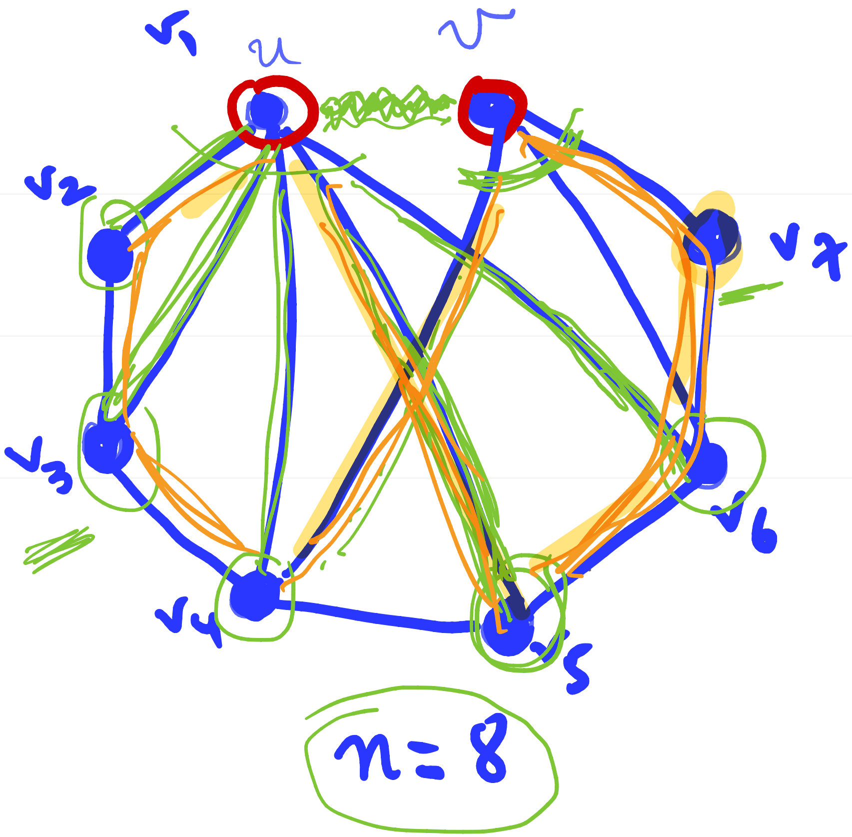
Teorema 4.4. (Bondy & Chvátal, 1976)
Seja G um grafo simples de ordem n e sejam u, v vértices não-adjacentes em G tais que

$$g(u) + g(v) \geq n.$$

Então G é hamiltoniano se e só se $G + uv$ é hamiltoniano.

$\Leftarrow$

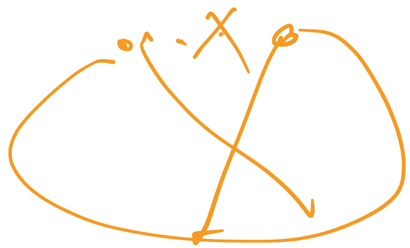


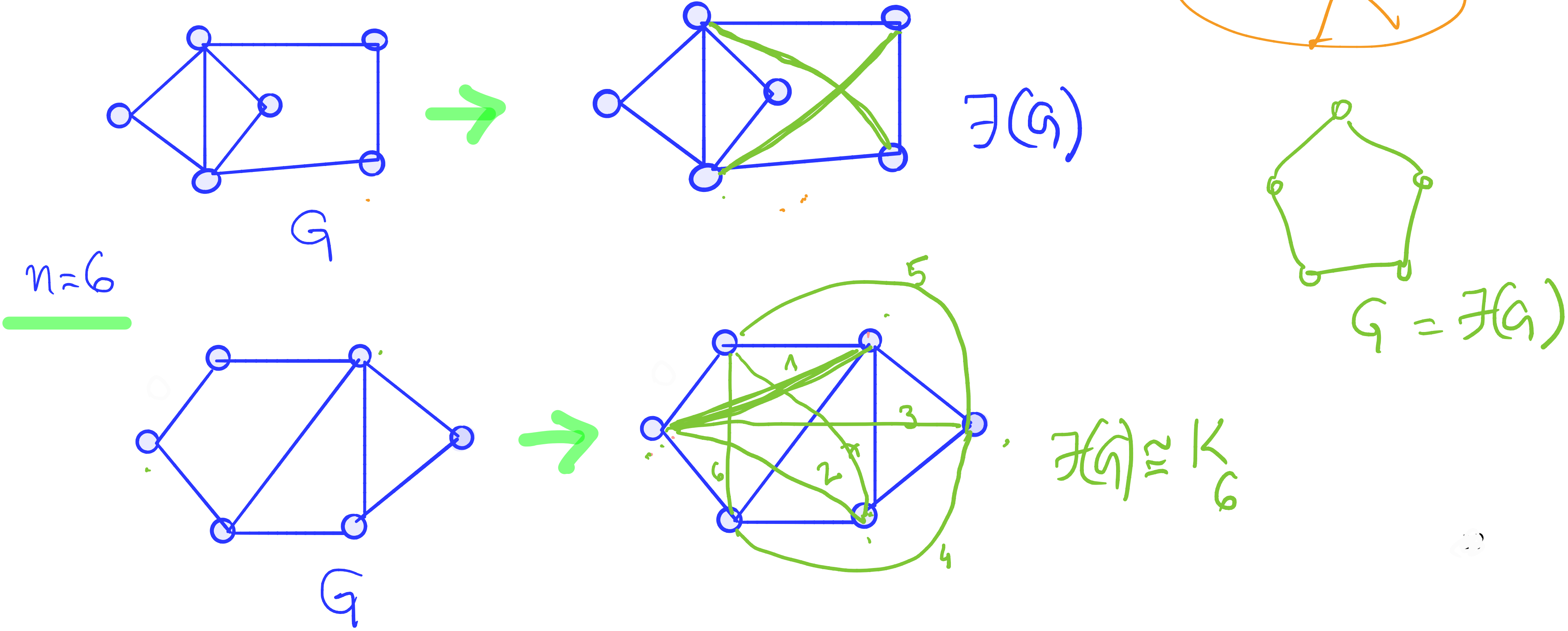


O resultado anterior motivou a definição do conceito de fecho de um grafo e resultados algorítmicos baseados nesse conceito combinado com o Teorema 4.4.

O **fecho de um grafo** G, denotado por $\mathcal{F}(G)$, é o grafo que se obtém de G acrescentando-se recursivamente arestas ligando pares de vértices não-adjacentes cuja soma dos graus é pelo menos $|V(G)|$ até que não exista mais nenhum tal par.

Exemplos:



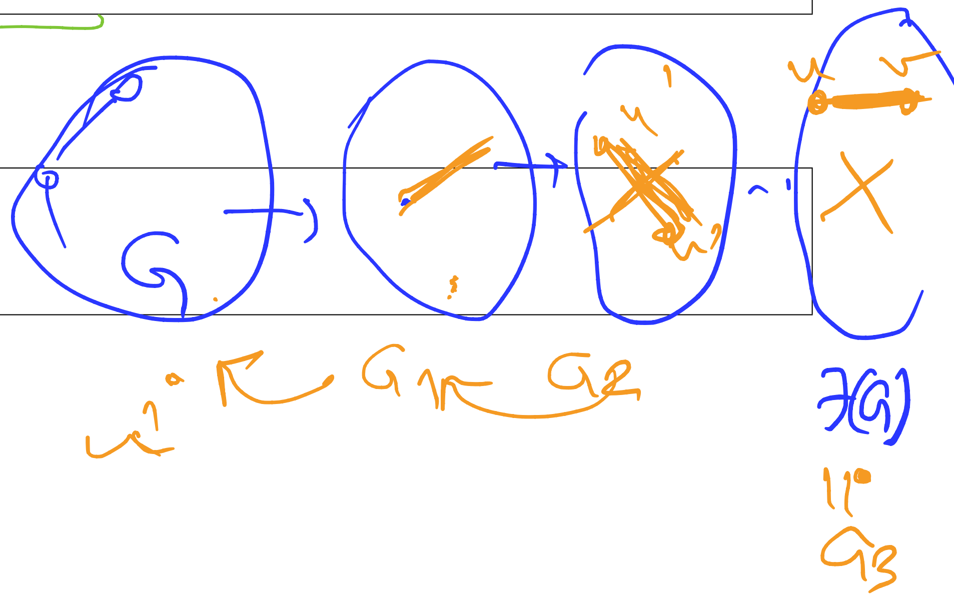


FATO F: O fecho de um grafo é único (independe da ordem em que as arestas são acrescentadas).

Da definição de fecho de um grafo e do Teorema 4.4, temos imediatamente os seguinte resultados.

Corolário 4.5. (Bondy & Chvátal, 1976)
Um grafo G é hamiltonian~~d~~o se e só se $\mathcal{F}(G)$ é hamiltoniano.

Corolário 4.6.
Se $\mathcal{F}(G)$ é completo, então G é hamiltoniano.



Na aula: algoritmo para encontrar um circuito hamiltoniano de um grafo G, quando temos um circuito hamiltoniano em $\mathcal{F}(G)$.

EXERCÍCIO: Provar o FATO F (unicidade do fecho de um grafo).
Prova.

<u>Procedimento</u> $\mathcal{F}$

- $H \leftarrow G$, $n = |V(G)|$
- <u>enquanto</u> $\exists\, u, v \in V(H)$ t.q. $g_H(u) + g_H(v) \geq n$
  <u>faça</u> $H \leftarrow H + uv$
- Devolva H

<u>Proposição</u>. Se G_1 e G_2 são grafos obtidos de G pelo Procedimento $\mathcal{F}$, então $G_1 = G_2$

Prova.

Sejam $A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ e

$B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$ cjtos das arestas

acrescentadas a G, nessa ordem, para obter G_1 e G_2, resp.

Então, $G_1 = G + \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ e

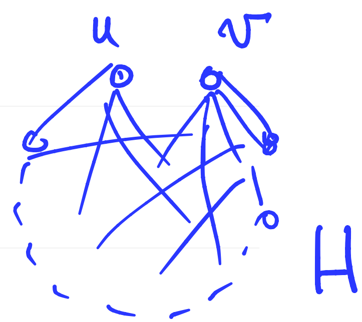
$G_2 = G + \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$.

Para provar que $G_1 = G_2$, basta provar que $A = B$.

- Vamos provar que $A \subseteq B$.

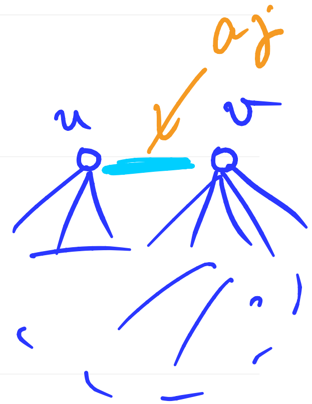
Suponha que isto não ocorra. Seja $a_j = \{u, v\}$ a 1ª aresta que ocorre em A e não ocorre em B.

Seja $H = G + \{a_1, a_2, \dots, a_{j-1}\}$.



Então $H \subseteq G_1$ e $H \subseteq G_2$.

Pela construção de G_1, temos que



$$g_H(u) + g_H(v) \geq n.$$

Como $H \subseteq G_2$, temos que

$$g_{G_2}(u) + g_{G_2}(v) \geq n.$$

Mas isto é uma contradição pois $\{u, v\} \notin A(G_2)$.

Logo, $A \subseteq B$.

- Analogamente, prova-se que $B \subseteq A$, donde segue que $A = B$. Com isto, a prova está completa. $\square$