TRANSFORMADA DE LAPLACE PARTE II

Ettore A. de Barros

6. Transformada Inversa

Calcular a transformada inversa de Laplace é o procedimento final que aplicaremos à solução de uma equação diferencial. A transformada inversa de Laplace é a operação que executa o processo inverso de obtenção de *f(t)* a partir de sua transformada *F(s):*

$$£^{-1}[F(s)] = f(t)$$

Ou seja, *f(t)* é a função cuja transformada de Laplace é *F(s).* A partir de um *F(s)* genérico, pode-se determinar *f(t)* a partir da seguinte expressão:

$$£^{-1}[F(s)] = f(t) = \int_{\sigma_c - i\infty}^{\sigma_c + i\infty} F(s) e^{st} ds \quad \text{para } t>0$$

O parâmetro σ_c é a abcissa de convergência, valor real superior à parte real de todos os pontos singulares de *F(s)*. O caminho de integração é paralelo ao eixo imaginário, deslocado da origem de σ_c.

A obtenção de *f(t)* pode ser mais simples, no entanto. Várias funções notáveis, como as descritas no tópico anterior, já possuem suas transformadas de Laplace conhecidas. Vários pares *f(t), F(s)* estão tabelados. Essas funções podem ser combinadas para resultar na solução da busca de *f(t)* desejada, aproveitando a propriedade de da transformada inversa da combinação linear de funções, que provaremos a seguir. Antes disso, a própria *F(s)* pode ser decomposta em outras funções de ***s*** mais simples, cuja transformada inversa está tabelada. Essa decomposição será objeto de uma próxima seção deste texto.

Neste procedimento mais simples de obtenção de *f(t)* a partir de F(s) pressupõe-se que a solução da transformada inversa de Laplace é única. Esta condição pode ser violada no caso de admitirmos a presença de *funções nulas* na solução. Definimos uma função nula *N(t)* como aquela em que vale

$$\int_0^t N(u)du = 0 \quad \text{, para todo } t > 0.$$

Em geral, qualquer função que é nula exceto em algum conjunto contável de pontos é uma função nula. Por exemplo,

$$f(t)=\begin{cases}\mathbf{1} \text{ para } t=1/2\\ \mathbf{-1} \text{ para } t=1\\ \mathbf{0} \text{ para qualquer outro valor de } t\end{cases}$$ é uma função nula.

Se admitirmos a presença deste tipo de função na solução, o cálculo da transformada inversa de *F(s)* possui mais de uma solução. Por exemplo,

$$f_1(t)=\begin{cases}e^{-3t} \text{ para } t\geq 0\\ 0 \text{ para } t<0\end{cases}$$ e $$f_2(t)=\begin{cases}0 \text{ para } t<0 \;\; e \; t=1\\ e^{-3t} \text{ para outros valores de } t\end{cases}$$ possuem a mesma transformada de Laplace, ou seja,

$$F(s)=\frac{1}{s+3}$$

Se não admitirmos a presença de funções nulas, devido ao seu pouco interesse prático, podemos invocar a unicidade da solução da transformada inversa de Laplace pelo *Teorema de Lech*, que pode ser interpretado como segue: seja ***f(t)*** contínua por partes em todo intervalo finito $0\leq t\leq N$ e de ordem exponencial para ***t>N***, então a transformada inversa de ***F(s)*** *(obtida pela transformada de Laplace de f(t))* é única, ou seja

$$£^{-1}[F(s)]=f(t)$$

a. Transformada Inversa da Combinação Linear de Funções

Da propriedade similar na Transformada de Laplace, temos:

$$£[f_1(t)+f_2(t)]=£[f_1(t)]+£[f_2(t)]=F_1(s)+F_2(s)$$

Pela unicidade da transformação inversa, temos:

$$[f_1(t)+f_2(t)]=£^{-1}[F_1(s)+F_2(s)]=£^{-1}[F_1(s)]+£^{-1}[F_2(s)]$$

Este resultado pode ser facilmente estendido para:

$$[c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)]=£^{-1}[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)]=£^{-1}[c_1F_1(s)]+£^{-1}[c_2F_2(s)],$$ onde c_1 e c_2 são reais.

Ou seja,

$$£^{-1}[c_1F_1(s)+c_2F_2(s)]=£^{-1}[c_1F_1(s)]+£^{-1}[c_2F_2(s)]=c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)$$

Portanto, voltando à questão da solução de uma equação diferencial, se conseguirmos decompor F(s) em formas simples o suficiente para que a transformada inversa de cada componente puder ser facilmente encontrada, podemos sobrepor achar a solução final simplesmente com a combinação linear de tais termos, conforme indicado no resultado acima.

7. Método de Decomposição em Frações Parciais

Suponha que ***F(s)*** pode ser expressa na forma racional abaixo:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$$, onde ***B(s)*** e ***A(s)*** são polinômios da variável complexa ***s***

Tentaremos decompor ***F(s)*** em frações mais simples, passíveis de serem encontradas em tabelas de transformada de Laplace de funções notáveis, o que proporcionaria encontrarmos facilmente as respectivas funções reais $f_i(t)$ que seriam compostas, de acordo com o resultado exposto em 5.1, de forma a calcular a transformada inversa de ***F(s)***, ou seja, ***f(t).*** Ou seja, queremos expressar ***F(s)*** por:

$$F(s) = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) + ... + c_n F_n(s)$$

onde, $F_i(s)$ são funções mais simples cuja transformada inversa é conhecida e tabelada. A função inversa é então facilmente obtida:

$$f(t) = £^{-1}[c_1 F_1(s)] + £^{-1}[c_2 F_2(s)] + ... = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t) + ... + c_n f_n(t)$$

A exposição de um método geral de decomposição requer que as frações sejam classificadas em algumas formas padronizadas, conforme segue.

a) Primeiro Caso:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)......(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)......(s+p_n)}$$ K é real, $n > m$, onde os pólos são reais e distintos entre sí.

Neste caso, ***F(s)*** pode ser facilmente decomposta em frações mais simples:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{a_1}{s+p_1} + \frac{a_2}{s+p_2} + ... + \frac{a_n}{s+p_n}$$

Os coeficientes "a_k" , *k = 1, ...n,* são chamados "resíduos". Podem ser achados de acordo com a fórmula

$$a_k = \left[(s+p_k)\frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=-p_k}$$

A partir daí, o cálculo da transformada inversa de ***F(s)*** é trivial:

$$f(t) = \pounds^{-1}[F(s)] = [a_1 F_1(s)] + \pounds^{-1}[a_2 F_2(s)] + ... = a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + ... + a_n e^{-p_n t} \quad t \geq 0$$

b) Segundo caso: Pólos múltiplos, n > m.

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_r}{(s+p_1)^r} + \frac{b_{r-1}}{(s+p_1)^{r-1}} + \ldots + \frac{b_1}{s+p_1} + \frac{a_{r+1}}{s+p_{r+1}} + \frac{a_{r+2}}{s+p_{r+2}} + \ldots + \frac{a_n}{s+p_n}$$

$$b_r = \left[(s+p_1)^r \frac{B(s)}{A(s)}\right]_{s=-p_1}$$

$$b_{r-1} = \frac{d}{ds}\left\{\left[(s+p_1)^r \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-p_1}$$

....

$$b_{r-i} = \frac{1}{i!}\frac{d^i}{ds^i}\left\{\left[(s+p_1)^r \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-p_1}$$

....

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!}\frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}}\left\{\left[(s+p_1)^r \frac{B(s)}{A(s)}\right]\right\}_{s=-p_1}$$

Os coeficientes *"a"* são calculados como no caso anterior.

A expressão da transformada inversa é:

$$f(t) = \left[\frac{b_r}{(r-1)!}t^{r-1} + \frac{b_{r-1}}{(r-2)!}t^{r-2} + \ldots + b_2 t + b_1\right]e^{-p_1 t} + a_{r+1}e^{-p_{r+1} t} + a_{r+2}e^{-p_{r+2} t} + \ldots + a_n e^{-p_n t}$$